

# 摩擦杭周囲の地盤の応力の一計算式\*

## STRESS IN THE GROUND AROUND A FRICTION PILE

西田義親\*\*・射場正和\*\*\*・中川誠志\*\*\*

By Yoshichika Nishida, Masakazu Iba and Seishi Nakagawa

### 1. ま え が き

荷重をささえる杭のため地盤内に生じる応力を求めることは、基礎工の設計のみならず他の土質工学上の問題と関連して必要なことが多い。このような場合、杭から地盤に作用する力を、杭先から作用する先端支持力によるものと、杭の側面摩擦によるものとに分けて考えることがよく行なわれる。前者については地盤内の一点に作用する力と考へて、R.D. Mindlin<sup>1)</sup>の式を用いて計算することができる。この場合杭先がある面積をもつていて、地盤内に分布荷重として作用するときは、Mindlinの式を応用して積分により計算すればよく、その一例をすでに筆者<sup>2)</sup>は報告した。後者の力、すなわち杭の側面摩擦によって地盤内に生じる応力は、もちろんMindlinの式を用いても計算できる。その方法は側面摩擦を杭軸にそって作用するいくつかの集中荷重におきかえて、それぞれの集中荷重によって生じる応力を重ね合わせればよい。最近の電子計算機の発達によってこの種の方法が試みられようとしている<sup>3)</sup>。このような計算はすでにR.D. Burmister<sup>4)</sup>によって一部発表されている。一方H.A. Martins<sup>5)</sup>は側面摩擦が深さに無関係に一定の場合にMindlinの式を積分して地盤内の鉛直応力の状態を示す影響図を示しているが、他の方向の応力についてはあてていない。Mindlinと同じ計算式は、その後、棚橋<sup>6)</sup>、最上<sup>7)</sup>、A. Kezdi<sup>8)</sup>らの諸氏によって発表されている。そのうち棚橋らは側面摩擦による応力の検討に用いているが、その方法は上述のBurmisterやMartinsのやり方と同じである。

いずれにしても上に述べた方法を応用する場合には、荷重をうけた杭の側面摩擦の分布をまず知る必要がある。この側面摩擦は、杭先支持力の有無、杭の寸法や、剛性、杭の沈下の性状、周囲地盤の性質、荷重の大きさ特に最大支持力に対する割合等と種々の因子に関係してくるものと思われる。実測の結果によると、杭の側面摩擦は地表面から深さにしたがって増大し、ある深さになると再び杭先に近づくにつれて減少している。これは杭先支持力が作用する場合に常にみられることとであるが、杭先支持力の作用しない摩擦杭や、ま最大支持力に到達

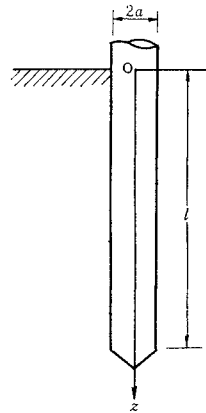
して杭が降伏沈下している場合の側面摩擦の分布については議論すべき余地や不明の点がある。したがって杭の側面摩擦は粘着性のない土の土圧論で扱われるように深さに比例して大きくなるものとするか、または粘土の粘着力のように深さに無関係に一定であると仮定して考察することが多い。

もちろんその場合にさらに検討すべき点があるが、本文はそのような側面摩擦の分布をする摩擦杭が荷重をささえたとき、杭の周囲の地盤内の応力成分がつりあいの条件を満たし、地表面で鉛直応力とせん断応力が作用せず、杭からはなれた遠方では自然の地盤状態に一致するように計算した結果を示す。他の適当な方法がないので、最初の段階として、地盤を弾性体と考へて計算することは許されるべきである。なおこの結果は、比較的長い摩擦杭の周囲で杭長より浅い地盤内の応力計算に限られるべきである。

### 2. 基 本 式

地表面水平な地盤に、鉛直に1本の杭が打ちこまれて

図-1



いるものとする。地表面にある杭断面の中心に座標の原点をもち、杭軸をz軸とする円柱座標(r, t, z)を用いる(図-1参照)。σ<sub>r</sub>, σ<sub>t</sub>, σ<sub>z</sub>をr, t, z方向の垂直応力、τをせん断応力、γを土の容積密度とすると、応力のつりあいの微分方程式は、対称の性質か

