

開水路急縮部の水理学的性状に関する研究

FLOW BEHAVIOURS AT SUDDEN CONTRACTION OF OPEN CHANNEL

石原 藤次郎*・志方 俊之**

By Tojiro Ishihara and Toshiyuki Shikata

要 旨 本文は開水路急変部、とくに幅が急激に縮小する水路において、開水路流れが示す各種の水理学的特性、すなわち、遷移現象の分類、遷移水面形、エネルギー損失、収縮係数およびはく離領域の長さについて理論的および実験的考察を加えたものである。

急縮部の上流および下流に形成されるはく離領域は、流れの水理学的性格にいちじるしい影響を与える。ここでは急縮部における流れは拘束された流れの場における流れの収縮および噴流拡散の現象と類似であると考えて、実験的に得られる流れの挙動より一つのモデルを作り、開水路急縮部における流れの特性を扱った。この結果、接近流の方向を与える定数および水路側壁の拘束効果を示す実験的パラメーター (Confine Parameter) によって、急縮部に形成されるはく離領域の性格が決定されることが明らかとなった。

1. 緒 言

水路や河川における各種水理構造物は、その近傍に断面急変部、とりわけ断面急縮部をともなうことが多く、従来ここを通る流れの遷移現象はそれぞれの目的に応じ経験的かつ実用的に解析されてきたが、この研究は開水路の急縮部を通る流れを急変流の代表的な問題としてとりあげ、系統的な実験によって、その水理学的解析法を一步前進せしめようとしたものである。

水路急縮部における水理学的性状に関する研究は、急縮部におけるエネルギー損失を最小にするための最適遷移条件を求めることに端を発し、主として管路の流れに関するものが多い。また一方、オリフィスや水門からの流出に関して、流量係数を求める立場から拘束のない領域における流れの収縮と拡大を取り扱ったものも少なくない。近年になってようやく開水路についても、その研究がなされるようになったが、これらはその目的および取り扱う流れの状態によって、つぎの2つに大別される。すなわち、(i) 急縮部を通過する射流の水面形状に関する研究^{1),2)}、(ii) 急縮部を通過する常流の水面形³⁾跡およびはく離領域の性状に関する研究^{3),4)}であるが、急縮部における局所的洗掘現象や非定常流の解析法に関する研究⁵⁾も並行して行なわれている。本研究は(ii)に属するものであるが、急縮部の上・下流に形成されるは

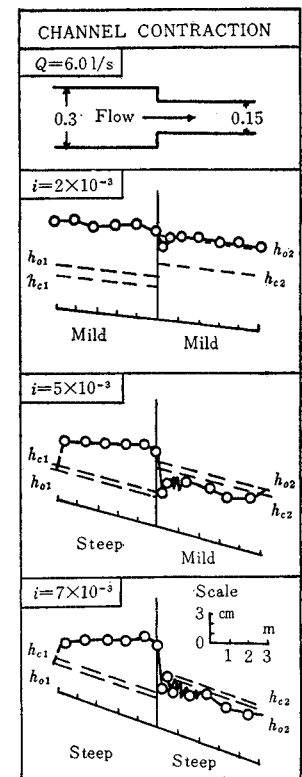
く離領域に着目して詳細な実験を行ない、とくにこれらと水路幅縮小比との関係を明らかにしようとしたものである。しかしながら、急縮部近傍の流れはきわめて複雑で、現在の水理実験技術によって詳細な計測を行なうことはむずかしく、何らかの形で流れの示す挙動をモデル化するとともに、その解析結果の実際問題への適用をはかることが望ましい。このような観点から、本文では、まず一次元運動量解析法によって遷移を分類し、それにとりなうエネルギー損失を推定するとともに、急縮部の上、下流に形成されるはく離領域の特性を示そうとするものである。

2. 開水路急縮部における流れの遷移現象

急縮部における流れの遷移現象は、水路幅縮小比・粗度・水路底勾配・流量・流れの状態および下流水深によって変化するが、与えられた水路の幾何学的形状および流量によって一義的に決定される限界水深を用いると、急縮部の場合と逆の関係となって流れの遷移状態を示す9種類の水路形式が考えられる⁶⁾。C. Jaeger⁷⁾は、上・下流における常流と射流の組み合わせによって4つの遷移形式を示しているが、急縮部近傍の水面形の挙動や流れの収縮および下流水深の影響などの局所的現象については、さらに詳細な検討を必要とする。

急縮部近傍の流れは流下方向および幅方向の急激な水位変化と同時に水路境界からはく離をともなう局所的に複雑な遷移水面形状となる。著者らは、各種の流量(4~30 l/sec)

図-1 Typical transition profiles through a sudden contraction.



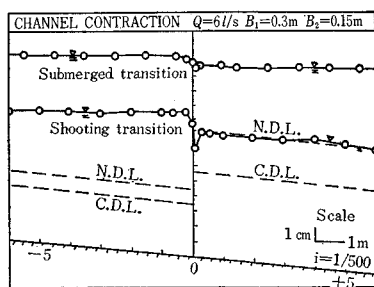
* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 京都大学研究生 土木工学専攻

と勾配 ($2 \sim 7 \times 10^{-3}$) において下流を等流水深にした場合の遷移水面形に関して実験を行なった。これらの結果から定性的につぎのようなことが明らかにされる。すなわち、実験範囲内では流量や勾配のいかにかわからず、急縮部の上流はせき上げ背水曲線となり、直下流では射流状態となって、それぞれの下流等流水深に接続する。また、下流の Froude 数がある値以上になると、交差波の不安定な波状水面が形成され、これが下流へかなり長い範囲にわたって伝ばする。いずれの場合にも、跳水位置や等流状態への回復位置は変化するが、遷移水面形状の本質的な性格は変わらない。図-1 は著者らの実験で得た遷移水面形を例示したものである。

さらに下流水深を等流水深からせき上げた場合について実験を行なうと、緩勾配開水路急縮部における流れの遷移形式は、急縮部の場合と同様に、臨界下流水深を境として急縮部に射流があらわれるもの(射流遷移)とすべて常流のもの(常流遷移)とに大別される。図-2 は著者らの実験によって得られた遷移水面形の一例を示したものである。なお、いわゆる不安定遷移の領域は急縮部における遷移の場合ほど明瞭ではなく、射流遷移から常流遷移への移行は比較的平滑に行なわれることが実験的にみとめられる。

図-2 Typical profiles of submerged and shooting transitions.



