

3次元弾性問題の数値解法

NUMERICAL ANALYSIS OF THREE DIMENSIONAL ELASTIC PROBLEMS

色部 誠*・後藤 浩**
 By Makoto Irobe and Koichi Goto

1. 緒言

3次元弾性論は数理論的には完成されたとはいえるが、実際問題への応用面ではいくたの困難があり、2次元弾性論ほどの体系がととのっていない。現在なお、2次元弾性論の発展の初期段階におけるように、個々の問題の解および解法の集積に関係分野での努力がつけられている。

とくに、具体的問題を解くにあたっての手段となる数値解法にはいまだに注目にあたいするものがなく、わずかに Finite Element Method と同様な原理による解法が Argyris¹⁾ によって展開されているにすぎない。2次元弾性問題や版あるいはかくの諸問題に比して、3次元弾性問題に関する数値解法が発達普及していないことの主たる理由は、観念的に3次元の計算を実行するに足る容量をもつ高速大型電子計算機がないとされていることであろう。しからば、これに対して、現在の電子計算機はどれほどの大きさの3次元問題をこなせるかという疑問が生ずる。もちろん、取り扱い得る問題の大きさは解析原理によってあるいは偏微分方程式の数値解法いかんによって異なるので、単純にはその解答は出せないであろう。ともかく巧妙な解法の出現が望まれる。

以下に一つの試みであるが、3成分の変位を未知関数とする力のつりあい式に含まれる一部の偏微係数に差分法を用い、3つの連立偏微分方程式を3群の連立常微分方程式に変換し、これより問題の近似解を誘導する数値解法を示す。解の誘導は第 n 近似を第 $(n-1)$ 近似から求める逐次計算法によって行なわれる。

上述の3群の連立常微分方程式はつねに2階の形式であるが、これを1階にあらため、マトリックスを用いてただちにそれぞれの解を求めることができる。ここではマトリックスを用いて解く場合の手法を1,2の例題によって示す。

2. 基本式

弾性体素積の中心に単位体積当りの物体力が働く場合、応力テンソルを T とすれば、力のつりあいは、

$$\text{div } T + \bar{f} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

によって与えられる。 u によって変位ベクトルを、 \mathfrak{R} に

よって位置ベクトルを表わすものとすれば、等方の弾性体に対し、フックの法則から、

$$T = G \left(\frac{du}{d\mathfrak{R}} + \text{grad } u + \frac{2}{m-2} E \text{ div } u \right) \dots (2.2)$$

が得られる。 G はせん断弾性係数、 m はポアソン数である。

$\frac{du}{d\mathfrak{R}}$, $\text{grad } u$ は共役テンソルをなし、それぞれ、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

の成分をもち、 E は単位テンソルであって、成分、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をもつ。 $\text{div } u$ が体積ひずみ $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ を表わすことはいうまでもない。式(2.2)を式(2.1)に入れば、

$$\text{div } \frac{du}{d\mathfrak{R}} = \text{grad } \text{div } u$$

$$\text{div } E \text{ div } u = \text{grad } \text{div } u$$

となることから、均質の場合、

$$(\lambda + G) \text{ grad } e + G \nabla^2 u + \bar{f} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

を得る。 λ は Lamé の常数である。

さらに、ヤング率 E が位置の関数となるような不均質な弾性体に対しては、

$$\begin{aligned} \text{div } T = \text{grad } G \cdot \left(\frac{du}{d\mathfrak{R}} + \text{grad } u + \frac{2}{m-2} E \text{ div } u \right) \\ + G \text{ div } \left(\frac{du}{d\mathfrak{R}} + \text{grad } u + \frac{2}{m-2} E \text{ div } u \right) \end{aligned}$$

となるので、これを式(2.1)に入れば、

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \text{ grad } e + G \nabla^2 u + \text{grad } G \cdot \left(\frac{du}{d\mathfrak{R}} + \text{grad } u \right) \\ + e \text{ grad } \lambda + \bar{f} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.4) \end{aligned}$$

が得られる。

素積の境界において外向きに働く単位面積当りの外力を \mathfrak{R} とし、境界面上に立てた外向きの単位法線ベクトルを n によって表わせば、そこでの力のつりあいは、

$$n \cdot T = \mathfrak{R} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

で与えられる。これに式(2.2)を用いれば、境界条件を

* 正会員 電力中央研究所技術研究所

** 正会員 関西電力 KK 建設部 ダム保安課

変位によってつぎのように表おすことができる。

$$n \cdot G \left(\frac{du}{d\mathfrak{R}} + \text{grad } u + \frac{2}{m-2} E \text{div } u \right) = \mathfrak{R} \dots\dots\dots(2.6)$$

式(2.6)は均質、不均質のいずれにも共通である。

選ばれた任意の座標系に対し、式(2.3),(2.4)から変位に関する偏微分方程式が、式(2.6)から境界条件式が得られる。いま、直交座標系によってこれらの式を展開すれば、式中の $\text{grad } G \cdot \frac{du}{d\mathfrak{R}}$ などのベクトルとテンソルとの積に関しては公式²⁾を用い、つぎの諸式を得る。繁雑を避けるため、 x 方向の式のみを示す。

均質の場合のつりあい式：

$$\left. \begin{aligned} (\lambda+G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + F_x = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3')$$

不均質の場合のつりあい式：

$$\left. \begin{aligned} (\lambda+G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \\ + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + e \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ + F_x = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4')$$

境界条件式：

$$\left. \begin{aligned} \lambda n_x e + G \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial v}{\partial x} + n_z \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ + G \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = K_x \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6')$$

式中の F_x, K_x とは物体力および外力の x 方向成分であり、 n_x, n_y, n_z とは法線 n の方向余弦である。

3. 偏微分方程式の常微分方程式への変換

変位 u, v, w を未知量とする連立偏微分方程式(2.3')あるいは式(2.4')を解くのに差分法を導入して、これらを連立常微分方程式に変換する。このこと自体、座標系の選択とか、材料の均質、不均質とかにかかわらず同様であるので、簡単な直交座標系、均質の場合について述べる。

いま、図示のように物体内に x 軸に平行な仮想軸 1, 2, 3, 4, 5 を考える。軸 2, 3, 4 は同一の xy 平面内において、軸 3 を中央にして等間隔 h_y を有し、軸 1, 3, 5 は同一の xz 平面内において、軸 3 を中央にして等間隔 h_z を有するものとする。

