

新しいコンクリートの沈下に関する 数理論的考察

正員 工学博士 吉 田 彌 七*

A MATHEMATICO-PHYSICAL INVESTIGATION OF THE SUBSIDENCE OF FRESHLY PLACED CONCRETE

(Trans. of JSCE Sept. 1952)

Dr. Eng., Yashichi Yoshida, C.E. Member.

Synopsis In the paper presented herewith is treated mathematically the subsidence or volume change of freshly placed concrete based on the physical considerations. The object of this investigation was to establish a general mathematico-physical theory governing the phenomenon of volume change resulting from settlement of concrete materials or water gain in freshly placed concrete. Theoretically speaking, the phenomenon of subsidence of concrete is so complicated that it is quite impossible to deduce a theory, even though an approximate analysis may be allowed. However, if it can be done to deduce a theory or at least a concept concerning the phenomenon, based on results of experimental researches, the theory or concept may be available to estimate mathematically, without a considerable mistake, a reliable value of subsidence.

要旨 本論文は新しい打ち立てコンクリートの容積変化すなわち沈下の問題を数理論物理学的に取扱つたもので、少なくとも実用される数理論を樹立することを目的とする。元来コンクリートの沈下現象は著しく複雑であり、もし近似解が許されるとしても、その理論の解明は極めて困難であるが、実験の結果に基づきこれを演繹し、この現象の概念を数理的に検討して、少なくとも実用を目的とする近似的理論を誘導したいと思う。

1. 概説

新しい打ち立てのコンクリートにおいては、重力の作用によりこれを組成するセメント及び骨材が沈降し、移動性の自由水が滲出し、漸次セメント及び骨材は圧密され、ここに沈下の現象を呈する。普通の土木建築の諸工事に使用されるコンクリートにおいては、真の沈降なる現象は起り得ない。すなわち、セメント及び骨材は自己重量に基づいて下方に沈降はするが、その過程においてそれらの各粒子は相互に接触しているため、その運動は著しく制肘を受けるのである。またコンクリートの組成分は沈泥におけるがごとく割合に均霽なる粒子から成るものでなく、比重及び粒大を異にするものであるから、各粒子の沈降の様相が違い、またその中の移動性自由水の滲出の機構も複雑であり、かつ滲出する水分はセメント及び微粒の砂を伴つて移動する。また粗い骨材は相互に組合つて架構作用をなし、各材料の沈降の進展を著しく妨げる。更にセメントペーストは混水後化学反応を始め時間の経過につれその粘性を高め、従つて移動性自由水の粘性も増加し、また粒子間の摩擦抵抗も高まり、かつ架構作用が著しく強化される。

かくのごとく、コンクリートの沈下現象は極めて複雑であるから、その本質を厳正なる意味において数理論的に解明することは不可能に近く、本論では、実用を目的として実験の結果に根拠を置いてこれを演繹し、もつてコンクリートの沈下の本質を明らかならしめる一助にしたいと思う。

2. 填充継続中に生ずるコンクリート沈下の理論的考察

(1) 概要 水密な型枠の内に一定の速度でコンクリートを打ち込む場合、その填充が t_1 時間で終止したものとし、この間のコンクリートの圧密過程、換言すれば沈下の推移を考察する。単位面積当り単位時間に打込まれるコンクリートの実質すなわちセメント及び骨材の水中での重さを g 、その実質の水中での単位重量を γ 、コンクリートの実質に換算せる填充速度を v とすれば、 $v = g/\gamma$ となる。しからば、打ち込み終止時のコンクリートの換

* 熊本大学教授、工学部土木建築工学科コンクリート工学教室

算高さ h_1 は、 $s=1/v=\gamma/g$ とすれば、

$$h_1 = t_1 v = t_1 / s$$

コンクリートの打ち込みが進行するにつれ、粒子圧は増し、粒子間に存在する非結合水には静水圧のほか静水過剰圧力が作用し、混合水の一部である自由水は、滲出 (Bleeding) の現象を呈して上方に移動し、ためにコンクリートは収縮して沈下が生ずる。今表面から x の深さの点での粒子圧を p 、静水過剰圧力を w とすれば、

$$p = \zeta \gamma x, \quad w = (1 - \zeta) \gamma x = \xi \gamma x, \quad p + w = \gamma x, \quad \zeta + \xi = 1 \dots\dots\dots (1)$$

ζ は粒子圧係数、 ξ は静水過剰圧係数であり、これらはいずれも時間とともに変化する性質のものである。コンクリートが凝結を始めない限り、(1) 式で示される関係は、近似的に成立するものと考えてよい。

コンクリートの打ち込みが t_1 で終止しそれが 15 分以下であれば、E. B. Smith 氏¹⁾の実験によれば、 ζ は $t=0 \sim t_1$ の範囲内では、近似的には 0 と考えて差支えない。しかるに、打ち込みがそれ以上の長時間に及んで続けられるときは、コンクリートの下部は相当に圧密され、従つて填充速度が 6 m/hr 位であれば、打ち込み高さが 1.50 m 以上にもなると ζ は時間 t に従つて急激に増大する。かかる場合には ζ を t の函数とし、Smith 氏の実験²⁾ から近似的に次のごとくなる。

$$\zeta = 1 - f(t) = 1 - e^{-mt} \dots\dots\dots (2)$$

しかし普通鉄筋コンクリート工に使用される軟練りコンクリートを 3~6 m/hr 程度の速さで填充を行う場合には、 h_1 が 5 m 以下のときの m は約 0.015 (min⁻¹) なる値を持つようである。