3. 緩勾配開水路の急縮部における遷移の一次元解析

(1) 急縮部における遷移

図-3 に示す急縮部をもつ緩勾配長方形断面水路の流れについて、断面 I と断面 II の間の運動量方程式および連続式は、それぞれ、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \lambda_1 \rho g B_1 h_1^2 + \rho B_1 h_1 \eta_1 u_1^2 + W \sin \theta \\ & - \frac{1}{2} \lambda_2 \rho g \cdot 2 \cdot \Delta B h_3 W^2 \\ & = \frac{1}{2} \lambda_2 \rho g B_2 h_2^2 + \rho B_2 h_2 \eta_2 u_2^2 C_c + F_f \dots (3.1) \end{aligned}$$

$$B_1 h_1 u_1 = C_c B_2 h_2 u_2 = B_2 h_4 u_4 \dots (3.2)$$

となる。ここに、 η, λ : それぞれ運動量補正係数、圧力分布係数、 W : 断面 I ~ II 間の流体の重量、 F_f : 境界面に働く表面摩擦抵抗、 ρ : 流体の密度、 g : 重力の加

速度、 h : 水深、 u : 平均流速、 B : 水路幅、 θ : 水路底勾配、 C_c : 収縮係数、なお添字 1, 2 はそれぞれ断面 I, II における値を表わす。いま簡単のため水路を緩勾配とすると、水の重量の影響は無視せられ、またこのような急縮部では表面摩擦抵抗が小さいと考えると、これらの両式からつぎの式(3.3)が得られる。

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + 2 \eta_1 \frac{u_1^2}{gh_1} - \lambda_3 (1 - \beta_*) \left(\frac{h_3 W}{h_1} \right)^2 \\ & = \lambda_2 \beta_* \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{2 \eta_2}{\beta_* C_c} \frac{u_1^2}{gh_1} \frac{1}{\left(\frac{h_2}{h_1} \right)} \dots (3.3) \end{aligned}$$

ここに、 $\beta_* (= B_2/B_1) < 1.0$: 水路幅縮小比である。

簡単のため、 $\eta_1 = 1.0, \lambda_1 = \lambda_3 = 1.0$ とし、 $h_3 W \doteq h_1, u_1^2/gh_1 = Fr_1^2, h_2/h_1 = \phi$ とおくと、

$$Fr_1^2 = \frac{\beta_* \phi (1 - \phi^2)}{2 \left(\frac{\eta_2}{\beta_* C_c} - \phi \right)}, \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} > \phi > 0 \right) \dots (3.4)$$

さらに $\eta_2 = \lambda_2 = 1.0$ とおくと、

$$Fr_1^2 = \frac{\beta_* \phi (1 - \phi^2)}{2 \left(\frac{1}{\beta_* C_c} - \phi \right)}, (1 > \phi > 0) \dots (3.5)$$

が得られる。これは β_* と C_c をパラメーターとする双曲線群となる。同様にして断面 I と断面 IV の間には式(3.6)が得られる。

$$Fr_1^2 = \frac{\beta_* \psi (1 - \psi^2)}{2 \left(\frac{1}{\beta_*} - \psi \right)}, (1 > \psi > 0) \dots (3.6)$$

ここに、 Fr_1 : 断面 I の Froude 数、 $\psi = h_4/h_1$ である。

(2) 臨界下流水深

急縮部近傍の局所的遷移現象に対する下流水深の影響を検討するため、式(3.5)を下流の水理条件を用いて書きなおすと、

$$\begin{aligned} & f(\phi) = 2 C_c^2 \beta_* Fr_2^2 \phi^3 - (1 + 2 C_c Fr_2^2) \phi^2 + 1 = 0, \\ & (1 > \phi > 0) \dots (3.7) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $Fr_2 = u_2/\sqrt{gh_2}$ は断面 II の水深に対する Froude 数である。いま式(3.7)の根を ϕ_1, ϕ_2 および ϕ_3 とすると、3次方程式の根の一般的性質より、一根 ϕ_3 は負の実根となり、物理的意味を持たない。緩勾配水路において問題となるのは他の2根 ϕ_1, ϕ_2 がともに正根の場合である。いま $\phi_1 > \phi_2 > 0$ とすれば、 ϕ_1 は急勾配水路における遷移、 ϕ_2 は緩勾配水路における遷移に対応する。この ϕ_2 は Fr_2 の変化に対して連続的に求めることができるから、式(3.7)において $Fr_2 = 1.0$ とおくと、臨界下流水深は与えられた C_c, β_* の値について

図-3 Transition profile through a sudden contraction.

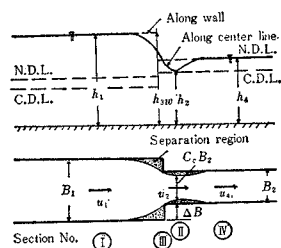
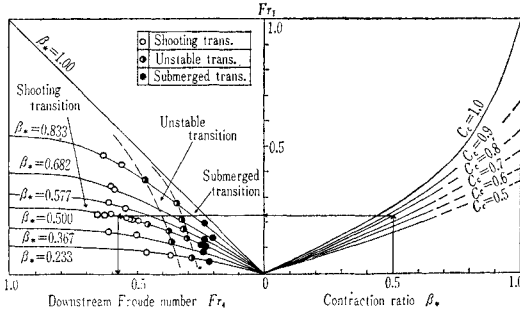


図-4 Critical downstream condition.