軸 3 上の点の x 方向変位を u_3, y 方向変位の y に関する勾配を \dot{v}_3, z 方向変位の z に関する勾配を \dot{w}_3 、軸 1,

2, 4, 5 上の点の x 方向の変位を u_1, u_2, u_4, u_5 とすれば、これらはすべて x 軸に平行な軸上で考えている量であるから、 x のみの関数と見なせる。よって、軸 3 に沿っての偏微係数をつぎのように表わし、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_3 = \frac{d^2 u_3}{dx^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)_3 = \frac{d\dot{v}_3}{dx} \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)_3 = \frac{d\dot{w}_3}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.1)$$

さらに、軸 3 を中心とする差分により $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ を近似的に次式のように表わし、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_3 \approx \frac{1}{h_y^2} (u_1 - 2u_3 + u_2) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_3 \approx \frac{1}{h_z^2} (u_5 - 2u_3 + u_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.2)$$

これらを式(2.3')に用いれば、軸 3 上の点の x 方向変位 u_3 に関しての x を独立変数とする常微分方程式、

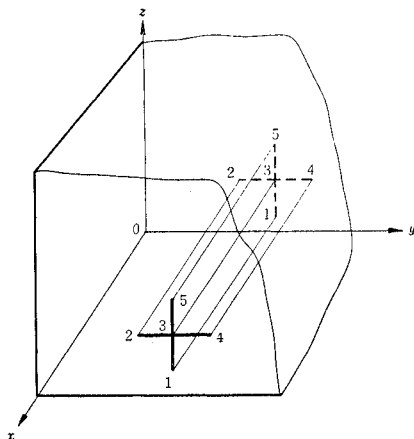
$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_3}{dx^2} - \frac{2G}{\lambda+2G} \left(\frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) u_3 \\ + \frac{G}{\lambda+2G} \frac{1}{h_y^2} (u_2 + u_4) + \frac{G}{\lambda+2G} \frac{1}{h_z^2} (u_1 + u_5) \\ = - \frac{\lambda+G}{\lambda+2G} \xi_3(x) \dots\dots\dots(3.3) \end{aligned}$$

を得る。右辺の $\xi_3(x)$ は、軸 3 上の物体力の x 方向成分を F_{x3} とすれば、次式によって与えられる。

$$\xi_3(x) = \frac{d\dot{v}_3}{dx} + \frac{d\dot{w}_3}{dx} + \frac{1}{\lambda+G} F_{x3}$$

物体内にひかれる x 軸に平行なすべての仮想軸 1, ..., i, \dots, l 上の点の変位について式(3.3)と同様の微分方程式が導かれる。これらの微分方程式には隣接仮想軸上の点の変位 u が含まれるので、軸の数と同数の $u_1, \dots, u_i, \dots, u_l$ を未知関数とする連立常微分方程式が成立する。 y 軸に平行な仮想軸 1, ..., j, \dots, m 上の点の y 方向変位 v 、および z 軸に平行な仮想軸 1, ..., k, \dots, n 上の点の z 方向変位 w についても、力のつりあい式(2.3')の第 2 式、第 3 式から、それぞれ y を独立変数とする v に関しての、および z を独立変数とする w に関しての

図-3.1 物体内におかれた x 方向仮想軸



連立常微分方程式が導かれる。

つぎに図-3.1に示された仮想軸3と境界面との交点 a_3 で、(2.6') 第1式において $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ に差分を用いれば、軸3の端点における近似境界条件式、

$$\frac{du_3}{dx} = -\frac{G}{\lambda+2G} \times \left[\frac{n_y}{n_x} \frac{u_4-u_2}{2h_y} + \frac{n_z}{n_x} \frac{u_5-u_1}{2h_z} \right]_{x=a_3} + r_3 \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

を得る。右辺の r_3 は軸3の端点における変位 v, w の x 方向の勾配 $\left(\frac{dv_3}{dx}\right)_{x=a_3}$, $\left(\frac{dw_3}{dx}\right)_{x=a_3}$ および $(\dot{v}_3)_{x=a_3}$, $(\dot{w}_3)_{x=a_3}$ と外力 K_x とからなる。示せば、つぎのとおりである。

$$r_3 = \frac{K_x}{n_x(\lambda+2G)} - \frac{\lambda}{\lambda+2G} (\dot{v}_3 + \dot{w}_3)_{x=a_3} - \frac{G}{\lambda+2G} \left(\frac{n_y}{n_x} \frac{dv_3}{dx} + \frac{n_z}{n_x} \frac{dw_3}{dx} \right)_{x=a_3} \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

式(3.4)は境界での u の x 方向勾配を指定する形のものである。同じく(2.6')の第2, 第3式からは、境界での v の y 方向勾配, w の z 方向勾配を指定する近似境界条件式を得る。

以上のようにして得られた常微分方程式および境界条件式をまとめれば、つぎの諸式を得る。

第1群:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_i}{dx^2} &= \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \dots + \alpha_{ii} u_i + \dots \\ &\quad + \alpha_{il} u_l + \xi_i(x) \\ \text{境界 } x &= a_i \text{ で,} \\ \frac{du_i}{dx} &= (a_{i1} u_1 + \dots + a_{il} u_l + r_i)_{x=a_i} \\ \text{境界 } x &= b_i \text{ で,} \\ \frac{du_i}{dx} &= (b_{i1} u_1 + \dots + b_{il} u_l + r_i)_{x=b_i} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

第2群:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_j}{dy^2} &= \beta_{j1} v_1 + \beta_{j2} v_2 + \dots + \beta_{jj} v_j + \dots \\ &\quad + \beta_{jm} v_m + \eta_j(y) \\ \text{境界 } y &= c_j \text{ で,} \\ \frac{dv_j}{dy} &= (c_{j1} u_1 + \dots + c_{jm} u_m + s_j)_{y=c_j} \\ \text{境界 } y &= d_j \text{ で,} \\ \frac{dv_j}{dy} &= (d_{j1} v_1 + \dots + d_{jm} v_m + s_j)_{y=d_j} \\ &\quad (j=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

第3群:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w_k}{dz^2} &= r_{k1} w_1 + r_{k2} w_2 + \dots + r_{kk} w_k \\ &\quad + \dots + r_{kn} w_n + \zeta_k(z) \\ \text{境界 } z &= e_k \text{ で,} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_k}{dz} &= (e_{k1} w_1 + \dots + e_{kn} w_n + t_k)_{z=e_k} \\ \text{境界 } z &= f_k \text{ で,} \\ \frac{dw_k}{dz} &= (f_{k1} w_1 + \dots + f_{kn} w_n + t_k)_{z=f_k} \\ &\quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

