1次化連立式による新管網解法とその応用*

NETWORK ANALYSIS BY LINEARIZED SIMULTANEOUS EQUATIONS

合　田　　健**・雄　倉　幸　昭***
By Takeshi Goda and Yukiaki Ogura

1. まえがき

管網解法については，Hardy-Cross 法が発表されてから 30 年を経過し，この間多くの研究者がたずさわりいろいろの改良法[1),2),3)] が考案されているが，現状では未知数の数だけの高次方程式群を連立させる数学的解析法を除くと，いずれも流出入条件および管路抵抗係数を一定とした特殊の場合しか解けない。しかし，実際の配水管網では,たとえば配水池が互いに離れて2池以上あり，したがって流入点も2カ所以上となり，しかもそれらの水位が最初から決められている場合が多い。このような場合の計算については発表論文も見あたらず，今までは技術的なカンにより流入点間に仮想境界線を引き，流入点が1カ所の管網に分けて解いていたが，理論的根拠はなく，何らかの新解法が考案されなければならない。ここではこれらの場合をも対象とし，また管径の決定あるいは路線の選定といった管網計画法へのアプローチに重点をおき，かつ技術的経験あるいはカンを必要とする仮定流量を用いなくてもよい一般解法として，多元高次方程式を1次化して直接解く解法を考案した。

2. 1次化基本式の誘導

一般に管網計算に際しては，つぎのような方程式群が生じる。

1節点につき節点均衡式

$$\sum^{j} q_j + Q_0 - Q_n = 0$$

(節点への流入量を正，流出量を負とする。以下同様)

1閉管路につき圧力平衡式

$$\sum^{i} h_i = 0$$

(流れの右まわりを正，左まわりを負とする。以下同様)

ここに,

$$h_i = r_i q_i^{1.85}$$

$$r_i = 10.666\, C_i^{-1.85} D_i^{-4.87} l_i$$

(Hazen-Williams 公式)

Q_0：節点への流入量 (m³/sec)

$Q_{1\cdots n}$：節点からの流出量 (m³/sec)

q_j：j 番目の管路の流量 (m³/sec)

h_i：i 番目の管路の損失水頭 (m)

r_i：　〃　抵抗係数

C_i：　〃　流速係数

D_i：　〃　管径 (m)

l_i：　〃　延長 (m)

これらの連立式を解くには，損失水頭公式を1次化しなければならない。

いま，方法論上簡単のために $n=2$, すなわち,

$$h_i = r_i q_i^2 \cdots\cdots (1)$$

を管路の損失水頭公式として用いる。

以下，記号については J を節点数，N を閉管路数，i を管路数とする。

流入点が1カ所で，各管路抵抗係数がそれぞれ一定であるような一般的な場合を考えると，未知数は $Q_0, q_1, q_2, \cdots, q_i, h_1, h_2, \cdots, h_i$ の合計 $(2i+1)$ 個であり，これを解くための関係式は各節点の流出入量均衡式J個，各管路に関する損失水頭公式 i 個および各閉管路に関する圧力平衡式 N 個の合計 $(J+i+N)$ 個である。平面的管網構造では $J+N=i+1$ が成立するから，未知数と式数は等しくなり解は容易に求められる。

本解法ではさらに未知数を減らすため，連立式の段階では q_i のみを求め，h_i は最後に損失水頭公式から計算することにすれば，未知数は i 個となる。これに対し，式数は節点均衡式 J 個および h_i を消去した圧力平衡式 N 個であるが，最初に $Q_0=\sum_1^n Q_n$ を満足するように Q_0 を決定すれば，総式数は $(J+N-1)=i$ 個となり解ける。この i 個の連立方程式は，q_i に関する $(J-1)$ 個の節点均衡式である1次式と N 個の圧力平衡式である2次式との混合連立式であるから，これを解くには2次式を1次化しなければならない。

ここに，2元高次方程式 (2),(3) 式があり，これを Newton の逐次近似法[4)] を用いて1次化してみる。

$$\phi(x, y) = 0 \cdots\cdots (2)$$

$$\psi(x, y) = 0 \cdots\cdots (3)$$

x, y の1次近似値を x_1, y_1 とし，その補正値をそれぞれ ξ, η とする。

$$x = x_1 + \xi \cdots\cdots (4)$$

$$y = y_1 + 1 \cdots\cdots (5)$$

式 (2),(3) を点 (x_1, y_1) の近傍において Taylor 展開すれば,

---

* 第 16 回全国水道研究発表会 (昭.40.5)，土木学会第 20 回年次学術講演会 (昭.40.5) および昭和 40 年度関西支部年次学術講演会 (昭.40.11) にて発表したものをとりまとめたものである。