て求められ、式(3.6)を用いて下流の Froude 数 $F_{r2} = u_2/\sqrt{gh_2}$ が求められる。図-4 の実線は $F_{r2}=1.0$ においてこの手順を図式化したものである。しかしながらここで問題となるのはつぎの2点である。第一に、 $F_{r2}=1.0$ となる場合には急縮部近傍の流れは限界流に近い不安定な状態にあるため、 $F_{r2}=1.0$ においても実際の臨界下流条件を与えているとはいえない。第二に、急縮部の場合には収縮係数という二次元的な要素を含んでいるため、急拡部の場合のように、一次元的な遷移水面形によって常流遷移および射流遷移と不安定遷移との臨界下流条件を一義的に求めることが困難である。一般に、収縮係数 C_c は水路幅縮小比 β_* や流れの状態、とくに Froude 数によってそれぞれ異なった値を示すと考えられるが、この点については後節において述べる。

(3) エネルギー損失係数

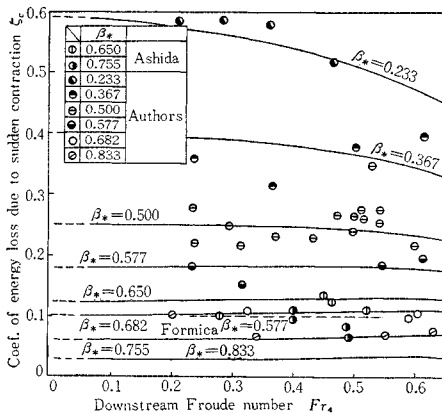
エネルギー損失係数 ζ_c は、急拡部における場合と同様な手法を用いて式(3.9)のように表わされる⁶⁾。

$$h_e = \zeta_c \frac{u_1^2}{2g} \dots\dots\dots(3.8)$$

$$\zeta_c = \frac{\alpha_1 \beta_*^2 F_{r1}^2 \psi^2 - (2 + \alpha_1 F_{r1}^2) \psi + 2}{F_{r1}^2 \psi} \dots\dots(3.9)$$

ここに、 h_e : 損失水頭、 α_1, α_2 はそれぞれ断面 I, IV におけるエネルギー補正係数である。急縮部の流れに対しては、射流遷移から常流遷移への移行が $F_{r2}=1.0$ を境

図-5 Coefficient of energy loss due to sudden contraction.



として連続的に行なわれるため、両者に対してそのまま式(3.9)が適用できる。図-5 の実線は式(3.6)、(3.8)および(3.9)を用いて ζ_c を計算したものであるが、簡単のため、エネルギー補正係数 α_1, α_2 をともに1.0としている。図-5 から、 ζ_c は下流 Froude 数 F_{r2} よりもむしろ水路幅縮小比 β_* によって左右され、 β_* が増大するにつれて ζ_c は減少することがわかる。

(4) 実験結果と考察

前節で述べた遷移の分類方法および一次元解析法の妥当性とその限界とを検討するために、一連の実験を行なった。

a) 実験装置および実験方法

実験水路は長さ14m(中央に急縮部を設置)、深さ20cm、水路幅は $B_1=20\sim 30$ cm および $B_2=7\sim 28$ cm で、水路幅縮小比は7種類 ($\beta_*=0.233\sim 0.933$) とし、Manning の粗度係数が $n=0.011$ (m-sec 単位) の長方形断面水路である。その他は急拡部に対して行なわれたものと同様である⁶⁾。

b) 急縮部近傍における流速分布

前節に示した取り扱いにおいては、エネルギー補正係数および運動量補正係数を簡単のため1.0として計算しているが、実際の流れでは1.0より大きく、収縮断面で最高値を示すようである。図-6 は本実験(常流遷移)の一例を示したものであるが、すべての実験結果からも図-6 とほぼ同様な分布が得られている。ここに、 x は急縮断面を原点とする流下方向の距離である。図-7 は中心線流速の流れ方向の変化を示すものであるが、この図から中心線流速の変化ははく

図-6 Variation of the energy and momentum coefficients near sudden contraction.

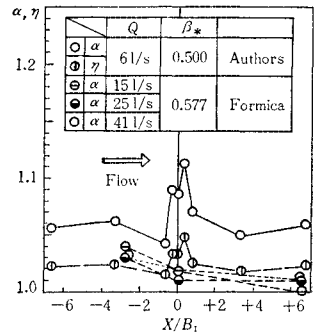
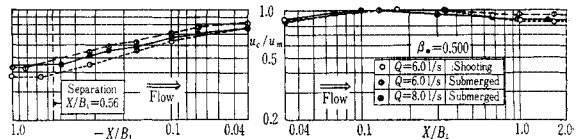


図-7 Variation of the center Velocity.

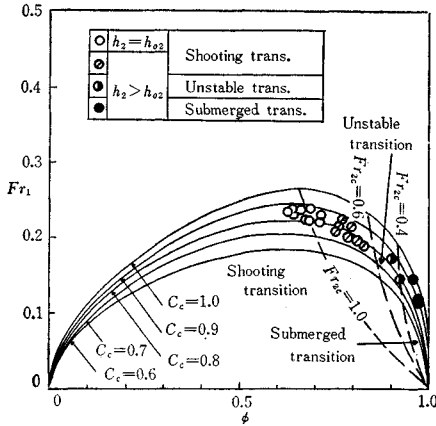


離領域の存在にはほぼ対応し、収縮断面の下流には中心線流速が保持される Potential core のような領域の存在が明らかにされる。ここに、 u_c : 中心線流速、 u_m : 収縮断面における最大流速である。ただし、この場合の実測値は断面平均流速に近いと考えられる水路底より水深の60% のところの流速を代表値として示した。

c) 遷移水面形

急縮部の遷移水面形はすでに図-2 にその一例を示したが、一連の実験結果を前節の一次元解析法によって整理すると図-8 のようになり、つぎ

図-8 Relation between F_{r1} and ϕ .