かくして、 u, v, w に関する連立偏微分方程式の境界値問題が u_i, v_j, w_k に関する3群の連立常微分方程式の境界値問題に変換された。

さて、式(3.6), (3.7), (3.8)から解を導くには、はじめに x, y, z 座標軸に平行な i, j, k 軸上の点の変位 $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ を仮定し、 $v^{(0)}, w^{(0)}$ を用いて式(3.6)右辺の $\xi_i(x)$ および $(r_i)_{x=a_i, b_i}$ を定め、境界条件を満足する第1群の連立常微分方程式の特解 $u^{(1)}$ を求める。つぎに $u^{(1)}, w^{(0)}$ を用いて式(3.7)の右辺の $\eta_j(y)$ と $(s_j)_{y=c_j, d_j}$ を定め、第2群の連立常微分方程式の特解 $v^{(1)}$ を求める。同様にして、第3群の方程式の特解 $w^{(1)}$ を導く。同じ手続きを反復して、回を重ねるにしたがい $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$ が収束してゆけば、もとの方程式の近似解を得ることができる。 u, v, w の右肩の添字 n は n 回目の反復計算の結果すなわち第 n 近似であることを示す。

他の座標系による場合の連立常微分方程式の誘導も、式(2.3)および式(2.6)にベクトルとテンソルの演算公式を用い、基本的な偏微分方程式および境界条件式を導き、これまで述べたのとまったく同じ手続きによって行なうことができる。

円筒座標を用いた場合、半径方向変位 u に関する微分方程式およびその境界条件式の型は上に求めたものと異なる。示せば、つぎのとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_i}{dr} - \frac{u_i}{r^2} &= \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \dots \\ &\quad + \alpha_{ii} u_i + \dots + \alpha_{il} u_l + \xi_i(r) \\ \text{境界 } r &= a_i \text{ で,} \\ \frac{du_i}{dr} &= \left(a_{i1} \frac{u_1}{r} + \dots + a_{il} \frac{u_l}{r} + r_i \right)_{r=a_i} \\ \text{境界 } r &= b_i \text{ で,} \\ \frac{du_i}{dr} &= \left(b_{i1} \frac{u_1}{r} + \dots + b_{il} \frac{u_l}{r} + r_i \right)_{r=b_i} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.9)$$

不均質問題では、直交座標系の場合、式(2.4)からわかるように、これから変換される連立常微分方程式には、均質の場合の式(3.6)の左辺に位置によって異なる λ および G の関数を係数とする1階微分の項が加わる。式(3.7), (3.8)に対応するものにも同様に1階微分の項が表われる。

4. 線型連立常微分方程式のマトリックス解法

線型連立常微分方程式を解くのにマトリックスを用いると、単一の微分方程式の解法からの類推ができ、明白

でわかりやすい。基本的な事項については文献 3) に述べられている。この場合、解に含まれるマトリックス級数 (Matrizant) は個々の問題によって特徴をもち、この Matrizant の数値計算が具体的な連立常微分方程式の境界値問題、固有値問題を解く場合のカギとなる。1, 2 の固有値問題に対する Matrizant の応用が文献 4) のなかで行なわれている。

前節に述べた連立常微分方程式はつねに 2 階の線型非同次型である。物体が等方等質で、問題が直交座標系のなかで表現されている場合には、これらの微分方程式は常数係数を有する。円筒座標あるいは球座標によって表現されている場合には、変数係数を有する微分方程式も表われる。また物体が不均質ならば、微分方程式はつねに変数係数を有する。

マトリックスを用いてこれらを解くには、はじめに 1 階の形にあらためておくとよい。そのため式 (3.6) に対しては、あらたに $u_{l+1}, u_{l+2}, \dots, u_{2l}$ を導入し、 $u_{l+1} = \frac{du_1}{dx}, u_{l+2} = \frac{du_2}{dx}, \dots, u_{2l} = \frac{du_l}{dx}$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= && u_{l+1} \\ \frac{du_2}{dx} &= && u_{l+2} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \frac{du_l}{dx} &= && u_{2l} \\ \frac{du_{l+1}}{dx} &= \alpha_{11}u_1 + \dots + \alpha_{1l}u_l + \xi_1(x) \\ \frac{du_{l+2}}{dx} &= \alpha_{21}u_1 + \dots + \alpha_{2l}u_l + \xi_2(x) \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \frac{du_{2l}}{dx} &= \alpha_{l1}u_1 + \dots + \alpha_{ll}u_l + \xi_l(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

が得られる。マトリックスの記法を用いるために、

$$A_{11} = A_{22} = \mathbf{0}, \quad A_{12} = \mathbf{I}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} & \dots & \alpha_{ll} \end{pmatrix} = \mathbf{K}$$

とし、

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \\ u_{l+1} \\ \vdots \\ u_{2l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \\ \frac{du_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{du_l}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dx} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_l(x) \end{pmatrix}$$

とおけば、式 (4.1) はつぎのようにかきあらわせる。

$$\dot{U} = AU + \mathbf{r}(x) \quad (4.4)$$

ただし、 $\mathbf{0}$ はゼロマトリックス、 \mathbf{I} は単位マトリックスである。 U および $\mathbf{r}(x)$ はともに $2l$ 個の成分をもつベクトルであって、 U のはじめの l 個の成分は変位 \mathbf{u} 、あとの l 個は変位の勾配 $\frac{d\mathbf{u}}{dx}$ 、また $\mathbf{r}(x)$ のはじめの l 個は 0、あとの l 個は連立微分方程式の非同次の項 $\xi_1(x), \dots, \xi_l(x)$ である。

円筒座標による微分方程式 (3.9) は、ベクトル U の成分に変位 \mathbf{u} と動径 r との積およびその勾配を r で割ったもの、すなわち、

$$U = \begin{pmatrix} ru_1 \\ \vdots \\ ru_l \\ \frac{1}{r} \frac{d(ru_1)}{dr} \\ \vdots \\ \frac{1}{r} \frac{d(ru_l)}{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\mathbf{u} \\ \frac{1}{r} \frac{d(r\mathbf{u})}{dr} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

を用いれば、式 (4.4) と同じ形の方程式、

$$\dot{U} = A(r)U + \mathbf{r}(r) \quad (4.6)$$

にかき表わせる。ただし、

$$A(r) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & r\mathbf{I} \\ \frac{1}{r}\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