Smith 氏³⁾の研究を資料とし、容積比 1:1 $\frac{1}{2}$:3~1:2:4 なる配合のコンクリートの打ち込み速度が約 3~6 m/hr、施工時の空中温度約 21°C の場合の打ち上り高さ静水過剰圧力との関係を示せば、およそ表-1 のごとくなる。

表-1 コンクリートの填充高さ底部における静水過剰圧力との関係 (E. B. Smith 氏の実験より推定)

打ち上り高さ m		打ち込み開始後の時間 (min)	静水過剰圧力係数、 $\xi = 1 - \zeta$	
現実高さ	換算高さ		実験結果より計算した値	著者の計算値 $\xi = e^{-0.015t}$
1	0.8	10	1.00~0.90	0.86
2	1.6	20	0.77	0.74
5	4.0	50	0.46	0.47

元来、コンクリートの打ち上り表面から一定の深さの所における静水過剰圧力は、温度が低いほど、配合が富なるほど、打ち込み速度が速かなほど大であり、従つて圧密過程が遅れるのは言う迄もない。よつて、(2) 式の m の値もコンクリートの条件によつて相違する性質を有するが、本論の数値計算では $m=0.015$ とする。

次に、コンクリート表面から滲出する水量を求める。まづ打ち込み表面から x なる深さでの粒子圧は、 $p = \zeta \gamma x$ であり、 ζ は t の函数で近似的に $\zeta = 1 - e^{-mt}$ で示されるから、

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma x \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \frac{\partial x}{\partial t} \gamma = \gamma x \frac{\partial \zeta}{\partial t} + g \zeta, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma m e^{-mt} x + g(1 - e^{-mt}) \dots\dots\dots (3)$$

となる。よつて、コンクリートの打ち込み高さが h_1 になる迄に、コンクリート表面から滲出する全水量は次のごとくして求めることができる。

(2) 填充の初期に圧密係数を定数とみなし得る場合 まづ図-2 においてコンクリートの打ち上り中その表面が h なる換算高さにあるとき、表面の単位面積を通じて滲出する流量は、単位時間につき $\alpha \int_0^h \frac{\partial p}{\partial t} dx$ となる。ここに、 α はコンクリートの圧密係数である。この値はコンクリートの品質及びその施工法によつて異なるが、同一品質及び施工法の下においては、一般に $\alpha = f(t, h)$ で表わされる。大体その値は填充後の経過時間 t 及び打ち上り高さ h が大なるほど小である。しかして、打ち込み開始後 10~20 分以内では定数とみなしても差支えない場合が多い。

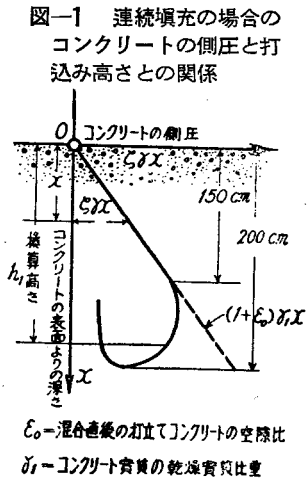
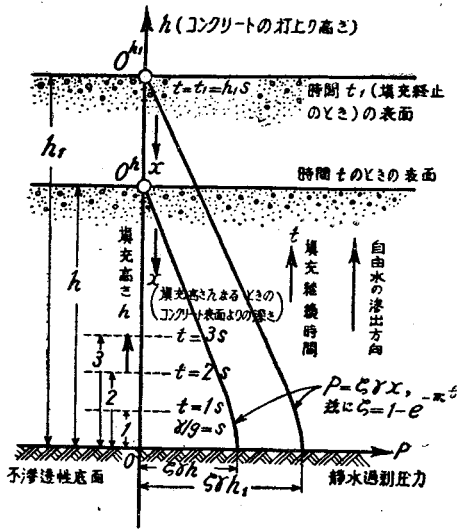


図-2 コンクリートの填充中の静水過剰圧力



打ち込み開始後 t 時間経つて換算高さが h になったとき、コンクリート表面よりの単位時間当りの滲出水量 Δq は単位面積につき、

$$\Delta q = \alpha \int_0^h \frac{\partial p}{\partial t} dx = \alpha \left\{ \left(\frac{1}{2} \gamma m h^2 - g h \right) e^{-m t} + g h \right\}$$

填充高さが h_1 に達する迄に、時間 0 より t_1 までの間に単位面積のコンクリート表面より滲出する全単位滲出水量は、

$$q = \int_0^{t_1} \Delta q dt \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{故に、 } q = \alpha \left\{ \frac{\gamma}{2} h_1^2 (1 - e^{-m t_1}) + g h_1 \left(t_1 - \frac{1 - e^{-m t_1}}{m} \right) \right\} \dots \dots \dots (4 a)$$

今、 $t=0$ のとき、すなわち混合直後の打ち立てコンクリートの空隙比（一定容積内の空隙の容積とセメント及び骨材の実質容積との比）を ϵ_0 とすれば、換算高さ h_1 なる迄に填充中に生ずる沈下の率 ΔH は、セメントが凝結を始めない限り、近似的に次式で示し得よう。すなわち H_0 を

填充が終止したときの現実高さとするれば、 $\Delta H = q/H_0$ 、 $H_0 = (1 + \epsilon_0) h_1$ であるから、

$$\Delta H = \frac{q}{(1 + \epsilon_0) h_1} = \frac{\alpha}{1 + \epsilon_0} \left\{ \frac{\gamma}{2} h_1 (1 - e^{-m t_1}) + g \left(t_1 - \frac{1 - e^{-m t_1}}{m} \right) \right\} \dots \dots \dots (5)$$