のようなことが明らかになる。すなわち、(i) 下流水路が十分長い場合にはその水深は等流水深 h_{02} に漸近し、前節で述べたように、この場合には射流遷移となって F_{r1} と ϕ との関係は式 (3.5) にしたがう。(ii) 下流水深を徐々にせき上げて F_{r2} を小さくしていくと、式 (3.5) にしたがって ϕ は増大し F_{r1} は減少する。急縮部の流れでは、射流遷移から常流遷移への移行は $F_{r2} = 1.0$ を境として連続的に行なわれ、不安定遷移の領域を明確に求めることは困難であるが、実験によれば常流遷移流に移る臨界下流 Froude 数 F_{r2c} は 1.0 より小さく、($\beta_* = 0.500$ の場合には $F_{r2c} = 0.4 \sim 0.6$)、一次元解析によって臨界水流条件を求める場合には、このような小さい F_{r2c} の値を基準にする必要があり、それぞれの β_* についてあらかじめ実験によって評価しなければならない。図-4 (左) には実験によって得られた臨界下流条件が破線で示されている。したがって図-4 (右) は $F_{r2c} = 1.0$ ではなく、実験によって得られた F_{r2c} を基礎にして計算しなおす必要があることはいうまでもない。(iii) 前にも述べたように、式 (3.5) における C_c の決定は重要な問題であるが、この場合には $C_c = 0.8 \sim 0.9$ で後に述べる実験的事実とよく一致している。

d) エネルギー損失係数 本実験によって得られた結果および従来の実験結果は、図-5 にプロットしたとおりである。この場合、損失水頭 h_e は急縮部の場合と同様に、上下流の比エネルギー線を急縮断面まで延長して評価したものである。従来の実験によれば、急縮部におけるエネルギー損失係数 ζ_c は平均して 0.1 と評価されているが、本実験によって得られた結果は、ばらついてはいるが、 β_* が増大するほど ζ_c が減少するという式 (3.9) によって与えられる理論値が示す一般的傾向を満足している。

4. はく離領域の性状

(1) 概 説

急縮部における流れの最大の特徴は、水路側壁から流

れがはく離することである。急縮部のはく離領域は急縮断面の上流に形成されるもの(上流側はく離領域)とその下流に形成されるもの(下流側はく離領域)から成り立っており、とくに下流側はく離領域については実際上の要求からかなりの研究がなされている^{4), 8)}。しかしながら、上流側はく離領域に関する研究は数少なく、未解決の問題が多く残されている。ここでは実験によって得られる流れの挙動から一つのモデルを作り、常流遷移流に関して有限幅水路内に形成されるはく離領域の形状および大きさに求め、さらに水路幅縮小比と収縮係数との関係を与える一つの方法を示す。

図-9 Separation region formed at sudden contraction.

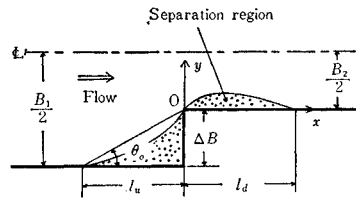


図-9 は開水路急縮部に形成されるはく離領域を模型的に示したものである。収縮断面において射流が生ずるいわゆる射流遷移では、流れ方向および水路横断方向の水位変化がいちじるしく、はく離領域の測定が困難である。常流遷移ではこのような水位変化はきわめて小さく、不連続流に対する二次元ポテンシャル流れとしての解析が有効な手段の一つと考えられる。従来、不連続流の研究には等角写像の方法によって半無限領域内における物体のまわりの流れを対称とするものが多いが、開水路急縮部では粘性・乱れ・水位変化などの影響およびはく離領域に対する水路側壁による拘束の影響を考慮しなければならない。しかしながら、前にも述べたように、従来の研究は水路側壁の影響を無視したものが多いのでここではとくに水路側壁の影響を考慮した有限幅水路内のはく離領域に関して述べることにする。

(2) 上流側はく離領域と接近角定数

上流側はく離領域の形状および大きさを評価することは、急縮断面における接近流の方向を知るため、また急縮部の上流に対する影響範囲を知るためにも重要な問題である。Lighthill は自由流線上の流速を仮定することによって、無限領域内におかれた T 型不連続部上流に形成されるはく離領域に関して解析を行なった⁹⁾。この結果から、急縮部においても β_* が増大するにつれて、 $4B/lu$ も減少することが推測される。下流側水路における縮流の現象は流れの慣性によるものであるから、急縮断面における接近流の方向を与えるために図-9 に示す θ_0 の値、すなわち、

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{4B}{l_u} \dots \dots \dots (4.1)$$

が一つの重要な指標として考えられる。

一方境界層のはく離を支配する無次元量は、一般に式(4.2)に示す Shape factor A で与えられている¹⁰⁾。

$$A = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_0}{dx} \text{ or } = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_0}{dx} \dots\dots\dots(4.2)$$

ここに、 δ : 境界層の厚さ、 θ : 運動量厚、 ν : 動粘性係数、 u_0 : 境界層の外側の流速、 x : 流下方向の座標である。このようにはく離点の位置は水路境界面の粗度、圧力変化、流れの Froude 数および Reynolds 数によって決定されると考えられるが、急縮部近傍におけるこれらの間の関係を解析的に導くことは困難であるから、著者らは実験によってはく離点の位置を測定した。しかしながら、実験水路の規模が小さく、はく離領域内の流れの詳細な運動機構や粗度ならびに圧力変化の影響に関しては系統的な実験による検討が困難で、ここでは主としてはく離領域の形状・大きさと水路幅縮小比・Froude 数および Reynolds 数との関係を見出すにとどまった。

はく離領域の測定は主として写真撮影によって行ない、糸片の運動を観測する方法が補助手段として用いられた。Flow visualization tracer にはキシレン・四塩化炭素・酸化鉛・アルミ粉の混合液が用いられた。図-10 は一定の水路幅縮小比 ($\beta_* = 0.500$) について、Froude 数を変えて行なった実験結果の一例を示すもので、いずれの場合もはく離領域の形状・大きさは Froude 数の変化に対して大差はなく、とくに常流遷移の範囲内では、Froude 数にほぼ無関係であった。この事実は下流側はく離領域に対してもみとめられ、従来の研究⁹⁾でも指摘されているところである。図-11 における白点は各種の水路幅縮小比における θ_0 の実測値をプロットしたものである。この図から、 θ_0 と β_* との間にはほぼ直線的な関係が成り立ち式(4.3)で表わされることがわかる。

図-10 Form of upstream separation region.