である。

式 (4.6) において $\mathbf{r}(r) = 0$ なるときの解は、Picard-Lindelöf の反復法によって求められる。すなわち、解の第 $(k-1)$ 近似と第 k 近似とのあいだに、

$$\frac{dU^{(k)}}{dx} = A(r)U^{(k-1)} \quad (3.8)$$

の関係がなりたち、 $r=0$ では初期値 $U(0)$ が与えられているものとすれば、式 (4.8) より、

$$U^{(k)} = U(0) + \int_0^r A(r)U^{(k-1)}(r)dr \quad (4.9)$$

が得られる。 k に $0, 1, 2, \dots$ を入れれば、

$$U^{(0)}(r) = U(0), \quad U^{(1)}(r) = U(0) + \int_0^r A(\rho)d\rho U(0)$$

$$U^{(2)}(r) = U(0) + \int_0^r A(\rho_1)d\rho_1 U(0) + \int_0^r A(\rho_2)d\rho_2 \int_0^{\rho_2} A(\rho_1)d\rho_1 U(0) \dots$$

を得る。これをくり返せば、解、

$$U(r) = \Omega_r(A)U(0) \quad (4.10)$$

が得られる。ただし、 $\Omega_r(A)$ はマトリックス A に関する無限級数であって、次式によって表わされる。

$$\begin{aligned} \Omega_0^r(\mathbf{A}) = & \mathbf{I} + \int_0^r \mathbf{A}(\rho_1) d\rho_1 + \int_0^r \mathbf{A}(\rho_2) d\rho_2 \int_0^{\rho_2} \mathbf{A}(\rho) d\rho, \\ & + \int_0^r \mathbf{A}(\rho_3) d\rho_3 \int_0^{\rho_3} \mathbf{A}(\rho_2) d\rho_2 \int_0^{\rho_2} \mathbf{A}(\rho_1) d\rho_1 + \\ & \dots \dots \dots (4.11) \end{aligned}$$

非同次型の式(4.6)の解は、単独の微分方程式に対して用いられる常数変化法と同様にして求められる。結果だけを示せば、つぎのとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r) = & \Omega_0^r(\mathbf{A})\mathbf{U}(0) \\ & + \Omega_0^r(\mathbf{A}) \int_0^r [\Omega_0^r(\mathbf{A})]^{-1} \mathbf{r}(\rho) d\rho \dots (4.12) \end{aligned}$$

解(4.12)の誘導に際し、

$$\frac{d}{dr} \Omega_0^r(\mathbf{A}) = \mathbf{A}(r) \Omega_0^r(\mathbf{A}) \dots \dots \dots (4.13)$$

$$\det \Omega_0^r(\mathbf{A}) \neq 0 \dots \dots \dots (4.14)$$

なる $\Omega_0^r(\mathbf{A})$ に関する重要な性質が用いられている。

\mathbf{A} が常数の場合には、

$$\begin{aligned} \int_0^r \mathbf{A} d\rho = & \mathbf{A}r, \int_0^r \mathbf{A} d\rho_2 \int_0^{\rho_2} \mathbf{A} d\rho_1 = \frac{(\mathbf{A}r)^2}{2!} \\ \int_0^r \mathbf{A} d\rho_3 \int_0^{\rho_3} \mathbf{A} d\rho_2 \int_0^{\rho_2} \mathbf{A} d\rho_1 = & \frac{(\mathbf{A}r)^3}{3!} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \Omega_0^r(\mathbf{A}) = & \mathbf{I} + \mathbf{A}r + \frac{(\mathbf{A}r)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}r)^3}{3!} + \dots = e^{\mathbf{A}r} \\ & \dots \dots \dots (4.15) \end{aligned}$$

となり、式(4.4)の解として、

$$\mathbf{U}(x) = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{U}(0) + e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}x} \mathbf{r}(x) dx \dots (4.16)$$

を得る。

5. 直交座標系等方等質問題における Matrizant

Matrizant $e^{\mathbf{A}x}$ および境界条件を満足する $\mathbf{U}(0)$ を決定できれば、式(4.16)を用い各点の u および $\frac{du}{dx}$ を求めることができる。 $\mathbf{U}(0)$ の決定についてはあとで述べることとし、ここでは $e^{\mathbf{A}x}$ について述べる。

直交座標系における等方等質問題では、マトリックス \mathbf{A} は式(4.3)に示すように $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ の形を有する。これのベキをつくれれば、つぎの諸式のとおりである。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

.....

$$\mathbf{A}^{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{2n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}^n \\ \mathbf{K}^{n+1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

.....

これらを式(4.15)に入れば、

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}x} = & \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \mathbf{K}^m & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \mathbf{K}^m \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \mathbf{K}^{m+1} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \mathbf{K}^m \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{K}, x) & \mathbf{S}(\mathbf{K}, x) \\ \mathbf{K}\mathbf{S}(\mathbf{K}, x) & \mathbf{C}(\mathbf{K}, x) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (5.1) \end{aligned}$$

を得る。 $\mathbf{C}(\mathbf{K}, x)$ は x に関しては偶関数であり、 $\mathbf{S}(\mathbf{K}, x)$ は奇関数である。

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{K}, x) &= \mathbf{C}(\mathbf{K}, -x) \\ \mathbf{S}(\mathbf{K}, x) &= -\mathbf{S}(\mathbf{K}, -x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.2)$$

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}x} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{K}, -x) & \mathbf{S}(\mathbf{K}, -x) \\ \mathbf{K}\mathbf{S}(\mathbf{K}, -x) & \mathbf{C}(\mathbf{K}, -x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{K}, x) & -\mathbf{S}(\mathbf{K}, x) \\ -\mathbf{K}\mathbf{S}(\mathbf{K}, x) & \mathbf{C}(\mathbf{K}, x) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (5.3) \end{aligned}$$

式(5.1), (5.3)の両式を $e^{\mathbf{A}x} \cdot e^{-\mathbf{A}x} = \mathbf{I}$ に用いれば、

$$\mathbf{C}^2(\mathbf{K}, x) - \mathbf{K}\mathbf{S}^2(\mathbf{K}, x) = \mathbf{I} \dots \dots \dots (5.4)$$

を得る。マトリックス \mathbf{A} が2行2列で、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なるとき、

$$e^{\mathbf{A}x} = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

また、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

なるとき、

$$e^{\mathbf{A}x} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k}x) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}x) \\ \sqrt{k} \sinh(\sqrt{k}x) & \cosh(\sqrt{k}x) \end{pmatrix}$$