** 正会員　工博　京都大学教授　衛生工学教室
*** 正会員　　　KK新日本技術コンサルタント

$$\phi(x,y)=\phi(x_1+\xi,y_1+\eta)=\phi_1+\left(\xi\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\xi^2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+2\xi\eta\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial y}+\eta^2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2}\right)+\cdots=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

同じように，

$$\psi(x,y)=\psi_1+\left(\xi\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\xi^2\frac{\partial\psi_1}{\partial x^2}+2\xi\eta\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y}+\eta^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)+\cdots=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

となる。ここに，$\phi_1=\phi(x_1,y_1)$ および $\psi_1=\psi(x_1,y_1)$ である。

式(6),(7)の右辺第3項以下を省略すれば，ξ,η についての1次連立式，

$$\begin{cases}\xi\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}+\phi_1=0 & \cdots\cdots(8)\\ \xi\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}+\psi_1=0 & \cdots\cdots(9)\end{cases}$$

を解くことになる。しかし，本解法では補正値 ξ および η を用いず，直接 x および y を求められるようにするため，式(8),(9)の ξ および η を式(4),(5)を用いて消去し，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}x+\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}y=\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}x_1+\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}y_1-\phi_1 & \cdots\cdots(10)\\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}x+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}y=\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}x_1+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}y_1-\psi_1 & \cdots\cdots(11)\end{cases}$$

を解くことにする。ここで，もし式(3)が1次式であれば，それを変換した式(11)は式(3)に還元されるから，1次式および高次式の混合した連立式においては，高次式のみを式(10)，すなわち x および y についての1次式に変換した1次連立式を解けばよい。x および y の真値を求めるのに，式(6),(7)の右辺第3項以下を省略したので反復計算が必要である。

本解法で取り扱う q_i に関する2次式は，

$$r_1q_1^2+r_2q_2^2+\cdots=0 \quad\cdots\cdots(12)$$

であり，q_i の最初の仮定値を $q_{i,1}$ とすると，式(12)は式(10)を応用してつぎのように1次化される。

$$r_1q_{1,1}q_1+r_2q_{2,1}q_2+\cdots=\frac{1}{2}(r_1q_{1,1}^2+r_2q_{2,1}^2+\cdots) \quad\cdots\cdots(13)$$

ここに，最初の仮定値 $q_{i,1}$ は計算の便宜上仮定するもので，節点均衡式を満足させる必要はなく，それぞれ独立に，たとえば $q_{1,1}=q_{2,1}=q_{3,1}=\cdots$ と仮定してもかまわない。

また，もし流向の仮定が逆であっても，計算の途中で q_i が負になった時点で $r_iq_i^2$ の符号を逆にすれば，同様に続行できる。

このような仮定をすれば，第1次近似値の計算は非常に簡単になる。

また，式(14)が q_i とともに r_i も未知量，すなわち3次式の場合は，r_i の最初の仮定値を $r_{i,1}$ とすれば，つぎの式(15)のように1次化される。

$$r_1q_1^2+r_2q_2^2+\cdots\pm H=0 \quad\cdots\cdots(14)$$

ここに，H は与えられた2点間動水圧差である。

$$r_{1,1}q_{1,1}q_1+r_{2,1}q_{2,1}q_2+\cdots+\frac{1}{2}(q_{1,1}^2r_1+q_{2,1}^2r_2+\cdots)=r_{1,1}q_{1,1}^2+r_{2,1}q_{2,1}^2+\cdots\mp\frac{1}{2}H \quad\cdots\cdots(15)$$

いま水圧管理上の厳格な要望から，流出点も含めてすべての節点の動水圧を与えるような問題も考えねばならないが，一般には数カ所の流入点があり，それら相互間の動水圧差が与えられた問題が多い。このような場合，すべての r_i ではなく，この動水圧差を表わす条件式の数だけ r_i を未知量としなければ連立式は解けない。ゆえに，圧力平衡式も r_i の与えられた項と未知の項，すなわち一般には式(16)のように2次項と3次項とを含む混合式となる。

$$\underbrace{r_1q_1^2+r_2q_2^2}_{3\text{次項}}+\underbrace{r_{3,g}q_3^2+r_{4,g}q_4^2}_{2\text{次項}}+\cdots\pm H=0 \quad\cdots(16)$$