(5) 式からわかるように、填充速度が一定のときは、填充を終えた直後の沈下率 ΔH は打ち込み高さが大きいほど大である。また高さが一定のときは、填充速度が遅いほど t_1 が大となり、従つて ΔH の値は大となる。すなわち、ゆつくり填充を行えば、その終止までにコンクリートはほとんど沈下を完了することが理論的に言える。特に填充を階段式に行い、その滲出水を除去しながら打ち込みを進めて行けば、打ち終る迄に沈下を終えしめることができることがわかる。

(5) 式はまた次のごとく表わしてもよい。

$$\Delta H = \frac{\alpha}{1 + \epsilon_0} \gamma h_1 \left\{ t_1 - \left(\frac{1}{m} - \frac{t_1}{2} \right) (1 - e^{-m t_1}) \right\} \dots \dots \dots (5 a)$$

上式において $v = g/\gamma$ であり、 $h_1 = (g/\gamma) t_1 = v t_1$ で表わしてもよい。

(2a) 圧密係数が定数であると共に粒子圧係数が 0 とみなし得る場合 填充速度が 3~6 m/hr 程度であり、配合が容積比で 1:1 $\frac{1}{2}$:3~1:2:4 位の普通軟練りコンクリートにおいて、打ち込み中セメントの凝結が起らず、しかも流動性に変化なく、また圧密も行われなとき、すなわち g がすべて静水過剰圧になるものとし、連続填充高さが 150 cm 位迄で實際上コンクリートが流体であると考え得る場合には、 ΔH は

$$\Delta H = \frac{\alpha}{1 + \epsilon_0} \gamma h_1 = \frac{\alpha}{1 + \epsilon_0} g t_1 \dots \dots \dots (6)$$

(3) 圧密係数が時間につれ通減する場合 既述のごとく $t=10\sim 20$ 分位迄は α の値は定数とみなし得る場合が多いが、填充の速度が著しく遅くなるか、あるいは填充高さが大きくなると、コンクリートは凝固しない迄もその流動性が著しく悪くなり静水過剰圧力 w 及び圧密係数 α が小となり、一般的には α は時間 t の函数で表わすのが本質的であろう。すなわち、

$$\alpha = \alpha_0 \rho(t) \dots \dots \dots (7)$$

で示される。Smith 氏⁴⁾の実験からもわかるように、圧密の状態は填充開始後約 20 分にして急激に昂進し、従つてそれ以後 α の値が急に減少する。この事象を数理的に示すには、誤差曲線と類似の曲線を以てするのが現実にも即応する。よつて (7) 式は次の形で示すことができよう。

$$\alpha = \alpha_0 \rho_0(t) = \alpha_0 e^{-\nu(t-\tau)^2} \dots \dots \dots (7 a)$$

ここに α_0 は $t=0\sim\tau$ (τ : α の値が不変と認め得る限界時間) のときの圧密係数であり、 ν はある定数である。この式は $t \geq \tau$ (約 20 分) のとき適用され、 $t \leq \tau$ の範囲では $\alpha = \alpha_0$ とみなしても非常な誤りはなからう。よつて、 τ 及び ν をそれぞれ圧密が急変する特異点に達する時間及びそれに相当する打ち上り高さとする

ば、前と同様の計算を行つて、

$$q = \alpha_0 \left[\gamma h_1^2 t_1 + \left\{ \frac{1}{2} \gamma m (h_1^2 - h_1'^2) - g (h_1 - h_1') \right\} \int_{\tau}^{t_1} e^{-\nu(t-\tau)^2 + mt} dt + g (h_1 - h_1') \int_{\tau}^{t_1} e^{-\nu(t-\tau)^2} dt \right] \dots (8)$$

この式を解くには図式解法によるのが便利である。時間の単位を分とすれば定数 ν は普通コンクリートでは約 1.7×10^{-4} なる値を採るようである。しかるに h が h' より大きくなると、 α は急に小さくなるから、実用的には圧密作用が $t=120$ 分で終了するとみなすときは、(7) 式は

$$\alpha = \alpha_0 \{1 - 0.01(t - \tau)\}$$

としても大した不都合はない。ただし t の単位は分である。しからば全単位滲出水量 q の計算は著しく簡易となる。

次に圧密係数 α が定数とみなし得る期間 τ が非常に小さいとき、換言すれば打ち込み当初から圧密係数が変化するものと考えねばならぬときは、

$$\alpha = \alpha_0 t^{n-1} \quad \text{但し } n < 1 \dots \dots \dots (9)$$

で示すことができよう。 n の値は普通のコンクリートにおいては $1/2$ に近い数値を持つのである。しからば前と同様に、

$$q = \alpha_0 \left\{ \left(\frac{1}{2} \gamma m h_1^2 - g h_1 \right) \int_0^{t_1} t^{n-1} e^{-mt} dt + \frac{g h_1}{n} t_1^n \right\} \dots \dots \dots (9a)$$

上式中の積分値は、積分の上限が ∞ となると $I'(n)/m^n$ となり、 $n=1/2$ とすれば $\sqrt{\pi/m}$ である。しかるに普通のコンクリートの施工においては、普通の温度の場合混合後 10 時間も経てばセメントの凝結がほとんど終るから、上式は t_1 がそれ以内のときに限り適用し得るのである。既述の Smith 氏⁵⁾ の研究によれば t_1 の限界はほぼ 2 時間長くても 3 時間位と想定され、事実このことは吉田徳次郎博士⁶⁾ の実験においても表われている。かかる場合において $\int_0^{t_1} t^{n-1} e^{-mt} dt$ を解くには、数値積分をするか、または図式解法によつて、その近似値が得られる。但し $\alpha = \alpha_0 t^{n-1}$ と置いたため t が 1 分以下では n は 1 とみなして計算する。しからば、沈下率 ΔH は $\gamma h_1 = gt$ と置いて、