となることからしても、式(5.4)の成立は類推できる。

式(5.1)から、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{K}, x)}{dx} &= \mathbf{C}(\mathbf{K}, x), \quad \frac{d\mathbf{C}(\mathbf{K}, x)}{dx} = \mathbf{S}(\mathbf{K}, x) \\ &\dots \dots \dots (5.5) \end{aligned}$$

が得られること、また $e^{\mathbf{A}x_1} \cdot e^{\mathbf{A}x_2} = e^{\mathbf{A}(x_1+x_2)}$ から、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{K}, x_1+x_2) &= \mathbf{C}(\mathbf{K}, x_1) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}, x_2) \\ &+ \mathbf{K}\mathbf{S}(\mathbf{K}, x_1) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{K}, x_2) \\ \mathbf{S}(\mathbf{K}, x_1+x_2) &= \mathbf{S}(\mathbf{K}, x_1) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}, x_2) \\ &+ \mathbf{C}(\mathbf{K}, x_1) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{K}, x_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.6)$$

が得られることも、双曲線関数の性質と類似するものである。

つぎに Matrizant $\mathbf{C}(\mathbf{K}, x)$, $\mathbf{S}(\mathbf{K}, x)$ の数値計算について述べる。1より小なる正の数 p とし、 $x=p$ とおく。マトリックスの各行の要素絶対値の和の最大値あるいは各列の要素絶対値の和の最大値をノルムに採用すれば、

$$\left| \mathbf{C}(\mathbf{K}, p) \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{2m}}{(2m)!} \mathbf{K}^m \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq |I| + \frac{|p^2 K|}{2!} + \frac{|(p^2 K)^2|}{(2 \times 2)!} + \dots + \frac{|(p^2 K)^m|}{(2 \times m)!} + \dots \\ &\leq |I| + \frac{|p^2 K|}{2!} + \frac{|p^2 K|^2}{(2 \times 2)!} + \dots + \frac{|p^2 K|^m}{(2 \times m)!} + \dots \end{aligned} \tag{5.7}$$

となるので、 $C(K, p)$ は絶対収束することがわかる。マトリックス K の i, k 要素を α_{ik} とすれば、

$$|p^2 K| = p^2 \text{Max}_i \left(\sum_{k=1}^l |\alpha_{ik}| \right) \tag{5.8}$$

または、 $p^2 \text{Max}_k \left(\sum_{i=1}^l |\alpha_{ik}| \right)$

であるから、十分小さな数 ϵ に対して、

$$\sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{|p^2 K|^m}{(2m)!} < \epsilon$$

となる q がわかれば、 $C(K, p)$ の数値計算において考慮すべき項数 q が定まる。かくして、 $0 < x < 1$ なる場合の $C(K, x)$, $S(K, x)$ の近似値を求めることができる。式(5.6)によって、これらの近似値の積和をつくれば、 $x > 1$ なる場合の $C(K, x)$, $S(K, x)$ の近似値を得る。得られた値の精度が以後の数値計算において満足し得るものであるかどうかは、さらに、式(5.4)によって検証できる。

6. 円筒座標系等方等質問題における Matrizant

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= \int_0^r A(\rho_2) \int_0^{\rho_2} A(\rho_1) d\rho_1 d\rho_2 = \begin{pmatrix} \int_0^r \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 d\rho_2 K & 0 \\ 0 & \int_0^r \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 d\rho_1 d\rho_2 K \end{pmatrix} \\ \dots & \\ A^{(2n)} &= \begin{pmatrix} \int_0^r \rho_{2n} \dots \int_0^{\rho_3} \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_{2n} K^n & 0 \\ 0 & \int_0^r \frac{1}{\rho_{2n}} \dots \int_0^{\rho_3} \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_{2n} K^n \end{pmatrix} \\ A^{(2n+1)} &= \begin{pmatrix} 0 & \int_0^r \rho_{2n+1} \dots \int_0^{\rho_3} \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_{2n+1} K^{n+1} \\ \int_0^r \frac{1}{\rho_{2n+1}} \dots \int_0^{\rho_3} \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_{2n+1} K^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、

$$\Omega_0^r(A) = I + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(2n)} + A^{(2n+1)} + \dots$$

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{l} I + \int_0^r \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 d\rho_2 K \\ + \int_0^r \rho_4 \int_0^{\rho_4} \frac{1}{\rho_3} \int_0^{\rho_3} \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 \dots d\rho_4 K^2 \\ + \int_0^r \rho_6 \dots \int_0^{\rho_3} \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 \dots d\rho_6 K^3 \\ + \dots \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \int_0^r \rho_1 d\rho_1 I \\ + \int_0^r \rho_3 \int_0^{\rho_3} \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 K \\ + \int_0^r \rho_5 \dots \int_0^{\rho_3} \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_5 K^2 \\ + \dots \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{l} \int_0^r \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 K \\ + \int_0^r \frac{1}{\rho_3} \int_0^{\rho_3} \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 K^2 \\ + \int_0^r \frac{1}{\rho_5} \dots \int_0^{\rho_3} \rho_2 \int_0^{\rho_2} \frac{1}{\rho_1} d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_5 K^3 \\ + \dots \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} I + \int_0^r \frac{1}{\rho_6} \int_0^{\rho_6} \rho_1 d\rho_1 d\rho_2 K \\ + \int_0^r \frac{1}{\rho_4} \int_0^{\rho_4} \rho_3 \int_0^{\rho_3} \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 d\rho_1 \dots d\rho_4 K^2 \\ + \int_0^r \frac{1}{\rho_6} \dots \int_0^{\rho_3} \frac{1}{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \rho_1 d\rho_1 \dots d\rho_6 K^3 \\ + \dots \end{array} \right] \tag{6.2} \end{aligned}$$

式(4.12)は円筒座標によって等方等質問題を解く場合の第1群の連立常微分方程式の解であって、ここにあらわれる Matrizant は式(4.11)に示されたとおりである。一般に Matrizant $\Omega_0^r(A)$ の計算はきわめて困難である。

$\Omega_0^r(A)$ にはすでに述べたもののほかにつぎの重要な性質がある。すなわち $(0, r)$ を n 個の区間に細分割し、

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r$$

とすれば、

$$\Omega_0^r(A) = \Omega_{r_{n-1}}^r(A) \cdot \Omega_{r_{n-2}}^{r_{n-1}}(A) \dots \Omega_{r_1}^{r_2}(A) \cdot \Omega_0^{r_1}(A) \tag{6.1}$$