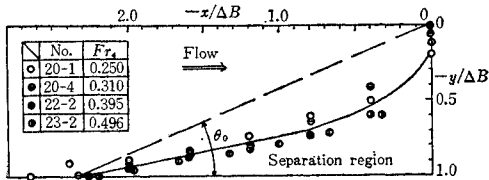
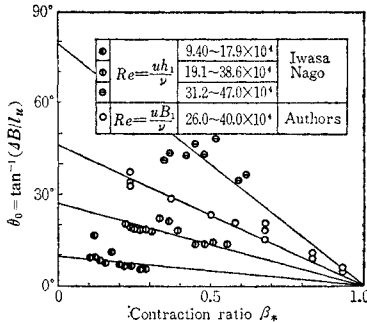


図-11 Relation between θ_0 and β_* .



$$\theta_0 = A(1 - \beta_*) \dots\dots\dots(4.3)$$

ここで、比例定数 A は水路の規模に関するものと考えられるが、上流側はく離領域に関する実測値は数少なく、比例定数 A を一般的に決定することは困難である。図-11 における他の実測値は、鉛直水門の上流側に形成されるはく離領域について求められたものである¹¹⁾。この場合は開水路急縮部の場合と異なり、重力の影響を無視できない鉛直方向の急縮部であって、水平方向の急縮部の場合と比較することは妥当ではないが、参考のためこれらの資料を用いると、比例定数 A は図-12 のようになって、実験範囲について平的した Reynolds 数 Re_m を用いると、その 2 乗に比例していることがわかる。

図-12 Relation between A and Re_m .

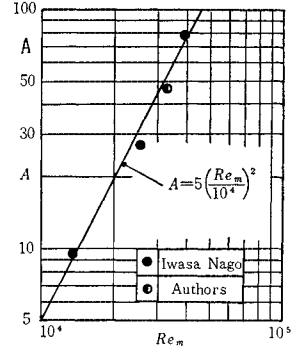


図-13 Normalized form of upstream separation region.

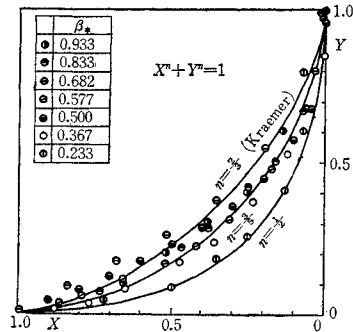


図-13 ははく離領域の形状を規格化して示したものである。この図から、上流側はく離領域の形状は、式(4.4)で示されることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} Y^n + Y^n &= 1, & (n : \text{const.}) \\ X &= -x/l_u, & (l_u > 0) \\ Y &= (\Delta B + y)/\Delta B, & (\Delta B > 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.4)$$

Kraemer¹²⁾は半無限領域内におかれた直角の凹部に形成されるはく離領域について $n = 2/3$ を与えているが、開水路急縮部の上流に形成されるはく離領域では $n = 1/2 \sim 2/3$ の間に分布しており、 β_* が減少すると n も減少する傾向がみられる。図-9 において 0 点付近における流れの方向は、式(4.4)からもわかるように、局所的には $(dY/dX)_{X=0} = \infty$ となり、流下方向に直角に接近しているが、上流側はく離領域内の運動はきわめて複雑であり、下流側水路における流れの収縮を支配する接近角はこれよりも小さいある角度 θ_a で代表されるものと考

えられる。いま、これを式 (4.1) と同様に、

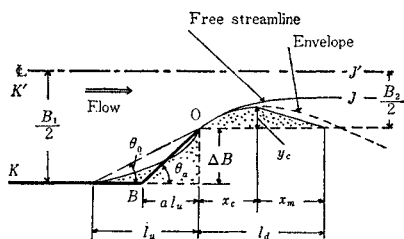
$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{dB}{al_u} \dots \dots \dots (4.5)$$

とあらわし、 θ_a を接近角、 a を接近角定数と呼ぶことにする。かりに a が与えられると、 l_u は式 (4.3) から与えられ、式 (4.5) によって接近角 θ_a が求められる。 a の評価については後節においてのべてる。

(3) 下流側はく離領域と流れのモデル化

急縮部における流れの一般的性状は、3. において述べたような簡単な仮定にもとづく一次元運動量解析によってかなり説明されることが明らかとなったが、いずれの場合も収縮係数と水路幅縮小比および流れの状態とくに Froude 数との関係を合理的に導くことが最も重要な課題であることがわかる。そのため、下流側はく離領域に関する研究は数多く、いずれの場合もこのような不連続流を二次元ポテンシャル流れとして取り扱い等角写像などの方法を用いている。芦田博士は粘性や乱れの影響を考慮して自由流線上に一定角度で発達する拡散領域を考へて急縮部における流れをモデル化し、実際のはく離領域を求める方法を与えるとともに、半無限領域からの縮流に関して実測値との比較検討を行なった⁴⁾。また F.H. Abernathy は無限領域内におかれた傾斜板の後方に形成される後流域について風洞実験を行ない、自由流線を中心に形成される Free-vortex layer を実測して、実際のはく離領域と自由流線とのずれを比較した¹³⁾。ここではとくに有限幅水路内ではく離に関して、上流側水路側壁の影響を接近角 θ_a として導入し、さらに下流側水路壁の影響は収縮した流束が下流側水路内で拡大する一つの急拡部とみなしてモデル化し、下流側はく離領域の形状および長さについて考察を行なう。すなわち、急縮部における流れの基本的モデルとして、図-14 に示すような一定の水路幅縮小比をもつ急縮部から自由流線を考へ、はく離領域は自由流線上の各点から発達する混合領域の外縁で作られる包絡線と考へる方法を用いた。

図-14 Flow model assumed in the analysis.