ここに，$r_{i,g}$ は与えられた管路抵抗係数である。

この式(16)の1次化式は式(13)と式(15)の組み合わせであり，

$$r_{1,1}q_{1,1}q_1,+r_{2,1}q_{2,1}q_2+r_{3,g}q_{3,1}q_3+r_{4,g}q_{4,1}q_{4,1}q_4+\cdots+\frac{1}{2}(q_{1,1}^2r_1+q_{2,1}^2r_2)=r_{1,1}q_{1,1}^2+r_{2,1}q_{2,1}^2+\frac{1}{2}(r_{3,g}q_{3,1}^2+r_{4,g}q_{4,1}^2+\cdots\pm H) \quad\cdots\cdots(17)$$

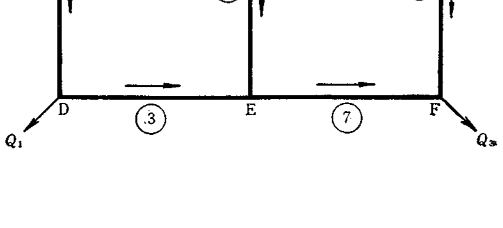
となる。

これらの式のうち，最終項 H は与えられた動水圧差を表わす条件式にのみあり，圧力平衡式にはつかない。

3．未知管路の配置

n 個の節点の動水圧を与えた場合，それら相互間の動水圧差を表わす条件式が $(n-1)$ 個できるので，それと同数の管路抵抗係数を未知としなければならないが，この未知管路の設定に矛盾または誤まりがあると解析不可能，すなわち実際にありえない問題を与えることになる。たとえば，図—1 のような日型管網において，流入

図—1



点 A から最遠点 F までの損失水頭を与える問題を考えてみる。図における種々の損失水頭の記号をつぎのように約束する。

H：管路 ② がない場合の A～F 間の損失水頭
h：各管路の損失水頭 $h_1, h_2 \cdots, h_7$ のうち最小のもの
H'：$>H$
H''：$<H$
H'''：$<h$

この場合，2節点間の動水圧差を与えるのであるからどれか1つの管路抵抗係数を未知としなければならない。

まず A～F 間の損失水頭を H' と与えた場合 (a)，管路 ② を未知管路として配置すれば，A～F 間の損失水頭はつねに H より小さくなって記号の約束と矛盾し解けない。この場合は外周管路のいずれかを未知管路として選び，その管路の抵抗係数が大きい値となって解がえられる。つぎに A～F 間の損失水頭を H'' と与えた場合 (b) は，管路抵抗係数を小さくすればよいのであるから，どの管路を未知管路として選んでも解ける。最後に A～F 間の損失水頭として H''' のような値をとれば (c)，どの管路を未知管路として選び，その抵抗係数をいかに小さくしても，残った管路の損失水頭が h を超過して記号の約束と矛盾し解けない。

このように2点間の動水圧差の与えかたしだいで，

A） どの管路を未知管路として選んでも解ける場合 (b)

B） 特定の管路を未知管路とすれば解ける場合 (a)

C） どの管路を未知管路として選んでも解けない場合 (c)

の3通りに分類される。

このように解析不可能な問題は，すでに各点の動水圧がわかっている既設管網の改良計画においては容易に避けられるが，新設計画においてはしばしば生じる問題であり，その回避には細心の注意を要する。しかし，水圧管理上および経済性の要望からすべての節点の動水圧を与え，したがってすべての管路抵抗係数が未知となるような問題では，この解が全体としてバランスのとれた管網を組織するため，このように矛盾した問題を生じることはない。