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{\alpha_0}{1 + \varepsilon_0} \left\{ \left(\frac{1}{2} \gamma m h_1 - g \right) \int_0^{t_1} t^{n-1} e^{-mt} dt + \frac{g}{n} t_1^n \right\} \\ &= \frac{\alpha_0}{1 + \varepsilon_0} \gamma h_1 \left\{ \frac{1}{n} t_1^{n-1} - \left(\frac{1}{t_1} - \frac{m}{2} \right) \int_0^{t_1} t^{n-1} e^{-mt} dt \right\} \dots \dots \dots (9b) \end{aligned}$$

(4) 要約 要するに、鉄筋コンクリート工に用いられる普通のコンクリートに関し、填充継続中に生ずる沈下量について、想定し得る圧密係数の種々なる場合のときの値を求める式を数理的に誘導した。これには K. Terzaghi 博士⁷⁾ の沈泥の沈下理論を参考した。以上の数理論より明白なごとく、ゆつくり填充を続けて行けば、その間においてコンクリートは沈下の大部分を終え、填充終了の暁にはコンクリート中の移動性自由水はほとんど滲出し尽すこととなる。なお全沈下量を少なからしめることが要求される時、その 1 方法として填充の進行につれ上方になるほど使用水量を少なくして圧密係数を低下し、滲出する水量を減ぜしめることがあるが、この工法が以上の理論から合理的施工法であることがいえるのである。

由来、填充中におけるコンクリートの沈下の問題は軽々しく取り扱われてきたきらいなしとしない。しかるにその本質は極めて複雑であり、構造物の安全性に影響する所が少なくない。また、軟練のコンクリートを型枠内に填充するには、打ち込んでから締固めが行われる。従つて、現実における沈下現象は同一配合のコンクリートにおいてさえも極めて複雑であり、以上の数理論が完全なものでなくても、填充中の沈下現象の概念を掴む上になんらかの役割を果すものと思われる。

3. 填充終止後に生ずるコンクリート沈下の理論的考察

(1) 数理的考察 コンクリートの填充がその開始後 t_1 時間で終止し、その換算高さが h_1 なる時、その後の圧密過程、換言すれば、沈下がその後の経過時間につれていかに進展して行くかを考察する。この際コンクリート中の移動性自由水分は 2. で取り扱つたように、上方のみに向つて滲出し、その填充高さは約 150 cm 以下で、その填充速度は 6 m/hr 程度であると考えらる。

(a) セメントがいわゆる凝結を起さず、圧密係数 α が定数とみなし得る場合：この場合は、静水過剰圧係数 α と填充終止後の経過時間 T との関係は、K. Terzaghi 博士⁸⁾ の沈泥の圧密過程の理論に準じ、次式で示されよう。すなわち、

$$\xi = 1 - \zeta = (1 - \zeta_1)e^{-(2k/\alpha h_1^2)T} = (1 - \zeta_1)e^{-2aT/h_1^2} \dots\dots\dots (10)$$

上式において、 $T=0$ のときは $\zeta = \zeta_1$ である。しかして、填充が手際よく極めて短い時間で終止した場合は、実際上 $\zeta_1 = \zeta = 0$ とみなし得よう。しかれば、セメント及び骨材の水中での高さはすべて静水過剰圧力になると考えてよい。よつて、(10) 式は次のようになる。

$$\xi = (1 - \zeta) = e^{-2aT/h_1^2} \dots\dots\dots (10 a)$$

ここに $a = k/\alpha$ 、 k は透水係数、 α は圧密係数であり、ここでは a をかりに滲出係数と呼ぶこととする。この $\xi = (1 - \zeta)$ の変化の様相は、コンクリートを填充した後における型枠の内側面に働く側圧を測定することによつて、実験的に探知することができよう。既に断わつたごとく、ここでは填充が急速に行われその終止直後の流動性が填充開始当初と変りないと仮定したから、 ξ の値は既述の Smith 氏⁹⁾ の実験結果から誘導した公式を用いて求められる。すなわち、

$$\xi = 1 - \zeta = e^{-mT} \quad \text{ここに} \quad m = (2k/\alpha h_1^2) = 2a/h_1^2$$

よつて、静水過剰圧力 w は、

$$w = \xi \gamma x = \gamma e^{-mT} x \dots\dots\dots (10 b)$$

となる。今 $\zeta = 1 - f(T)$ とすれば、 $\xi = f(T) = e^{-mT}$ であるから、 $\partial w/\partial x = \gamma e^{-mT}$ を得る。しかれば、型枠の影響を考慮する必要がないときのコンクリートの単位面積からの滲出水量は、Darcy の法則から

$$dq = k \frac{\partial w}{\partial x} dT, \quad \text{従つて} \quad q = \int k \frac{\partial w}{\partial x} dT \dots\dots\dots (11)$$

となる。現実的に見て、 k を定数とみなせば、填充終止後表面から T 時間中に単位面積から滲出上昇した水分の量 q は、次のごとくなる。

$$q = k \gamma \int_0^T e^{-mT} dT = \frac{k\gamma}{m} (1 - e^{-mT}) \dots\dots\dots (12)$$