(4) 自由流線の方程式

図-14 に示した流れモデルを物理平面： z -plane とし、自由流線 OJ の方程式を求める。この場合は中心線について対称形であるから下半分について考へてさしつかえない。まず式 (4.6) によって与えられる複素変数 ζ を用いる。

$$\zeta = \frac{dz}{aw} = \frac{1}{q} e^{i\theta} \dots \dots \dots (4.6)$$

ここに、 $w = \phi + i\psi$: 複素ポテンシャル、 $z = x + iy$ 、 q : 合成速度の絶対値および θ : 方向角度である。自由流線 OJ に沿っては、Bernoulli の定理によって q が一定であるから、簡単のため

これを 1.0 とする。つぎに、式 (4.7) で与えられる速度平面： Ω -plane を考へると、図-15(a) のようになる。

$$\Omega = \ln \zeta = \ln \frac{1}{q} + i\theta \dots \dots \dots (4.7)$$

Ω -plane の内部を図-15 (b) の t -plane の上半分に写像するため、Schwarz-Christoffel の変換により Ω と t との関係と求めると、各点の対応を図-15 (b) のようにとり、点 O で $\Omega = i\theta_a$ 、 J, J' で $\Omega = 0$ なる条件を用いて、式 (4.8) が得られる¹⁴⁾。

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\theta_a}{\pi} \frac{\sqrt{b(b-1)}}{(t-b)\sqrt{t(t-1)}} \dots \dots \dots (4.8)$$

写像関数は式 (4.8) を積分してつぎのようになる。

$$\zeta^{\pi/2\theta_a} = \frac{\sqrt{(b-1)t} + \sqrt{b(t-1)}}{\sqrt{t-b}} \dots \dots \dots (4.9)$$

ここで、自由流線 OJ に沿っては $1 > t > 0$ で $q=1$ であるから、

$$e^{i\frac{\pi}{2\theta_a}\theta} = \sqrt{\frac{b(1-t)}{b-t}} + i\sqrt{\frac{(b-1)t}{b-t}} \dots \dots \dots (4.10)$$

中心線 $K'J'$ に沿っては $0 > t > -\infty$ で $\theta=0$ あるから、

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{\pi/2\theta_a} = \sqrt{\frac{(b-1)t}{t-b}} + \sqrt{\frac{b(t-1)}{t-b}} \dots \dots \dots (4.11)$$

が得られる。つぎに複素ポテンシャル面： w -plane を考へると図-15 (c) のようになり、 w -plane から t -plane への変換は Ω の場合と同様にして次式のようになる。

$$\frac{dw}{dt} = \frac{m}{\pi} \frac{k}{(t-k)t} \dots \dots \dots (4.12)$$

O 点を基準にして式 (4.12) を積分し $k = \infty$ とおくと、

$$e^{\frac{w}{m}\pi} = \frac{1}{t} \dots \dots \dots (4.13)$$

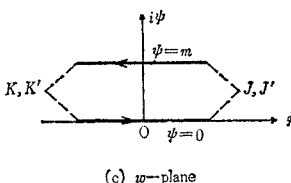
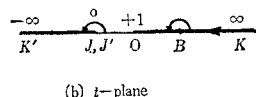
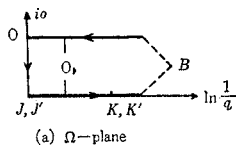
となる。自由流線の O 点からの長さを s とすれば、自由流線上で $\psi=0$ とおいているから、

$$s = \phi = w = \frac{m}{\pi} \ln \frac{1}{t} \dots \dots \dots (4.14)$$

が得られる。流れの J における幅を c とすれば、そこで

図-15

- (a) Ω -plane
- (b) t -plane
- (c) w -plane



は $q=1$ であるから $m=c$ となり、連続の条件から、

$$m = \frac{1}{2} B_1 u_1 \dots\dots\dots(4.15)$$

となる。ここに、 u_1 : K における流速 (接近流速)、 B_1 : 上流側水路幅である。また自由流線上においては、式 (4.10) から、

$$\cos \frac{\pi}{2\theta_a} \theta = \sqrt{\frac{b(1-t)}{b-t}} \dots\dots\dots(4.16)$$

とあらわされるから、式 (4.14)~(4.16) を用いて自由流線の方程式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_f}{B_1} &= \frac{u_1}{2\theta_a} (1-b) \frac{\cot \frac{\pi}{2\theta_a} \theta}{b - \cos^2 \frac{\pi}{2\theta_a} \theta} \cos \theta d\theta \\ \frac{dy_f}{B_1} &= \frac{u_1}{2\theta_a} (1-b) \frac{\cot \frac{\pi}{2\theta_a} \theta}{b - \cos^2 \frac{\pi}{2\theta_a} \theta} \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.17)$$

(5) 水路幅縮小比と接近流速との関係

式 (4.17) において b と u_1 は未知数であるから、これらを水路幅縮小比 β_* と接近角 θ_a によって表わす必要がある。 K, K' においては流速は u_1 であり $t = \pm \infty$ であるから、式 (4.11) から、

$$u_1^{\pi/2\theta_a} = \sqrt{b} - \sqrt{b-1} \dots\dots\dots(4.18)$$

が得られる。また $\overline{BO} (b > t > 1)$ に沿って $\theta = \theta_a$ であり $\psi = 0$ とおいているから、式 (4.9) から次式が得られる。

$$dx = \frac{m}{\pi} \left(\frac{\sqrt{(b-1)t} + \sqrt{b(t-1)}}{\sqrt{b-t}} \right)^{2\theta_a/\pi} \frac{1}{t} \cos \theta_a dt \dots\dots\dots(4.19)$$

これを t について 1 から b まで積分すると、 x は $-\overline{BO} \cos \theta_a$ となる。 \overline{BO} は水路の幾何学的条件から、

$$\overline{BO} = \frac{1}{2} B_1 (1 - \beta_*) \operatorname{cosec} \theta_a \dots\dots\dots(4.20)$$

で表わされ、接近流速 u_1 は次式で示される。

$$u_1 = \frac{\pi(1-\beta_*)\operatorname{cosec} \theta_a}{\int_1^b \frac{1}{t} \left(\frac{\sqrt{(b-1)t} + \sqrt{b(t-1)}}{\sqrt{b-t}} \right)^{2\theta_a/\pi} dt} \dots\dots\dots(4.21)$$

したがって、式 (4.18) と (4.21) から u_1 と b の値が β_* と θ_a の関数として表わされることになる。とくに、 $\theta_a = \pi/2$ の場合には、 b と u_1 の値は容易に求められてつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_* &= u_1 + \frac{2}{\pi} (1 - u_1^2) \tan^{-1} u_1 \\ b &= \frac{(1 + u_1^2)^2}{4u_1^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.22)$$