が成り立つ。

各区間内で $A(r)$ の要素の最大値が小さな数となる場合、数項からなる級数の部分和によって十分 $\Omega_0^r(A)$, $\Omega_{r_1}^{r_2}(A)$, ... を近似せしめることができ、これらを式(6.1)に入れて、 $\Omega_0^r(A)$ の近似値を得ることができる。しかし、 $A(r)$ の要素の最大値が大きい場合には、この方法は不適當である。

式(4.7)の $A(r)$ を Matrizant の各項に入れれば、

を得る。これを、

$$\Omega_0^r(A) = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$$

とおけば、右辺の小マトリックスのあいだに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \Omega_{11} &= \Omega_{21} \\ r \frac{d}{dr} \Omega_{21} &= \Omega_{11} \mathbf{K} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \Omega_{12} &= \Omega_{22} \\ r \frac{d}{dr} \Omega_{22} &= \Omega_{12} \mathbf{K} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.4)$$

の関係の成り立つことがわかる。この関係式は、 Ω_{21} ならびに Ω_{22} が次数0の Bessel 微分方程式を満足するものであることを示す。ところで、 $r=0$ とおけば、式(6.2)より、

$$\left. \begin{aligned} (\Omega_{11})_{r=0} &= \mathbf{I} \\ (\Omega_{21})_{r=0} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.5)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Omega_{12})_{r=0} &= \mathbf{0} \\ (\Omega_{22})_{r=0} &= \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.6)$$

となることは明らかである。

円筒関数を用いて、式(6.5),(6.6)の第2式を満足するよう Ω_{21} , Ω_{22} を定め、それより Ω_{11} , Ω_{12} を求めることもできるが、初期値が式(6.5)によって与えられているとして、連立微分方程式(6.3)に Runge-Kutta 法を用い、 Ω_{11} および Ω_{21} を、また式(6.6),(6.4)から同じくして Ω_{12} および Ω_{22} を求めることもできる。

Runge-Kutta 法による解の実用性を調べるために行なった計算によれば、数値積分における基本的な積分幅を仮想軸間隔の 1/2 とするも 1/20 とするも結果にほとんど差のないことが認められた。

7. 計算例

(1) 立方体の相対する2面が部分的に加圧される対称問題

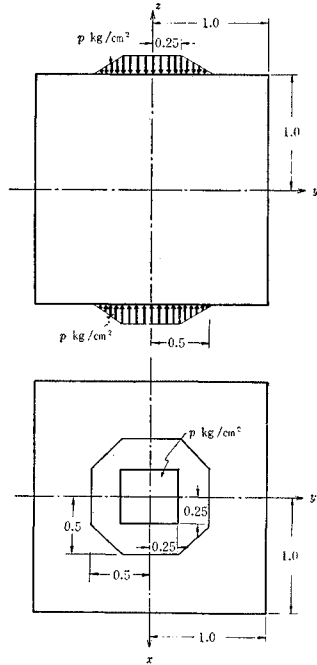
直角座標により表わされる問題として、正六面体の上下面 $z = \pm 1$ の面上、 $|x| \leq 1/4$, $|y| \leq 1/4$ の正方形部分で等分布となる台形垂直圧力 p_z が作用する対称問題を考える。図-7.1の正六面体の中心に原点をおき、 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ の容積部分、すなわち全体の 1/8 の部分について考えることにする。こうすれば変換された3群の連立常微分方程式に課せられる境界条件はつぎのとおりとなる。

第1群の u に関する連立常微分方程式に対しては、

$$\left\{ \begin{aligned} x=0 \text{ で } u_i &= 0 \\ x=1 \text{ で } K_x &= 0 \text{ ゆえ、} \\ & \frac{du_i}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda+2G} (\dot{v}_i + \dot{w}_i) \\ (i=1, 2, \dots, l) \end{aligned} \right.$$

第2群の連立常微分方程式に対しては、

図-7.1 相対する2面に台形垂直荷重 p_z を受ける立方体



$$\left\{ \begin{aligned} y=0 \text{ で } v_j &= 0 \\ y=1 \text{ で } K_y &= 0 \text{ ゆえ、} \\ & \frac{dv_j}{dy} = -\frac{\lambda}{\lambda+2G} (\dot{u}_j + \dot{w}_j) \\ (j=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right.$$

第3群の連立常微分方程式に対しては、

$$\left\{ \begin{aligned} z=0 \text{ で } w_k &= 0 \\ z=1 \text{ で } 0 \leq x \leq 1/4, 0 \leq y \leq 1/4 \text{ では、} \\ & K_z = -p_z \text{ ゆえ、} \\ & \frac{dw_k}{dz} = \frac{\lambda}{\lambda+2G} \left\{ -\frac{p_z}{\lambda} - (\dot{u}_k + \dot{v}_k) \right\} \\ & 1/2 \leq x \leq 1, 1/2 \leq y \leq 1 \text{ では、} \\ & K_z = 0 \text{ ゆえ、} \\ & \frac{dw_k}{dz} = -\frac{\lambda}{\lambda+2G} (\dot{u}_k + \dot{v}_k) \\ (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right.$$

である。

以上のほかに、すべての境界上で接線力が0であるという条件が満たされねばならない。本題のように境界面上に仮想軸を設け得る場合には、これらの軸上の点について常微分方程式をたてる際に、接線力0の境界条件をすべて満たすことができる。