上式において、透水係数 k と圧密係数 α との関係は $k = \alpha h_1^2 m/2$ で表わされる。

今 2. の場合に準じて m の値として $0.015(\text{min}^{-1})$ を取れば、

$$q = \frac{k}{0.015} \gamma (1 - e^{-0.015T})$$

となる。ここに k は $(1/2)\alpha h_1^2 m$ に相当する。

(b) 圧密係数 α が定数、粒子圧係数が 0 とみなし得る場合：コンクリートの填充が混合後極めて短い時間で終止した場合には、セメントが凝結することなく、かつ流動性にも変化がないと考え得るから、大体において、填充終止後約 10 分以内においては $\partial w/\partial x = \gamma$ となり、従つて、全単位滲出水量 q は、

$$q = k\gamma T = (\alpha h_1^2/2)m\gamma T \dots\dots\dots (13)$$

この式は (12) 式の e^{-mT} を展開して第 2 項まで取つた場合に相当する。

(c) 圧密係数 α 、換言すれば滲透係数 k が通減する場合：コンクリートの填充が終止した時間 t_1 が大して大きくない場合、換言すれば、コンクリートは凝結に向い流動性が悪くなつて行くと考えねばならぬときの沈下量を計算するに当り、填充終止直後の静水過剰圧係数 ξ が 1、そのときの k を k_0 、 α を α_0 とみなし得る場合、 k が填充後の経過時間 T の函数として変化するものとすれば、表面からの全単位滲出水量 q は次のごとくなる。

$$q = \gamma k_0 \int_0^T T^{n-1} e^{-mT} dT \dots\dots\dots (14)$$

ここに $n < 1$ で、既述のごとく普通 0.5~0.4 の値を取り、 m は $0.015(\text{min}^{-1})$ 程度である。上式は次のごとく書いてもよい。

$$q = \frac{1}{2} \alpha_0 \gamma h_1^2 m \int_0^T T^{n-1} e^{-0.015T} dT \dots\dots\dots (14 a)$$

もし、填充終止時間が混合後相当に経つていて、すなわち t_1 が相当大であり、コンクリートが未だ凝結は進んではいないがその流動性が悪くなつている場合には、その後の沈下量乃至は沈下率を計算するに当つては、 $T=0$ のときの ξ の値は 1 ではなくて、これよりも小なるものである。かかる場合の ξ の値は、K. Terzaghi 博士¹⁰⁾ が提唱したところに準じて (10) 式から求めればよい。すなわち、

$$1 - \zeta = (1 - \zeta_1)e^{-(2k/\alpha h_1^2)T} \quad \text{または} \quad \xi = (1 - \zeta_1)e^{-mT} \dots\dots\dots (16)$$

ここに ζ_1 は $t = t_1$ すなわち $T=0$ のときの ζ の値である。その値は、

$$\zeta_1 = 1 - e^{-(2k/\alpha h_1^2)t_1} = 1 - e^{-mt_1} \dots\dots\dots (17)$$

から求められる。 k, α, a, m については、 $t=t_1$ 以後すなわち填充終止以後の数値を取る。

(d) 要約：以上計算した q の値は、いずれも h_1 なる換算高さに対する全沈下量を表わすものと考え得るから、填充終止後時間 T における沈下率 ΔH は、次のごとくして求められる。すなわち、 ϵ_1 を $t=t_1(T=0)$ のときの空隙比、 h_1 及び H_1 をそれぞれコンクリートの填充換算高さ及び現実高さとするれば、

$$\Delta H = \frac{q}{(1+\epsilon_1)h_1} = \frac{q}{H_1} \dots \dots \dots (15)$$

以上論じた所からわかるように、断面が同じで高さが一定のコンクリート柱における填充終止後ある時間の沈下率は、理論的には填充速度が大きいほど大きいことになる。また同一断面の柱で同じ速さで打ち上げるときは、その填充終止後における沈下率は柱の丈高が大きいほど小であることもわかる。また填充が普通の速さで行われるときは、同じ断面で高さも変らない柱における填充終止後の極限沈下量または沈下率は、填充開始時を基準にすれば大して填充速度に支配されない。換言すれば最後沈下量のある値に想定すれば、これを目標としての填充速度には相当の巾があるようであるが、このことも本研究から理論的に推定される。

(2) 実験的検討 (1) に述べた理論が概念的に、少なくとも実用的に、沈下量を推定するに当つて役立つものであるかどうかを著者の実験結果に照し合わせて検討したいと思う。

簡単のため、ここに引き合いに出す実験は、著者の行なつた研究の単なる一つの場合に過ぎない。すなわち、実験用コンクリートは、普通ポルトランドセメント、天然産のままの静浄、優良な川砂及び川砂利からなる配合容積比 1:2:4、普通の鉄筋コンクリート工事の施工に適当なるウォークビリーチを有し、使用水量とセメントの重量比 75% にして骨材の吸水量を考慮した場合の水セメント重量比 71.4% なる品質である。コンクリートは実験に必要な量よりも少し多い量をミキサを用いて一度に練上げ、しかる後これをでき得る限り急速に直径約 60 cm、高さ約 20 cm の丸皿に高さが約 15 cm になるよう打込んで締固め、その表面に測定棒を有する円板を置いて、これが降下を観測してコンクリート表面の沈下量を測定した。練上げコンクリートの単位重量は 2.3687 t/m³、コンクリート 1m³ 中の実質(セメント及び骨材)の水中での重さ $\gamma_0 = 1.3776$ t、その実質の水中での単位重量 $\gamma = 1.7330$ t/m³、空隙比 $\epsilon_0 = 0.25$ 、推定極限沈下率 2.20% であつた。