また自由流線の方程式は式 (4.17) にこれらの関係を代入してつぎのように表わされ、Betz-Petersohn によって得られた解に一致する⁽⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_f}{B_1} &= \frac{u_1}{2\pi} \\ &\times \left\{ \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_1} + u_1 \right) \ln \frac{1 + u_1^2 + 2u_1 \cos \theta}{1 + u_1^2 - 2u_1 \cos \theta} \right\} \\ \frac{y_f}{B_1} &= \frac{u_1}{2\pi} \left(\frac{1}{u_1} - u_1 \right) \\ &\times \left\{ \tan^{-1} \frac{2u_1}{1 - u_1^2} - \tan^{-1} \frac{2u_1}{1 - u_1^2} \sin \theta \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.23)$$

(6) 収縮係数と下流側はく離領域の長さ

(3) において述べたように、本節でははく離領域が自由流線上に発達する混合領域の外縁で作られる包絡線であたえられると考える一つの流れモデルによって、収縮係数と水路幅縮小比との関係を求める。自由流線上の各点から発達する混合領域については、自由乱れの場におけると同様につぎの関係を用いる。

$$\bar{b} = \frac{1}{\sigma} \bar{s} \dots\dots\dots(4.24)$$

ここに、 \bar{b} : 混合領域の幅、 \bar{s} : 自由流線上の各点における接線に沿う距離、 σ : 定数 (confine parameter) である。したがって拡大角 α

図-16 Definition of α .

はつぎのようになる。

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2\sigma} \dots\dots\dots(4.25)$$

図-16 は以上の関係を示したもので、これから混合領域外縁の方程式は式 (4.26) のようになる。

$$\frac{y - y_f}{x - x_f} = \tan(\theta - \alpha), \quad \left(\begin{matrix} \theta_a > \theta > 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix} \right) \dots\dots\dots(4.26)$$

またその包絡線は $dx/d\theta = 0$ を満足する (x, y) 座標として、式 (4.27) のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x &= x_f + \cos(\theta - \alpha) \left\{ \frac{dx_f}{d\theta} \sin(\theta - \alpha) - \frac{dy_f}{d\theta} \cos(\theta - \alpha) \right\} \\ y &= y_f + \sin(\theta - \alpha) \left\{ \frac{dx_f}{d\theta} \sin(\theta - \alpha) - \frac{dy_f}{d\theta} \cos(\theta - \alpha) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.27)$$

ここに、 $dx_f/d\theta, dy_f/d\theta$ は式 (4.17) によって与えられる。またこの場合、 $dx^2/d\theta^2 > 0$ の条件を満足する必要があることはいうまでもない。つぎにはく離領域の幅が最大となる点、すなわち最も流れが収縮する点の座標 (x_c, y_c) は、式 (4.27) において $\theta = \alpha$ として求められる。したがって、収縮係数 C_c はつぎのように表わされる。

$$C_c = 1 - \frac{2}{\beta_*} \left(\frac{y_c}{B_1} \right) \dots\dots\dots(4.28)$$

図-17 の実線は、収縮断面までは下流側水路側壁の拘束効果が比較的小さいと仮定して $\sigma = 3.33$ を使い、接近角定数 α をパラメーターとして β_* と C_c との関係を実験的に計算したものである。

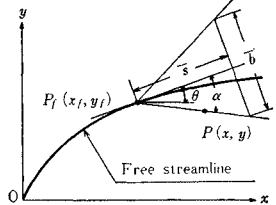
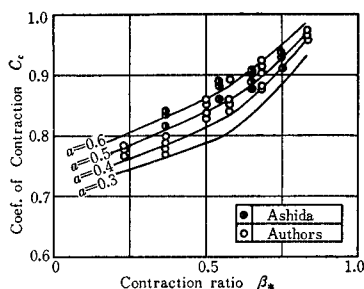


図-17 Relation between C_c and β_* .



はく離領域の長さは $(x)_{y=0}$ として推定されるが、実際の流れでは下流側水路側壁によって流れの拡大が拘束される一方、Coanda 効果¹⁶⁾によって流れが側壁に引き寄せられる傾向が考えられ、このような場合にはパラメーター σ の個々の場合に対する評価が困難であるから流れの拡大という段階は一つの急拡大部として取り扱うほうがより实际的であると考えられる。いま収縮断面 x_c より下流を水路幅拡大比 $1/C_c$ の急拡大部と考えると、それより下流のはく離領域の平均的長さ x_m と拡大比との間にはつぎの関係が得られている⁹⁾。

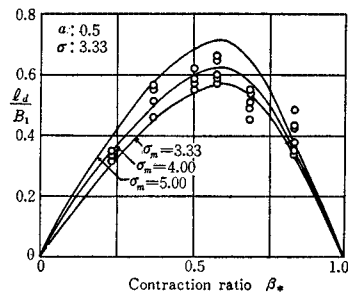
$$\frac{x_m}{B_1} = \frac{1}{2(1-c_2)} \sigma_m \beta_* (1-C_c) \dots\dots\dots(4.29)$$

ここに、 c_2 : 混合領域内の流速分布によって決定される定数、 σ_m : 平均的拘束係数とも呼ぶべき実験定数で、式(4.24)と同様に混合領域の幅の拡大に関する比例定数である。式(4.24)における σ の値は従来から実験的に求められており、 $\sigma = 2.00 \sim 3.33$ が与えられている。これはもちろん自由乱れの場合であり、側壁の拘束がある場合には σ はさらに大きい値となることが実験的に求められている。また σ_m については急拡大部に対して $\sigma_m = 4.0 \sim 6.0$ が得られている。このようにして下流側はく離領域の長さ l_d は次式で与えられる。

$$l_d = x_c + x_m \dots\dots\dots(4.30)$$

図-18 の実線は σ_m をパラメーターとして式(4.30)を計算したものである。

図-18 Length of downstream separation region.