らつぎのようになる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \gamma = 0 \dots\dots\dots(2)$$

Eを土のヤング係数、mを土のポアソン数、u, wをそれぞれr, z方向の土の変位とすると、応力とひずみ

\* 第2回汎米土質基礎会議(1963)で一部発表

\*\* 正会員 金沢大学教授 工学部

\*\*\* 学生会員 金沢大学大学院修士課程学生

の間にはつぎの関係がある。

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \dots\dots\dots(3)$$

$$\sigma_z = \frac{m(m-1)E}{(m+1)(m-2)} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \dots\dots\dots(4)$$

$$\sigma_r = \frac{m(m-1)E}{(m+1)(m-2)} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(5)$$

$$\sigma_t = \frac{m(m-1)E}{(m+1)(m-2)} \frac{u}{r} + \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \dots\dots\dots(6)$$

式(3),(4),(5),(6)を式(1),(2)にそれぞれ代入して整理すると変位のつりあいの式として次式を得る。

$$2(m-1) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + (m-2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$m \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + (m-2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2(m-1) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2(m+1)(m-2)}{mE} r = 0 \dots\dots\dots(8)$$

式(7)をzで微分し、式(8)をrで微分する。また

$$\Delta \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \text{と記号すると}$$

$$2(m-1) \Delta \frac{\partial u}{\partial z} + (m-2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial z} + m \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$m \Delta \frac{\partial u}{\partial z} + (m-2) \Delta \frac{\partial w}{\partial r} + 2(m-1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots(10)$$

式(9)に2(m-1)を乗じたものから式(10)にmを乗じたものを引くと

$$\{4(m-1)^2 - m^2\} \Delta \frac{\partial u}{\partial z} + 2(m-1)(m-1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial z} - m(m-2) \Delta \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

さらに式(9)と式(11)から $\partial w/\partial r$ を消去するため前者に(m-2) $\Delta$ をかけ、後者に $\partial^2/\partial z^2$ をかけて引くと次式を得る。

$$\Delta^2 \frac{\partial u}{\partial z} + 2r \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^4}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

同様な計算を行なうと上式の $\partial u/\partial z$ の代りに、 $\partial w/\partial r$ とにおいて同じ型の式が得られる。したがって、

$$\left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 x = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 x = 0 \dots\dots\dots(12)$$

ただし  $x = \partial u/\partial z$  または  $\partial w/\partial r$  とする。式(12)の解はxをrのみの関数R(r)とzのみの関数Z(z)の積  $x = R \cdot Z$  に仮定して解くことができる<sup>9)</sup>。式(12)の一般解は<sup>10)</sup>

$$x = \sum A \cos(kz + \alpha) I_1(kr) + B \cos(kz + \beta) K_1(kr) + C \cos(kz + \eta) r I_0(kr) + D \cos(kz + \delta) r K_0(kr) + Fz \cos(kz + \epsilon) I_1(kr) + Gz \cos(kz + \theta) K_1(kr) \dots\dots\dots(13)$$

ここに、A, B, C, D, F, G,  $\alpha, \beta, \eta, \delta, \epsilon, \theta, k$  は定数で、 $I_1(kr), I_0(kr), K_1(kr), K_0(kr)$  はkをパラメータとしrを変数とする変形ベッセル関数である。たとえ杭が存在していても杭から離れた遠方  $r \rightarrow \infty$  の点においては地盤の変位の変化はないから  $\partial w/\partial r$  も  $\partial u/\partial z$  も0となるはずである。したがって式(13)でつぎのようにおかねばならない。

$$A = C = F = 0 \dots\dots\dots(14)$$

地盤内にある鉛直の杭が荷重をうけると、杭に近い地表面はいくぶんか沈下傾斜するものと思われる。したがって  $z=0$  のとき ( $r \neq \infty$  で)  $\partial w/\partial r \neq 0$  のためには式(13)に含まれる定数は、

$$\beta = \delta = 0 \dots\dots\dots(15)$$

また  $\partial w/\partial r$  がzの偶関数であることより

$$\theta = \pi/2 \dots\dots\dots(16)$$

式(14),(15),(16)を式(13)に入れて積分すると、 $x = \partial u/\partial z$  または  $x = \partial w/\partial r$  であるから、つぎの結果を得る。

$$u = f(r) + BK_1(kr) \frac{1}{k} \sin kz + Dr K_0(kr) \frac{1}{k} \sin kz + GK_1(kr) \times \left\{ \frac{1}{k} z \cos kz - \frac{1}{k^2} \sin kz \right\} \dots\dots\dots(17)$$

$$w = g(z) - B'K_0(kr) \frac{1}{k} \cos kz - D'rK_1(kr) \frac{1}{k} \cos kz + G'K_0(kr) \times \frac{1}{k} z \sin kz \dots\dots\dots(18)$$