まづ (14) 式において $T=0$ のときの α なる圧密係数を α_0 と同じと見てこれを 0.02 cm²/gr、 $\epsilon_1 = \epsilon_0$ 、 $n = 0.4$ と置けば、(15) 式から

$$\Delta H = \frac{\alpha_0}{1+\epsilon_0} \frac{\gamma h_1}{2} m \int_0^T T^{n-1} e^{-mT} dT \dots \dots \dots (18)$$

を得る。上式に実験数値を代入して整頓すれば、

$$\Delta H = \frac{0.26}{100} \int_0^T T^{-0.6} e^{-0.015T} dT \dots \dots \dots (18a)$$

この式による計算値は図-3において実験値と共に示してある。図からわかるように、(18a)式による計算値は $T=40$ 分迄は実験の結果にかなり近い値を与えるが、それ以上時間が経てば本式による値は実験値よりかなり大きくなる。これは、セメントの水和作用の影響で、混合後 40 分以上も経つてるとき、圧密係数にしても透水係数にしても、それ等が混合直後と変わらないとみなしたことに帰因する。

次に実験値を基として実験公式 3つを作り、それ等による計算値と実験値を対照すれば、図-3 に示す通りである。図からわかるように、この場合実験式としては (20) 式が最も適応するようである。

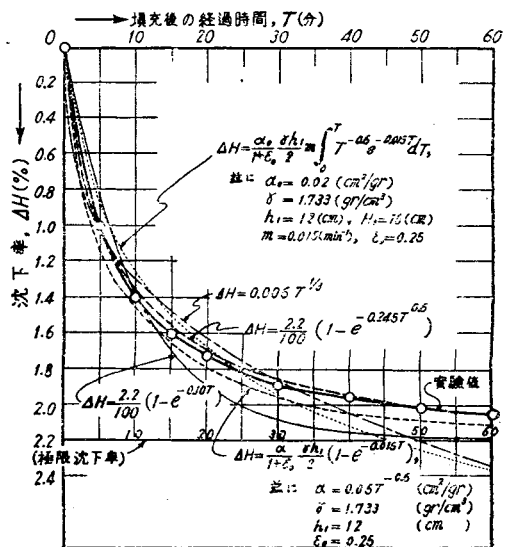
$$\Delta H = \frac{2.2}{100} (1 - e^{-0.10T}) \dots \dots \dots (19)$$

$$\Delta H = \frac{2.2}{100} (1 - e^{-0.245T^{0.5}}) \dots \dots \dots (20)$$

$$\Delta H = 0.006T^{1/3} \dots \dots \dots (21)$$

(20) 式を一般的に書けば次のごとくなる。

図-3 填充終止後のコンクリート沈下の推移

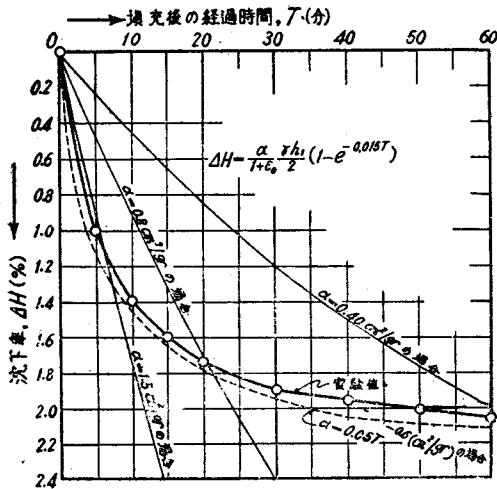


$$\Delta H = \frac{\Delta H_{lim}}{100} (1 - e^{-\nu T^\mu}) = \frac{\Delta H_{lim}}{100} (1 - e^{-\nu T^\mu}) \dots \dots \dots (22)$$

ここに ΔH_{lim} は極限沈下率(百分率を用いる), ν 及び μ は実験定数である。
次に, (15) 式に (12) 式を代入すると, 次のごとくなる。

$$\Delta H = \frac{\alpha}{1 + \epsilon_0} \frac{\gamma h_1}{2} (1 - e^{-mT}) \dots \dots \dots (23)$$

図-4 填充終止後のコンクリート沈下の推移



ここに, $\gamma = 1.7330(\text{gr/cm}^3)$, $m = 0.015(\text{min}^{-1})$, $h_1 = 12(\text{cm})$, $\epsilon_0 = 0.25$ とし, α を仮りに $0.05 T^{-0.6}$, 0.40 , 0.80 及び $1.50(\text{cm}^2/\text{gr})$ とした場合の計算値と実験値との対照に便するため図-4 を作った。なお図-3 にも $\alpha = 0.05 T^{-0.6}(\text{cm}^2/\text{gr})$ に対する (23) 式による計算値を示して, 他式との比較に便してある。

以上の数値計算に用いた圧密係数 α の値は, 直接に求めたものでなくて, 本実験に用いたコンクリートの沈下に関する多くの実験結果から, 間接に帰納的に認定した値である。実験の結果から見て, 圧密係数は定数とみなすよりも, 混合後のセメントの水和作用の進展につれて逡減して行くと考えることが現実に近いことは確認されてよい。すなわち, α を時間 T の函数として求めた理論式 (18) 及び実験式 (20) はいずれも実用的には利用価値があるものと考えられよう。なお (23) 式はその誘導方法に非合理的な点が含まれて

いるとは言え, α を時間の函数として別途に考えることにより現実に近い値を与える。

要するに, 填充終止後にコンクリートに生ずる沈下の問題も極めて複雑であり, よつてこれが数理的解法は純理論的に取扱うことには相当な無理があり, 従つてむしろ実験的要素を加味した数理論を樹て, 特定の領域における実用を目標として解決することが効果的かつ確実性に富み, また現実性があることがわかる。