4. 計 算 例

(1) 流入点が1カ所の場合（図—2）

この場合成立する式数は管路数，すなわち 10 個でつぎのようになる。

① $q_1-q_2-q_5=0$

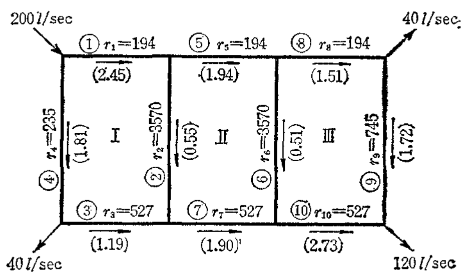
② $q_2+q_3-q_7=0$

③ $q_3-q_4=-40$

④ $194\,q_1^2+3\,570\,q_2^2-527\,q_3^2-235\,q_4^2=0$

⑤ $q_5-q_6-q_8=0$

図—2



（　）内数字は損失水頭(m)を示す。

表—1 第 1 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	常数項
①	1	−1			−1						0
②		1	1				−1				0
③			1	−1							−40
④′	194	3 570	−527	−235							75 050
⑤					1	−1		−1			0
⑥						1	1			−1	0
⑦′		−3 570			194	3 570	−527				−8 325
⑧								1	−1		40
⑨									1	1	120
⑩′						−3 570		194	745	−527	−78 950
1	1	−1			−1						0
2		1	1				−1				0
3			1	−1							−40
4	194	3 764	−4 291	−4 526	−0.0428		−0.832				21.3
5					1	−1		−1			0
6						1	1			−1	0
7		−3 570	3 570	3 570	347	3 917	−5 044	−0.0688		−0.777	−11.6
8								1	−1		40
9									1	1	120
10						−3 570	3 570	440	1 185	−2 510	78.6
解	128.4	23.5	31.6	71.6	104.9	23.5	55.1	81.4	41.4	78.6	

表—2 第 2 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	常数項
①	1	−1			−1						0
②		1	1				−1				0
③			1	−1							−40
④	249	839	−167	−168							17 195
⑤					1	−1		−1			0
⑥						1	1			−1	0
⑦		−839			204	839	−290				2 674
⑧								1	−1		40
⑨									1	1	120
⑩						−839		158	308	−414	−13 325
1	1	−1			−1						0
2		1	1				−1				0
3			1	−1							−40
4	249	1 088	−1 255	−1 423	−0.175		−0.764				23.2
5					1	−1		−1			0
6						1	1			−1	0
7		−839	839	839	351	1 190	−1 678	−0.209		−0.709	−10.0
8								1	−1		40
9									1	1	120
10						−839	839	333	641	−1 299	73.2
解	113.5	13.5	46.5	86.5	100.0	13.2	60.0	86.8	46.8	73.2	

⑥　$q_6+q_7-q_{10}=0$

⑦　$194\,q_5{}^2+3\,570\,q_6{}^2-527\,q_7{}^2-3\,570\,q_2{}^2=0$

⑧　$q_8-q_9=40$

⑨　$q_9+q_{10}=120$

⑩　$194\,q_8{}^2+745\,q_9{}^2-527\,q_{10}{}^2-3\,570\,q_6{}^2=0$

これらのうち式 ④,⑦ および ⑩ の2次式については

$$q_{1,1}=q_{2,1}=\cdots=q_{10,1}=50\,l/\mathrm{sec}$$

と仮定し，式 (13) を用いて1次化すればつぎのとおりである。

④′　$50(194\,q_1+3\,570\,q_2-527\,q_3-235\,q_4)$
$=50^2/2(194+3\,570-527-235)$

⑦′　$50(194\,q_5+3\,570\,q_6-527\,q_7-3\,570\,q_2)$
$=50^2/2(194+3\,570-527-3\,570)$

⑩′　$50(194\,q_8+745\,q_9-527\,q_{10}-3\,570\,q_6)$
$=50^2/2(194+745-527-3\,570)$

これらの1次連立式 ①,②,③,④′,⑤,⑥,⑦′,⑧,⑨ および式 ⑩′ を Crout 法[5] を用いて解き，その解を順次つぎの仮定値として同様に3回反復計算した結果を表—1,2 および 3 に示す。この解に対する各管路の損失水頭は $h_i=r_iq_i{}^2$ を用いて求め，それを図—2 の中に示した。

また計算速度については，この例題で1回の反復計算に約 60 分を要し，同じ問題を Hardy-Cross 法で解けば1回の反復計算に約 30 分，絹川改良法で解けば約 45