3群の連立常微分方程式に対し指定される境界条件の形はいずれも同じであるので、つぎに第1群の記号を用いて解法の要点を述べる。すでに示したように方程式の解は、

$$U(x) = e^{Ax} U(0) + e^{Ax} \int_0^x e^{-Ax} r(x) dx \dots (7.1)$$

である。上式において $x=1$ とおけば、境界上の u お

図-7.2 相対する2面に台形垂直荷重 p_x をうける立方体の σ_z ならびに w の分布

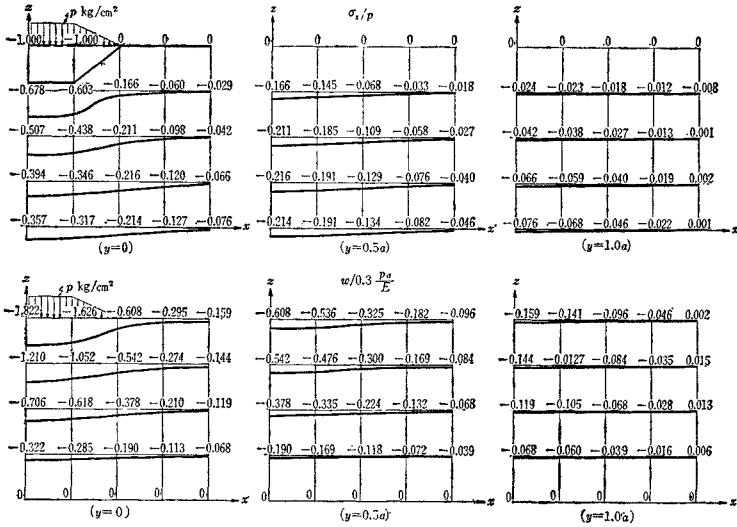
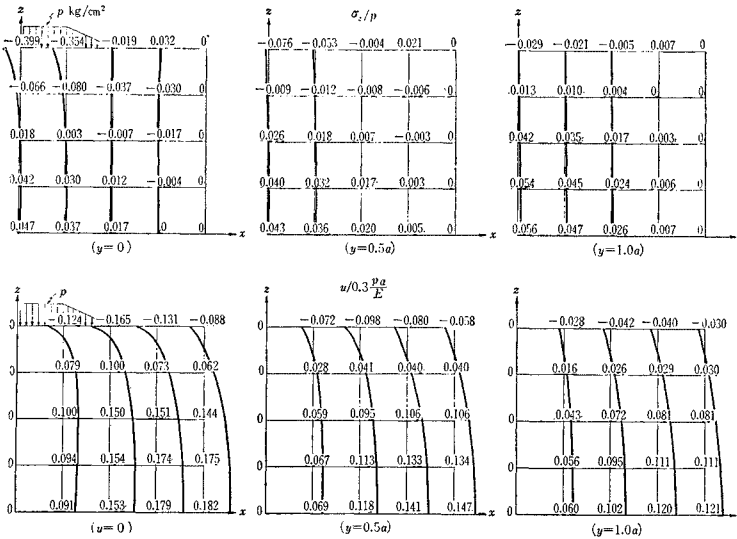


図-7.3 相対する2面に台形垂直荷重 p_x をうける立方体の σ_x ならびに u の分布



$$\int_0^1 e^{-Ax} r(x) dx = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \dots (7.3)$$

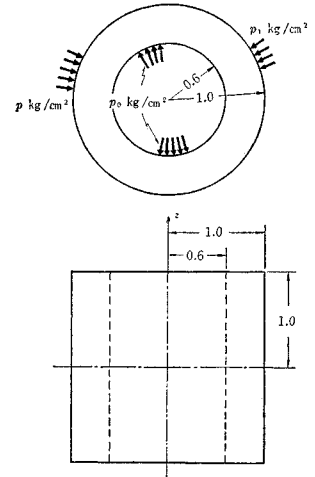
とおけば、式(7.2)より、

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = C(K, 1) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} + KS(K, 1) \cdot B_1 + C(K, 1) \cdot B_2 \dots (7.4)$$

が得られる。これは、仮想軸と同数の式からなる連立方程式である。これを解いて境界条件を満足する $(du/dx)_{x=0}$ が求まる。

本題では $u, du/dx$ からただちに $v, dv/dy$ が得られるので、3.に述べた逐次計算の手続きは第1群と第3群の連立常微分方程式に対して適用される。計算結果を図-7.2および図-7.3に示す。仮想軸間隔は、1/4である。

図-7.4 内外面に一樣な圧力をうける有限長中空円筒



よび du/dx が対称面上の u および du/dx によって表わされる。

$$U(1) = eAU(0) + eA \int_0^1 e^{-Ax} r(x) dx \dots (7.2)$$

式(7.2)において $U(1), U(0)$ のうち確定しているものは、 $(du/dx)_{x=1}$ および $(u)_{x=0}$ だけである。

$(du/dx)_{x=0}$ が境界条件を満足するように定められれば、すでに確定している $(u)_{x=0}$ とこの $(du/dx)_{x=0}$ とを式(7.1)の $U(0)$ に用いて特解が得られる。

$(du/dx)_{x=0}$ はつぎのようにして求められる。4.に定義した連立常微分方程式の係数マトリックス K をつくり、式(5.1)にこれを用い、かつ $x=1$ とすれば、所要の eA が求まる。式(7.2)右辺の積分はベクトルでありそれを、

(2) 上下面が自由な中空厚肉円筒の内外壁に一樣圧力が作用する軸対称問題

これまで述べてきた3次元弾性問題に対する数値解法の精度を調べるために、Laméの問題と呼ばれる本題をとり上げて見た。

図-7.4に示すように円筒の外半径1に対し、内半径は0.6、高さは2.0である。これに作用する内圧 p_0 を 1.5 kg/cm^2 、外圧 p_1 を 1.0 kg/cm^2 としてある。

本題は軸対称問題であるから、 $v = dv/d\theta = 0$ であって、中心軸を含む面がつくる円筒断面の1/4部分について半径方向および鉛直方向の力のつりあいのみを考えればよい。

鉛直方向変位 w および dw/dz に関する連立常微分方程式の特解の誘導は例題7.1と全く同じである。

半径方向変位 u および du/dr に関する連立常微分方程式の解 (4.12) が内壁面と外壁面とにおいて $(\sigma_r)_{r=0.6} = -p_0$, $(\sigma_r)_{r=1.0} = -p_1$ となる境界条件をみたすにはそれぞれの面上において u と $\frac{du}{dr}$ とが,

$$\left[(\lambda+2G) \frac{du_i}{dr} + \lambda \left(\frac{u_i}{r} + \dot{w}_i \right) \right]_{r=0.6} = -p_0 \dots (7.5)$$

$$\left[(\lambda+2G) \frac{du_i}{dr} + \lambda \left(\frac{u_i}{r} + \dot{w}_i \right) \right]_{r=1.6} = -p_1 \dots (7.6)$$

によって結ばれていなければならない。式 (4.12) において積分の上限を 1.0 下限を 0.6 とすれば、 $U(1.0)$ を $U(0.6)$ によって表わすことができる。それを式 (7.6) に入れ、式(7.5)と連立させれば、 $(u)_{r=0.6}$ $(du/dr)_{r=0.6}$ に関する連立方程式が得られる。これを解けば $U(0.6)$ のすべての成分が定まる。この $U(0.6)$ を式 (4.12) の $U(0)$ に使い、積分下限を 0.6 とすれば、境界条件を満たす特解 $U(r)$ を得る。 $z=0$ に関しての変形の対称性および $z=1.0$ における半径方向外力 $K_r=0$ の境界条件は、前の例題と同じく、連立常微分方程式をつくるときに満たされる。