4. コンクリートの沈下に及ぼす型枠の寸法の影響に関する理論的考察

吉田徳次郎博士¹¹⁾の研究によれば, 柱材の断面の寸法及び型枠の種類に変わらなければ, 填充終止後の沈下量はほぼ高さの冪函数(指数は1より小)に従つて変化し, また, 高さが一定であれば断面が大きいく程大きいことがわかる。この実験だけから見ても, コンクリートの沈下量は型枠の影響を相当に蒙ることが推断できる。以下この問題について理論的に考察しよう。

新しいコンクリートを型枠内に打ち込むときは, その沈下に対して抵抗する摩擦力がコンクリートと型枠の堰板との間に作用する。垂直なる柱を例に採り, 摩擦力がいかに沈下に影響するかを検討しよう。まず, 新しいコンクリートを打ち込んだ当初においては, 附着力はこれを無視しても大した誤りはないから, 打ち上り高さを H_0 (これに対する換算高さ h_1) とすれば, 填充作業進行中であれば打ち込み開始時より t 時間経過した後, また填充終止後であればその終止時より t 時間後の単位面積からの滲出水量は, いずれの場合においても, 一般的に次式で示される。すなわち,

$$q_t = \int_0^t \alpha \frac{\partial p}{\partial t} dx - \alpha P_f h_1 = \int_0^t k \gamma \zeta dt - \alpha P_f h_1$$

となり, 沈下率は $\Delta H = q_t / [(1 + \epsilon_0) h_1]$ または q_t / H_0 となる。この中で H_0 は填充進行中の場合は新しいコンクリートが沈下を起さないものと考えての打上りの現実高さであり, 填充終止後であれば終止直後の現実高さ H_1 とみなしても大した誤りはない。また $\int_0^{h_1} \alpha \frac{\partial p}{\partial t} dx$ あるいは ζ の値は填充進行中とその終止後, 換言すれば, 混合後打ち込み開始以来の時間によつて相違がある。 P_f はコンクリートと堰板内面の垂直接触面に作用する総摩擦力をコンクリート柱の断面積で除した値であり, その他の記号は前記と変りはない。

この $\alpha P_f h_1$ の値は, 柱の断面積, 正しく言えば寸法が大きいくときは無視することができるが, 断面の寸法が小さいときは, 摩擦力が沈下の起動力である重力に逆つて作用するから, $\alpha P_f h_1$ は沈下を軽減する力となる。

今, 円形断面の垂直柱状体の例について考えるに, 単位容積のコンクリート中のセメント及び骨材の水中での

重さを γ_0 とし、柱の半径を $R(\text{cm})$, f をコンクリート材料と堰板との間に作用する水中摩擦係数 (普通 0.15 位) とすれば, P_f は近似的に $P_f = \int_0^{H_0} f\gamma_0 x \cdot 2\pi R dx / (\pi R^2)$ で示されるから,

$$P_f = f\gamma_0 H_0^2 / R, \quad (\text{gr/cm}^2)$$

となる。 f なる摩擦係数は、水和作用の進行のため、時間の函数とみなすことが現実的である。しかし時間が短いときは近似的に定数と考えてよい。今、 ΔH_f を以上の摩擦力に基づく沈下率の減少量とすれば、

$$\Delta H_f = \alpha P_f h_1 / H_0 = \alpha f \gamma_0 H_0 h_1 / R = \alpha f \gamma_0 (1 + \epsilon_0) h_1^2 / R \dots\dots\dots (24)$$

となる。これからわかるように堰板とコンクリートの間の摩擦に基づく沈下率の減少量は、コンクリートの打ち上り高さの2乗に正比例し、半径に反比例する。この理論は吉田徳次郎博士¹²⁾の実験の結果と概念的に一致する。

コンクリートの填充が打ち込みを始めてからかなりの時間を経て終止したときは、摩擦力が増大するが、更に凝着力が作用するに至る。この凝着すなわち凝結による附着が堰板の表面にいかんか生育するか、その力度の分布はどうであるかは不明であるが、今仮りにその平均値を τ_m をもつて表わせば、 P_f は半径 R の円の中での $\int_0^{H_0} f\gamma_0 x \times 2\pi R dx + \tau_m \cdot 2\pi R H_0$ の平均値となり、 ΔH_f は次のようになる。すなわち

$$\Delta H_f = \alpha h_1 (f\gamma_0 H_0 + 2\tau_m) / R \dots\dots\dots (25)$$

ここに τ_m なる凝着力は時間の経過につれて大きくなる。

新しいコンクリートは、それが軟練であり、かつ混合後余り時間が経っていないときは、流体に近いから、部材の寸法が大きければ堰板の沈下に及ぼす影響は小さくなり、例えばその半径 R が 20 cm 以上にもなると、沈下に及ぼす型枠の影響は皆無かまたはこれに近い。しかし半径が小さいときは、沈下率は高さの 1~2 乗に正比例し、半径に反比例するある量だけ減少することが理論的に考えられる。鉄筋コンクリート柱における帯鉄筋あるいはラセン鉄筋の沈下に対する作用も本問題と一脈相通するものがあることを附言しておく。