表—3 第 3 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	常数項
①	1	−1			−1						0
②		1	1				−1				0
③			1	−1							−40
④	220	482	−245	−203							1 260
⑤					1	−1		−1			0
⑥						1	1			−1	0
⑦		−482			194	471	−316				71
⑧								1	−1		40
⑨									1	1	120
⑩						−471		168	349	−386	−1 760
1	1	−1			−1						0
2		1	1				−1				0
3			1	−1							−40
4	220	702	−947	−1 150	−0.191		−0.611				31.8
5					1	−1		−1			0
6						1	1			−1	0
7		−482	482	482	286	757	−1 261	−0.227		−0.600	−3.2
8								1	−1		40
9									1	1	120
10						−471	471	275	624	−1 199	71.9
解	112.4	12.4	47.6	87.6	100.0	11.9	60.0	88.1	48.1	71.9	

分を要した。そして解の誤差の指標を，全管路の損失水頭の総和に対する各閉管路の閉合水頭差の和，すなわち $\varepsilon=\frac{\sum^{N}|\sum h_m|}{\sum|h_i|}$ にとれば，本解法では 3 回の反復計算，すなわち約 180 分の計算時間で $\varepsilon=0.06\%$ になったのに対し，Hard-Cross 法では 7 回の反復計算，すなわち約 210 分で $\varepsilon=0.43\%$，絹川改良法では 2 回の反復計算，すなわち約 90 分で Hardy-Cross 法とほぼ同程度の結果をえた。

しかも最初の仮定流量として，Hardy-Cross 法および絹川改良法で用いたいわゆる従来の仮定流量と異なり，本解法の場合は $q_{1,1}=q_{2,1}=\cdots=q_{10,1}=50\ l/\mathrm{sec}$ という前者より $\sum^{N}|\sum h_m|$ の大きい仮定流量から出発したものである。

表—4 第 1 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	Q_1	Q_2	常数項
①	1	−1			−1								0
②		1	1				−1						0
③			1	−1									−40
④′	194	3 570	−527	−235									75 050
⑤					1	−1		−1				1	0
⑥						1	1			−1			0
⑦′		−3 570			194	3 570	−527						−8 325
⑧								1	−1				40
⑨									1	1			120
⑩′						−3 570		194	745	−527			−78 950
⑪											1	1	200
⑫′	194				194								29 700
1	1	−1			−1								0
2		1	1				−1						0
3			1	−1									−40
4	194	3 764	−4 291	−4 526	−0.0428		−0.832						21.3
5					1	−1		−1				1	0
6						1	1			−1			0
7		−3 570	3 570	3 570	347	3 917	−5 044	−0.0688		−0.777		0.0688	−11.6
8								1	−1				40
9									1	1			120
10						−3 570	3 570	440	1 185	−2 510		0.0978	78.7
11											1	1	200
12	194	194	−194	−194	380	380	−347	356	356	−246		−332	46.9
解	88.5	24.1	24.6	64.6	64.4	25.4	48.7	85.9	45.9	74.1	153.1	46.9	

表—5 第 2 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	Q_1	Q_2	常数項
①	1	−1			−1								0
②		1	1				−1						0
③			1	−1									−40
④	172	860	−130	−152									11 467
⑤					1	−1		−1				1	0
⑥						1	1			−1			0
⑦		−860			125	907	−257						−1 078
⑧								1	−1				40
⑨									1	1			120
⑩						−907		167	342	−391			−10 979
⑪											1	1	200
⑫	172				125								21 621
1	1	−1			−1								0
2		1	1				−1						0
3			1	−1									−40
4	172	1 032	−1 162	−1 314	−0.131		−0.785						26.6
5					1	−1		−1				1	0
6						1	1			−1			0
7		−860	860	860	238	1 145	−1 587	−0.150		−0.723		0.150	−6.6
8								1	−1				40
9									1	1			120
10						−907	907	303	645	−1 287		0.106	73.4
11											1	1	200
12	172	172	−172	−172	274	274	−237	238	238	−135		−224	46.5
解	79.6	15.7	33.9	73.9	63.9	18.9	49.6	91.5	51.5	68.5	153.5	46.5	