(7) 実験結果とその考察

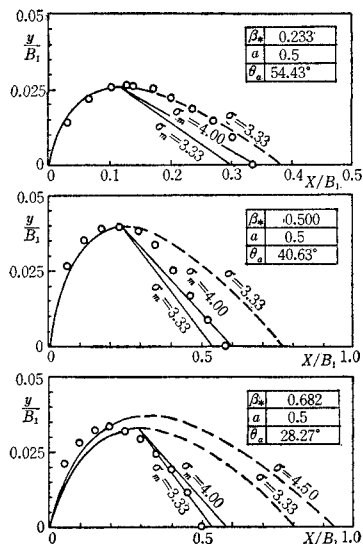
はく離領域の境界には、瞬間的に流速が 0 になる点を結びいわゆる Instant stop boundary と平均流速が 0 と

なる点を結ぶ Separation boundary とが考えられる¹⁷⁾。本実験では主として写真撮影を行ない、渦の中心を連ねた線をもってはく離領域の境界とする前者の定義によった。収縮係数の実測値がプロットされている 図-17 によると、実測値は大きくばらついているが、 β_* が増大するにつれて C_c も増大する傾向を示しており、式(4.28)はこの傾向をよく説明していることがわかる。またこの図から接近角定数 α は $0.4 \sim 0.6$ (平均 0.5) の範囲にあると評価される。

図-18 には下流側はく離領域の長さが示されているが、実測値は式(4.30)の示す傾向を満足しており、平均的拘束係数 σ_m の値は $3.33 \sim 5.00$ の範囲にあることがわかる。 β_* が比較的大きい場合には理論値と実測値が大きくずれているが、これはつぎの理由によるものと考えられる。すなわち、このような場合にははく離領域自体が小さく、その下流端を決定することが困難であって、測定誤差が大きい。またはく離領域が小さいため側壁による拘束効果が大きく、 x_c を求める際に用いた自由乱れの場合に対する $\sigma = 3.33$ の仮定、さらには接近角定数 α を β_* によらず一定とした仮定など流れモデルそのものの仮定が、もはや妥当性を失うためと思われる。実測値のばらつきは、前節までに示した方法において Froude 数の影響を無視したことにも起因すると考えられるが、本実験の範囲内では Froude 数による系統的な差異は認められなかった。

図-19 は流れモデルから得られるはく離領域の大きさを実際のはく離領域の形とを比較した例で、図中の実線は式(4.25)、(4.26) および (4.29) において $\sigma = 3.33$ 、 $\sigma_m = 3.33$ および 4.0 として計算された理論値である。この図から明らかなように、収縮係数およびはく離領域の長さに関して理論値はほぼ実測値を説明し得る

図-19 Form of downstream separation region.



が、はく離領域の形状そのものを与えるには不十分である。しかしながら、上に示した方法ははく離領域の大きさと水路幅縮小比との関係を求めるという実用的な立場からみて、一つの有用な方法であると考えられる。

5. 結 言

本研究は、水路幅が急激に縮小する開水路の遷移現象について、前半ではとくに遷移の分類、遷移水面形状およびエネルギー損失を一次元解析によって明らかにし、後半では常流遷移流に対して実験的に得られた一つのモデルを作り、接近角定数と拘束係数を導入することによって、急縮部近傍に形成されるはく離領域の大きさと水路幅縮小比との関係を求め、実験的に検討を加えた。

その結果、簡単な仮定にもとづく一次元運動量解析と二次元ポテンシャル流れとしての取り扱いとによって、急縮部における遷移流の水理学的特性の概略が説明されることが明らかにされた。しかしながら、本研究は急縮部遷移流のもつ水理学的特性に関する研究の第一段階であり、臨界下流条件の詳細な検討、形状損失と摩擦損失の分離、上流側はく離点の推定、はく離領域の大きさに対する Froude 数の影響など、今後さらに理論的実験的検討を加え、急縮部の設計に合理的指針を与えるよう努力すべきであると考えている。

最後に、本研究を遂行するにあたり終始有益な助言をいただいた岩佐義朗教授ならびに協力をいただいた大学院学生久保田和弘君、花村哲也君に厚く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) Ippen, A.T. and Dawson, J.H. : Design of channel contraction, Trans. of ASCE, Vol. 116, 1951.
- 2) Engelund, F. and Munch-Pertersen, J. : Ecoulement permanent dans les canaux convergents et divergents, La Houille Blanche, Aout, 1953.
- 3) Formica, G. : Esperienze preliminari sulle perdite di carico nei canali, dovute a cambiamenti di sezione, L'Energia Elettrica, Vol. 32, 1955.
- 4) 芦田和男 : 河川改修に伴う断面急変部の水理とその適用に関する研究, 学位論文, 昭和 36 年 7 月.
- 5) 秋元 保・丸岡 計 : 開水路の断面変化部における段波の水理解析, 土木学会第 21 回年次学術講演会講演概要, 昭和 41 年 5 月.
- 6) 石原藤次郎・志方俊之 : 開水路急拡部の水理学的性状に関する研究, 土木学会論文集第 128 号, 昭和 41 年 4 月
- 7) Jeager, C. : Engineering Fluid Mechanics, Blackie & Sons, London, 1956.
- 8) 秋草 勲・吉川秀夫・坂上義次郎・芦田和男・土屋昭彦 : 水制に関する研究, 土木研究所報告第 107 号の 6, 昭和 36 年 10 月.
- 9) Lighthill, M.J. : On boundary layers and upstream influence, Proceeding of The Royal Society, Series A, 217, 1953.
- 10) Schlichting, H. : Boundary layer theory, translated from the German by J. Kestin, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, 1960.
- 11) 岩佐義朗・名合宏之 : 水平床上に設置された鉛直水門の流出機構について, 土木学会関西支部昭和 40 年度学術講演会講演概要, 昭和 40 年 11 月.
- 12) Kraemer, K. : Die Potentialströmung mit Towassen an einen geknickten Wand, Ingenieur-Archiv, XXXIII Band, 1963.
- 13) Abernathy, F.H. : Flow over an inclined plate, Trans. of ASME, Sept. 1962.
- 14) 佐々木達次郎 : 等角写像の応用, 富山房, 昭和 14 年.
- 15) Betz A. & Petersohn : Anwendung der Theorie der freien Strahlen, Ingenieur-Archiv, II Band, 1931.
- 16) Newman, B.G. : The deflection of plane jets by adjacent boundaries-Coanda effect, Boundary layer and flow control, London Pergamon Press, 1963.
- 17) Harold Tufts : Flow expansion and pressure recovery in fluid, Proceedings of ASCE, Vol. 80, 1954.

(1966. 8. 2・受付)