ここに、B', D', G' は積分定数で f(r) はrのみの関数、g(z) はzのみの関数である。式(7),(8)から式(13)に至るまでは、何回も微分をくり返しているから積分すると未知の係数が入ってきている。そこで式(17),(18)の結果を式(7),(8)に代入して検査すると、つりあいの条件を満たすためには、つぎの関係が存在しなければならないことがわかる。

$$\left. \begin{aligned} G &= G', \quad D = D' \\ mk(B - B') &= 4(m-1)G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= C_1 + \frac{C_2}{r} \\ g(z) &= \frac{(m+1)(m-2)}{Em(m-1)} \frac{1}{2} r z^2 + C_3 z + C_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここに、C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> は積分定数である。

3. 境界条件

地表面ではせん断応力は作用しないから、 $z=0$  で式 (4) で示す  $\tau$  が 0 であるためには、式 (13) の関係よりつぎの結果を得る。

$$B+B'=0; D+D'=0 \dots\dots\dots(21)$$

この式 (21) と、式 (19) とをあわせ計算して、

$$\left. \begin{aligned} D=D'=0 \\ B=\frac{2(m-1)}{m} \frac{1}{k} G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

なる結果を得る。一方、杭からはなれた遠方のところでは地盤の水平変位はないから、式 (17) で  $r \rightarrow \infty$  としたとき  $u=0$  であるためには、式 (20) で示される  $f(r)$  にふくまれる係数から、

$$C_1=0$$

さらに、杭からはなれたところでは、鉛直方向の垂直応力、 $\sigma_z$  は深さに比例して  $r z$  に等しいはずであるから、式 (18) を式 (4) に代入して  $r \rightarrow \infty$  とおくと、式 (20) で示される  $g(z)$  の係数のうち、つぎの結果を得る。

$$C_3=0 \dots\dots\dots(24)$$

また、杭からはなれたところでは、地表面の鉛直方向の変位は 0 であることより、式 (18) で  $r \rightarrow \infty$  として  $z=0$  のとき  $w=0$  であるためには、式 (20) に示される  $g(z)$  の係数のうちつぎの関係を得る。

$$C_4=0 \dots\dots\dots(25)$$

4. 応力の計算

上述の結果を式 (3), (4), (5), (6) に代入すると、杭の周囲の地盤内の応力をつぎのようあたえることができる。

$$\tau = \Sigma \frac{mE}{m+1} G \cdot K_1(kr) z \sin kz \dots\dots\dots(26)$$

$$\sigma_z = r z + \Sigma \frac{mE}{m+1} G K_0(kr) \left\{ \frac{1}{k} \sin kz - z \cos kz \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$$\equiv r z + \nu \sigma_z \dots\dots\dots(27)'$$

$$\sigma_r = \frac{r z}{m-1} + \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + \Sigma \frac{mE}{m+1} G \left[ \left\{ K_0(kr) + \frac{m-2}{m} \frac{K_1(kr)}{kr} \right\} \frac{1}{k} \sin kz + \left\{ K_0(kr) + \frac{K_1(kr)}{k} z \cos kz \right\} \right] \dots\dots\dots(28)$$

$$\equiv \frac{r z}{m-1} + \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + \Delta \sigma_r \dots\dots\dots(28)'$$

$$\sigma_t = \frac{r z}{m-1} - \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + \Sigma \frac{mE}{m+1} G \left[ \left\{ \frac{2}{m} K_0(kr) - \frac{m-2}{m} \frac{K_1(kr)}{kr} \right\} \frac{1}{k} \sin kz - \frac{K_1(kr)}{kr} z \cos kz \right] \dots\dots\dots(29)$$

$$\equiv \frac{r z}{m-1} - \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + \Delta \sigma_t \dots\dots\dots(29)'$$