表—6 第 3 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	Q_1	Q_2	常数項
①	1	−1			−1								0
②		1	1				−1						0
③			1	−1									−40
④	154	560	−179	−174									1 101
⑤					1	−1		−1				1	0
⑥						1	1			−1			0
⑦		−560			124	675	−261						−546
⑧								1	−1				40
⑨									1	1			120
⑩						−675		178	384	−361			−740
⑪											1	1	200
⑫	154				124								20 107
1	1	−1			−1								0
2		1	1				−1						0
3			1	−1									−40
4	154	714	−893	−1 067	−0.144		−0.670						32.5
5					1	−1		−1				1	0
6						1	1			−1			0
7		−560	560	560	205	880	−1 326	−0.155		−0.664		0.155	−2.76
8								1	−1				40
9									1	1			120
10						−675	675	283	667	−1 255		0.0834	71.9
11											1	1	200
12	154	154	−154	−154	256	256	−205	224	224	−104		−215	46.4
解	78.7	14.6	34.9	74.9	64.1	18.5	49.5	92.0	52.0	68.0	153.6	46.4	

(2) 2流入点間の水位差が与えられ，その流入量が未知の場合（図—3）

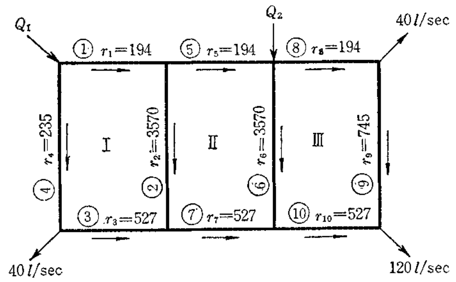
2流入点間の水位差，すなわち損失水頭として 2 m を与えた場合，例(1)にくらべ未知量 Q_1 および Q_2 が加わり，それに対しつぎの2式が成立する。

⑪ $Q_1+Q_2=200$

⑫ $194\,q_1{}^2+194\,q_5{}^2=2\,000\,000$ ($\mathrm{m^3/s}$ を l/s に換算)

⑫ 式は例 (1) と同様にして1次化すれば，

図—3



表—7 第 1 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	r_1	常数項
①	1	−1			−1							0
②		1	1				−1					0
③			1	−1								−40
④′	200	3 570	−527	−235							25	80 200
⑤					1	−1		−1				−80
⑥						1	1			−1		0
⑦′		3 570			194	3 570	−527					−8 325
⑧								1	−1			40
⑨									1	1		120
⑩′						−3 570		194	745	−527		−78 950
⑪′	200				194						25	24 850
1	1	−1			−1							0
2		1	1				−1					0
3			1	−1								−40
4	200	3 770	−4 297	−4 532	−0.0442		−0.832				−0.0055	20.2
5					1	−1		−1				−80
6						1	1			−1		0
7		−3 570	3 570	3 570	352	3 922	−5 049	−0.0698		−0.777	−0.0039	−17.9
8								1	−1			40
9									1	1		120
10						−3 570	3 570	443	1 188	−2 511	−0.0056	69.9
11	200	200	−200	−200	385	385	−351	361	361	−249	21	240
解	59.9	24.4	20.1	60.1	35.5	26.7	44.5	88.8	48.8	71.2	240	

表—8 第 2 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	r_1	常数項
①	1	− 1			− 1							0
②		1	1				− 1					0
⑥			1	− 1								− 40
④	144	871	−106	−141							18	13 929
⑤					1	− 1		− 1				− 80
⑥						1	1			− 1		0
⑦		−871			69	953	−235					− 1 898
⑧								1	− 1			40
⑨									1	1		120
⑩						−953		172	364	−375		− 9 563
⑪	144				69						18	14 834
1	1	− 1			− 1							0
2		1	1				− 1					0
3			1	− 1								− 40
4	144	1 015	− 1 121	− 1 262	−0.114		−0.805				−0.0143	24.5
5					1	− 1		− 1				− 80
6						1	1			− 1		0
7		−871	871	871	168	1 121	− 1 526	−0.110		−0.736	−0.0082	− 16.4
8								1	− 1			40
9									1	1		120
10						−953	953	277	641	− 1 268	−0.0062	64.6
11	144	144	−144	−144	197	197	−169	178	178	−105	13.8	282
解	51.3	16.3	28.7	68.7	35.0	21.3	45.0	93.7	53.7	66.3	282	