5. 結 論

以上コンクリートの沈下問題に関し既往の実験的研究を指針とし、Karl Terzaghi 博士の研究を参考し、著者の見解による論拠に基づいて理論的に、少なくとも実用価値を失わないように解決しようと試みた。本質的にみて、実験的研究からも明らかなように、コンクリートの沈下の様相は使用材料、配合及び水セメント比、混合・打ち込み・締固め等の施工法、部材の寸法、周囲の条件等によつて異なるものであり、従つてあらゆる場合に適用できる普遍的理論の樹立はむづかしい。しかし、普通の鉄筋コンクリート工に用いる良質のコンクリートに対しては、コンクリートが施工中すなわち混合から填充終止後凝結を始める期間において、水和作用の進展に伴ない圧密係数は漸次減少すると考えるのが実際に適合すると言えるようであり、既に検討した所からわかるように填充終止後においては、以上の条件に基づいて解いた式すなわち理論式 (18)、半理論式 (23)、実験式 (20) (但し $\alpha = 0.05 T^{-0.6}$) が実験値に近い値を与える。

填充進行中の沈下率はこれに関する実験がむづかしく、発表された文献も稀であり、著者もこれに関する研究をかつて行つたが、実験の目的が沈下そのものの理論的解明にあつたのではないので厳密には言えないが、 α が時間と共に変化するものとして解いた理論式 (9 b) が適するのではないかと推測される。なお部材の断面が小さいときは沈下率は高さの 1~2 乗に正比例し、半径に逆比例するある量だけ減少するであろうことを論じた。更にコンクリートよりの水分の滲出が上面だけでなく下面からも行われ、あるいは高さの方向に直角に行われる場合についても本論を演繹して解くことができよう。

新しいコンクリートの沈下の現象は、その真相を実験的に確認することすら容易ではない。ましてこの理論的解決は望蜀の譏りなしとしないが、ただ本稿を敢えて発表するゆえんのは、将来における本問題の研究に対し示唆ともなりコンクリート及び鉄筋コンクリート構造物をよりよく造るのに何等かの御役に立てたいと自負するからである。

参 考 文 献

- 1), 2), 3), 4), 5) 及び 9) Smith, E.B., "Pressure of Green Concrete," Concrete, March 1920, pp. 158-161.
- 6), 11) 及び 12) 吉田徳次郎, "新しいコンクリートに於ける材料の分離に就て", 土木学会誌第18巻第8号, 昭和7年8月
- 7), 8) 及び 10) Terzaghi, Karl, "Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage," Leipzig und Wien, Franz Deuticke, 1925.

特に注目に値する論文

吉田徳次郎 "ポルトランドセメント糊状体の研究", 土木学会誌第10巻第4号, 大正13年8月

“新しいコンクリートの沈下とコンクリートと鋼の粘着強度との関係に就て”, 九州帝国大学工学部彙報第4巻第6号, 昭和5年2月

“材料の分離がコンクリート桁の強度に及ぼす影響”, 九州帝国大学工学部彙報第6巻第5号, 昭和6年11月

Davis, R.E., E.H. Brown and J.W. Kelly, “Some Factors Influencing the Bond Between Concrete and Reinforcing Steel,” Proc. A.S.T.M., Vol. 38, Part II, pp. 394-406, 1938.

Gilkey, H.J., and Others, “Bond Between Concrete and Steel,” Iowa Eng. Exp. Sta. Bull. No. 147, 1940.

吉田彌七 “ボルトランドセメントモルタルの容積変化に就て”, 熊本工業会誌第2号, 昭和4年2月, “乾燥によるコンクリートの容積変化の研究”, 個人出版, 昭和18年1月

(昭.27.2.13.)

UDC 517.949.8 : 517.944

階微分法による偏微分方程式 I
DIFFERENCE METHOD FOR PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Part I.

(Trans. of JSCE Sept. 1952)

*Bennosuke Tanimoto, C.E. Member.**

ALL the derivations in this article are due to the exclusive use of the modified Bessel interpolation formula for the function $\phi(x,y)$. Similar calculation may be performed by interpolation formulas of other types, including mixed ones. In this regard it is noted that Collatz-Hidaka's method²⁾ of differentiation affords the same results as those derived from the interpolation formula of Stirling type.

Three-dimensional problems may also be treated. The work would require a considerable amount of efforts, even when systematic procedure of calculation is adopted.

1. Interpolation formula. The interpolation formula of modified Bessel type for the function $\phi(x,y)$ is written in the form

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & \sum_{r+s=0}^n \sum_{s=0}^{r+s} \rho(u,r)\rho(v,s) \frac{1}{4} A_{2rx\ 2sy}^{2r+2s} \{(\overline{rs}) + (\overline{rs-1}) + (\overline{r-1s}) + (\overline{r-1s-1})\} \\ & + \sigma(u,r)\rho(v,s) \frac{1}{2} A_{(2r+1)x\ 2sy}^{2r+2s+1} \{(\overline{rs}) + (\overline{rs-1})\} \\ & + \rho(u,r)\sigma(v,s) \frac{1}{2} A_{2rx\ (2s+1)y}^{2r+2s+1} \{(\overline{rs}) + (\overline{r-1s})\} \\ & + \sigma(u,r)\sigma(v,s) A_{(2r+1)x\ (2s+1)y}^{2r+2s+2} (\overline{rs}), \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

where $u = \frac{x-x_0}{h} - \frac{1}{2}, \quad v = \frac{y-y_0}{k} - \frac{1}{2},$

$$\begin{aligned} \rho(\theta,\nu) = & \frac{1}{2\nu} \left(\theta^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\theta^2 - \frac{9}{4}\right) \dots \left(\theta^2 - \frac{2\nu-1^2}{4}\right), \\ \sigma(\theta,\nu) = & \frac{1}{2\nu+1} \theta \left(\theta^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\theta^2 - \frac{9}{4}\right) \dots \left(\theta^2 - \frac{2\nu-1^2}{4}\right), \\ (\overline{rs}) = & \phi(x_0 - rh, y_0 - sk), \end{aligned}$$

* Professor of Shinshu University, Faculty of Engineering¹⁾.