もし杭の側面と地盤との間に摩擦応力がないときは、 $r=a$  のとき  $\tau=0$  となるから、式 (26) にふくまれる係数  $G$  は 0 となるべきである。その場合には  $\Delta \sigma_z, \Delta \sigma_r, \Delta \sigma_t$  は 0 となって式 (27), (28), (29) はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z = r z \\ \sigma_r = \frac{r z}{m-1} + \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} \\ \sigma_t = \frac{r z}{m-1} - \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

すなわち、杭の側面から  $\frac{mE}{m+1} C_2$  なる水平の垂直応力 (内圧) のみが作用した場合の地盤に生じる応力の状態を示していることになる。もしこの内圧がなければ地盤内の応力は自然の状態になる。式 (30) で示される応力の状態は杭からある程度はなれた範囲の外の地盤において成立するもので、地盤の土の強度が十分に大でない限り、杭に近いある範囲の土は破壊されるはずである。このような考えにより式 (30) を基にして係数  $C_2$  を決定し、筆者は締固め杭の機構<sup>11), 12)</sup>や杭のために生じる間げき水圧等<sup>13)</sup>の計算を行なった。

いずれにしても杭の側面摩擦により地盤内に生じる応力を考察するには、式 (26), (27), (28), (29) に示される各項のうち、 $G$  なる係数のついた  $\Sigma$  の項  $\tau, \Delta \sigma_z, \Delta \sigma_r, \Delta \sigma_t$  だけとり出して考えればよいことになる。この場合、未知の係数は  $G$  と  $k$  である。

5. 表面の鉛直変位が一様な場合の応力の計算

杭基礎の上に構造物が載荷剛結され、基礎床版のため、地盤の変形が拘束され、地表面の鉛直変位は一様であると考えなければならないときがある。この場合、地表面にはもちろん床版からの鉛直圧力が作用している。この上部構造物からはたらく圧力は、別に重ね合わせて計算することができるから、いま、杭の影響のみ考え計算するために、地盤表面では、鉛直の垂直応力も、せん断応力も作用しないものとして計算する。すなわち本文で扱うような 1 本の杭の場合、式 (13) において  $z=0$  で  $\partial w / \partial r = 0$  であるためには  $B=D=0$  か、または  $\beta = \delta = \pi/2$  となる。ところが前者の条件を用いると  $x=0$  となって不適当であるから、後者の条件で計算をすすめる。地表面  $z=0$  で、 $\tau=0, \sigma_z=0$  という境界条件をあわせて計算すると、結局つぎの結果を得る<sup>14)</sup>。

ただし、前の式と混乱をさけるために係数  $G$  の代りに  $G_1$  を用いる。

$$\tau = \Sigma \frac{mE}{m+1} G_1 K_1(kr) \frac{1}{k} (\sin kz + kz \cos kz) \dots\dots\dots(31)$$

$$\sigma_z = rz + \Sigma \frac{mE}{m+1} G_1 K_0(kr) z \sin kz \dots\dots(32)$$

$$= rz + d\sigma_z \dots\dots(32)'$$

$$\sigma_r = \frac{rz}{m-1} + \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + \Sigma \frac{mE}{m+1} G_1 \left[ \left\{ K_0(kr) + \frac{m-1}{m} \frac{K_1(kr)}{kr} \right\} \frac{2}{k} \cos kz - \left\{ K_0(kr) - \frac{K_1(kr)}{kr} \right\} z \sin kz \right] \dots\dots(33)$$

$$= \frac{rz}{m-1} + \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + d\sigma_r \dots\dots(33)'$$

$$\sigma_t = \frac{rz}{m-1} - \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + \Sigma \frac{mE}{m+1} G_1 \left[ \left\{ \frac{1}{m} K_0(kr) - \frac{m-1}{m} \frac{K_1(kr)}{kr} \right\} \frac{2}{k} \cos kz - \frac{K_1(kr)}{kr} z \sin kz \right] \dots\dots(34)$$

$$= \frac{rz}{m-1} - \frac{mE}{m+1} \frac{C_2}{r^2} + d\sigma_t \dots\dots(34)'$$