表—9 第 3 次 修 正 計 算 表

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_5	q_9	q_{10}	r_1	常数項
①	1	− 1			− 1							0
②		1	1				− 1					0
③			1	− 1								− 40
④	145	582	−151	−161							13.2	4 447
⑤					1	− 1		− 1				− 80
⑥						1	1			− 1		0
⑦		−582			68	760	−237					−792
⑧								1	− 1			40
⑨									1	1		120
⑩						−760		182	400	−349		−423
⑪	145				68						13.2	13 610
1	1	− 1			− 1							0
2		1	1				− 1					0
3			1	− 1								− 40
4	145	727	−878	− 1 039	−0.140		−0.700				−0.0127	29.5
5					1	− 1		− 1				− 80
6						1	1			− 1		0
7		−582	582	582	149	909	− 1 321	−0.113		−0.687	−0.0056	− 13.1
8								1	− 1			40
9									1	1		120
10						−760	760	268	668	− 1 255	−0.0034	64.8
11	145	145	−145	−145	193	193	−150	176	176	− 86	10.3	289
解	50.8	15.1	29.2	69.2	35.7	21.5	44.3	94.2	54.2	65.8	289	

⑫′ $50(194\,q_1+194\,q_5)$

$$=1/2(194\times 50^2+194\times 50^2+2\,000\,000)$$

となる。

この式 ⑪, ⑫′ および例 (**1**) の式 ①〜⑩ に相当する式から，例 (**1**) と同様にして反復計算した結果を表—**4**, **5** および **6** に示す。

(3) 2 流入点間の水位差が与えられ，その間の 1 管路抵抗係数が未知の場合 (図—4)

2流入点間の水位差として 1 m を与えた場合，この条件式に対して流入点間の 1 管路抵抗係数，たとえば r_1 が未知量であるとする。このとき，例 (**1**) の式 ④ に相当する閉管路 I (図—**4** 参照) の圧力平衡式は，

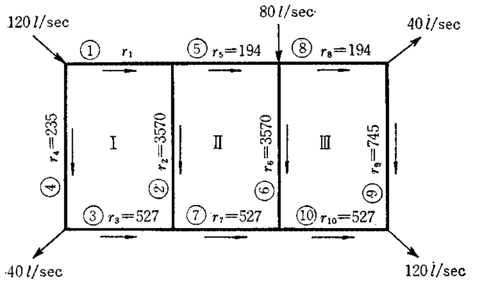
④ $r_1 q_1^2+3\,570\,q_2^2-527\,q_3^2-235\,q_4^2=0$

となって3次式となる。この式を $q_{i,1}$ については例 (1) と同じ仮定値，また r_1 については $r_{1,1}=200$ と仮定し，式 (17) を用いて1次化すれば，つぎの式 ④′ をうる。

④′ $50(200\,q_1+3\,570\,q_2-527\,q_3-235\,q_4+50/2\,r_1)$

$$=50^2/2(400+3\,570-527-235)$$

図—4



つぎの水位差条件式についても，式 ④′ と同じように1次化すれば式 ⑪′ のようになる。

⑪　$r_1q_1^2+194\,q_5^2=1\,000\,000$

⑪′　$50(200\,q_1+194\,q_5+50/2\,r_1)$

　　$=50^2/2(400+194+1\,000\,000/50^2)$

式 ⑦′ および ⑩′ は例(1)と同じである。これらの式 ①〜⑪′ から，例(1)と同様にして反復計算した結果を表—7,8 および 9 に示す。

5. 計算の迅速性，精度，応用性など

以上で本解法のあらましを計算例を混じえて説明したが，従来から用いられている方法とはまったく異なった解法であるため，それらと比較して，つぎのようないろいろの応用性あるいは利点が考えられる。

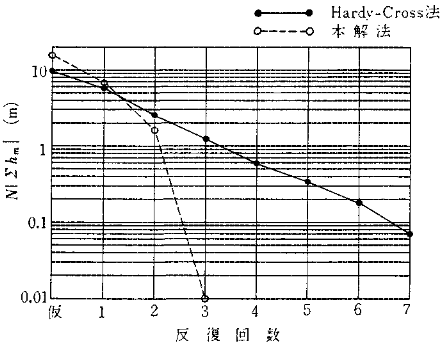
（1） 実際の配水系統には，水源における取水量の制約から，水位の与えられた2カ所以上の流入点を有することも多く，また水圧の均等化および送水管と配水管を併用してそのほかの配水管の口径の縮小を目的とする中継配水池を設置することも考えられる。このような場合多流入点間の水位差あるいは任意節点間の損失水頭を与えて解くことができる本解法は有利であり，さらに拡張して，すべての節点間の損失水頭を，水圧管理や配水基地における水圧確保費と管布設費などの関係から最適値として与えることにより，経済性の導入が可能となる。