表-7.1 は反復計算 11 回目の結果である。比較し得

よう理論解より得られた変位および応力を同じ表に示す。ここでは仮想軸間隔は 1/10 である。

Lamé の問題の解は周知のとおり⁵⁾,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{1-r_0^2} \left(\frac{r^2-1}{r^2} p_0 r_0^2 - p_1 \frac{r^2-r_0^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{1-r_0^2} \left(\frac{r^2+1}{r^2} p_0 r_0^2 - p_1 \frac{r^2+r_0^2}{r^2} \right) \\ \sigma_z &= \tau_{rz} = 0 \\ u &= \frac{1}{2G} \left[\frac{m-1}{m+1} \frac{p_0 r_0^2 - p_1}{1-r_0^2} r + \frac{p_0 - p_1}{1-r_0^2} \frac{r_0^2}{r} \right] \\ w &= -\frac{1}{G(m+1)} \frac{p_0 r_0^2 - p_1}{1-r_0^2} z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7.7)$$

であって、変位 u は r のみの関数、 w は z のみの関数である。逐次計算の進行により収束するにしたがい、近似解にもこの性状が表われ、連立常微分方程式の非同次項をつくるときの差分近似による誤差が消失し、前表に示すように、数値解と理論解とが完全に一致しているのである。

8. 結 語

以上示した数値解法は、等方等質の問題のみならず、

表-7.1 内外面に一樣な圧力をうける有限長中空円筒の変位、ひずみならびに応力の計算値と理論値

r	z	$u \times 10^6 \text{cm}$		$\frac{\partial u}{\partial r} \times 10^6$		$w \times 10^6 \text{cm}$		$\frac{\partial w}{\partial z} \times 10^6$		$\sigma_r \text{ kg/cm}^2$	
		計算値	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値
0.6	0	0.72498	0.72500	-0.50417	-0.50417	0	0	0.95818	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.1	0.72498	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.09582	0.09583	0.95818	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.2	0.72498	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.19164	0.19167	0.95818	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.3	0.72497	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.28745	0.28750	0.95819	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.4	0.72497	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.38327	0.38333	0.95819	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.5	0.72497	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.47909	0.47917	0.95821	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.6	0.72496	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.57491	0.57500	0.95824	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.7	0.72496	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.67074	0.67083	0.95826	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.8	0.72496	0.72500	-0.50417	-0.50417	0.76657	0.76667	0.95830	0.95833	-1.5000	-1.5000
	0.9	0.72495	0.72500	-0.50418	-0.50417	0.86240	0.86250	0.95865	0.95833	-1.5000	-1.5000
1.0	0.72496	0.72500	-0.50419	-0.50417	0.95825	0.95833	0.95903	0.95833	-1.5000	-1.5000	
0.8	0	-0.12711	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0	0	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.1	-0.12711	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.09582	0.09583	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.2	-0.12711	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.19164	0.19167	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.3	-0.12711	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.28745	0.28750	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.4	-0.12711	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.38327	0.38333	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.5	-0.12712	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.47909	0.47917	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.6	-0.12712	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.57491	0.57500	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.7	-0.12713	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.67073	0.67083	0.95818	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.8	-0.12713	-0.12708	-0.36745	-0.36745	0.76654	0.76667	0.95811	0.95833	-1.1582	-1.1582
	0.9	-0.12713	-0.12708	-0.36744	-0.36745	0.86235	0.86250	0.95801	0.95833	-1.1582	-1.1582
1.0	-0.12713	-0.12708	-0.36744	-0.36745	0.95807	0.95833	0.95810	0.95833	-1.1582	-1.1582	
1.0	0	-0.79169	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0	0	0.95817	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.1	-0.79169	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.09582	0.09583	0.95817	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.2	-0.79169	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.19163	0.19167	0.95817	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.3	-0.79169	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.28745	0.28750	0.95817	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.4	-0.79170	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.38327	0.38333	0.95818	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.5	-0.79170	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.47909	0.47917	0.95818	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.6	-0.79170	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.57490	0.57500	0.95818	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.7	-0.79171	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.67072	0.67083	0.95819	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.8	-0.79171	-0.79167	-0.30417	-0.30417	0.76654	0.76667	0.95824	0.95833	-1.0000	-1.0000
	0.9	-0.79171	-0.79167	-0.30418	-0.30317	0.86237	0.86250	0.95827	0.95833	-1.0000	-1.0000
1.0	-0.79171	-0.79167	-0.30419	-0.30417	0.95836	0.95833	0.95973	0.95833	-1.0000	-1.0000	

不均質あるいは異方性の問題に対しても使い得る。よって、単一でない構造物基礎の解析にも適用し得るであろう。

この解法には差分法が含まれるので、近似度は仮想軸間隔に支配される。

7. に示す例題の演算はすべて IBM 7090 によった。大きい方の問題である例題 7.1 では同機の内部メモリーの 80% 近くを使用している。示した解は仮想軸間隔を 1/4 とした場合のものであるが、これを 1/5 とすると外部メモリーを使用せねばならなくなる。

最後に、Matrizant の演算に貴重な助言を下された電力中央研究所電子計算機室中川友康氏およびプログラミングに多大の助力を下された電力中央研究所技術研究所栗原千鶴子氏に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Argyris, J.H.: Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media, Matrix Analysis for Small and Large Displacements. Ing.-Arch. 34 (1965) p. 33
- 2) 矢野健太郎: 幾何学, 岩波講座現代応用数学, 1-2, 1957
Lurje, A.I.: Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. Akademie-Verl. Berlin (1963)
- 3) 藤原松三郎: 行列および行列式, 岩波全書 (1952)
遠山 啓: 行列論, 共立全書 (1965)
Zurmühl, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer-Verl. Berlin/Göttingen/Heidelberg (1964)
- 4) Hellman, O.: Die Anwendung des Matrizanten bei Eigenwertaufgaben. ZAMM. 35 (1955) Nr. 8, p. 300
- 5) Timoshenko and Goodier.,: Theory of Elasticity. McGraw-Hill. New York/Toronto/London (1951)

(1966. 8. 11・受付)