つまり，これは最適化管網の問題へのアプローチとなる。

（2） 本解法における連立式に，すでに節点均衡式が含まれているので，とかく論義の対象となりやすい仮定流量としては，節点均衡式を満足したいわゆる従来の仮定流量を用いなくてもかまわない。すなわち，計算例で用いたように，もしすべての管路について等しい流量を仮定すれば，第1回目の反復計算に要する時間は非常に短縮され，また技術者の経験およびカンの介入する余地がなくなる。このような仮定流量を用いたための計算時間におよぼす影響は反復計算の1回分にも当たらない。

（3） 収れんが非常にはやい。たとえば，4. 計算例(1)においても述べたように，本解法による収れんの程度を各閉管路の閉合水頭差の合計 $\sum^{N}|\Sigma h_m|$ を示標として，Hardy-Cross 法による解と比較すれば，図—5のようである。しかも，この比較において，本解法の方は最初の仮定流量として節点均衡式を満足しなく，閉合水頭差も大きいラフなものから出発した不利にもかかわらず計算時間，精度ともにすぐれている。これは，Hardy-Cross 法が隣接閉管路の補正流量の影響および Taylor 展開における第3項以下の省略による反復計算であるのに対し，本解法では後者のみの原因による反復計算のためである。

図—5



（4） 直接 q_i を求めるので，Δq_i の加減算が不要である。このことは，とくに電子計算機を用いる場合に有利である。

（5） 実際には $r_iq_i^{0.85}$ のノモグラフあるいは表をつくって，$n=1.85$ の計算をすべきであろう。すなわち，式 (12) に相当する式は，

$$r_1q_1^{1.85}+r_2p_2^{1.85}+\cdots=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

であり，この式を式 (10) を用いて1次化すれば，つぎの式 (19) のようになる。

$$r_1q_{1,1}^{0.85}\,q_1+r_2q_{2,1}^{0.85}\,q_2+\cdots=\frac{0.85}{1.85}(r_1q_{1,1}^{1.85}+r_2q_{2,1}^{1.85}+\cdots)\quad\cdots\cdots(19)$$

この場合，計算時間は $rq^{0.85}$ をグラフあるいは表から読み取るのに要する時間だけ多くかかるので，実際の計算手法としては，最初のうち $n=2$ として，ある程度収れんさせておいてから，後半 $n=1.85$ の計算をすれば能率的である。

これらの長所に対し問題点としては，未知数が多くなるので，閉管路数の多い場合は筆算でなく電子計算機によらねばならないことである。

6. 結　　び

本解法によれば，高精度の解が短時間で求まり，また多流入点を有する管網に対しても有力で，かつ電子計算機にも適した解法であるが，今後さらに検討すべきことは，

a) 未知管路の抵抗係数とその隣接管路の抵抗係数とのバランスはどうか。

b) 任意節点間の損失水頭を定めて，配水の等圧化が

はかれないか。

c) 最適化の問題，たとえば経済的要素あるいは水圧管理要求の導入は具体的にどうするか。

などである。

おわりに，本研究を進めるにあたって，方法論上，京都大学工学部 衛生工学教室 末石富太郎助教授 と種々討議し，有益な成果を得たことを付記する。

参考文献

1) 青木康夫：クロスの管網計算法の改良について，日本水道協会雑誌，昭 32 年 12 月号，p. 8

2) 絹川新一郎：改良解法による計算の簡速化に対する考察，日本水道協会雑誌，昭 34 4 月号，p. 30

3) Tong, A.L. : "Analysis of Distribution Networks by Balancing Equivalent Pipe Lengths", Journal of A.W.W.A., p. 192, Feb., 1961

4) 谷本勉之助：実用数値計算法，森北出版，昭和 39 年

5) Crout, P.D. : "AShort Method for Evaluating Determinants and Solving Systems of Linear Equations with Real or Complex Coefficients", Trans. American Institute of Electrical Engineers, Vol. 60, 1941

(1966. 6.18・受付)