杭の側面と地盤との間に摩擦応力がない場合には、前に述べたと同じように  $G_1$  のついた項を除けばよくその結果は  $d\sigma_z, d\sigma_r, d\sigma_t$  は 0 となり、式 (30) と全く同じ形になる。そしてまた未知の係数は  $G_1$  と  $k$  である。

6. 係数  $G$  または  $G_1$  と  $k$  の決定

さきにも述べたように杭の側面摩擦の影響は、式 (26) ~ (29) および式 (31) ~ (34) の各式のうち  $G, G_1, k$  のついた項を考えればよい。そしてあたえられた問題の条件を級数に展開して、上述の各式と対比し、 $G, G_1, k$  を決定することになる。ところがこの無限級数を計算することは、複雑さを増すだけであるから、実用的な見地からそのうちの 1 個のみをとりあげて、境界条件や土の力学的性質上の条件に適合するように  $G$  (または  $G_1$ ) と  $k$  を決定した方が簡単であって、問題によってはむしろ適当なやり方と思われる場合がある。筆者はこのようにして、杭の支持力<sup>15)</sup>や杭のために生じる間げき水圧<sup>16)</sup>を計算した。一般的にいえば、 $G$  または  $G_1$  と  $k$  は、 $r$  と  $z$  の関数でない限り、いかなる定数であってもよく、 $G$  または  $G_1$  と  $k$  との間にはどんな関係があってもよい。さらに定数でありさえすればいくつであってもよい。この多くの  $k$  の値を用いる一例として、筆者は杭の沈下を表わす式<sup>17)</sup>を示した。

しかしながらもっと一般的な場合として、 $k$  なる定数が非常に小さい値から非常に大きい値まで連続的な値をとり、それぞれの  $k$  の値に対する級数各項の総和を求めることとする。すなわち式 (26) ~ (29) と式 (31) ~ (34) にふくまれる  $\Sigma$  の代りに  $k$  について 0 から  $\infty$  まで定積分した結果、地盤内の応力状態を表わす式を示そうとするのである。さきにも述べたように、 $G$  または  $G_1$  は  $k$  の一般的な関数であるが、計算の技法上、その特別の場合として、式 (26) ~ (29) の場合には  $G$  は  $k$  と無関係な定数として扱い、式 (31) ~ (34) の場合には  $G_1$  は  $k$  に比例するもの ( $G_1 = G_0 k, G_0$  は定数) として計算をすすめる。

7. 積分の計算

まず地表面の鉛直変位のある場合の計算を行なう。式 (26) の級数和の代りに  $k$  で積分すると、

$$\tau = \int_0^\infty \frac{mE}{m+1} G K_1(kr) z \sin kz dk = \frac{mE}{m+1} G \left\{ - \left[ \frac{z}{r} K_0(kr) \sin kz \right]_0^\infty + \frac{z}{r} \int_0^\infty K_0(kr) z \cos kz dk \right\} \dots\dots(35)$$

ところが第 1 項は  $k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  でともに 0 になるから第 2 項だけ残って、

$$\tau = \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi z^2}{2r} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \dots\dots(36)$$

式 (27) および (27)' より

$$d\sigma_z = \int_0^\infty \frac{mE}{m+1} G K_0(kr) \left\{ \frac{1}{k} \sin kz - z \cos kz \right\} dk \dots\dots(37)$$

第 1 項の積分は  $K_0(kr) = \int_0^\infty \frac{\cos(krt)}{\sqrt{t^2+1}} dt$  を利用して

$$I \equiv \int_0^\infty K_0(kr) \frac{1}{k} \sin kz dk = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \int_0^\infty \frac{1}{k} \sin(kz) \cos(krt) dk dt \dots\dots(38)$$

ところが  $\int_0^\infty \frac{1}{k} \sin(kz) \cos(krt) dk$  の値は  $z > |rt|$  に対しては  $\frac{\pi}{2}, z = |rt|$  に対しては  $\frac{\pi}{4}, z < |rt|$  に対しては 0 であるから、

$$I \equiv \int_0^{z/r} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt + \int_{z/r}^\infty \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt + \int_{z/r}^\infty 0 \times \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{\pi}{2} [\text{arc sinh } t]_0^{z/r} + 0 + 0 = \frac{\pi}{2} \text{arc sinh } \frac{z}{r}$$

したがって第 2 項の積分と合わせて次の結果を得る。

$$d\sigma_z = \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \text{arc sinh } \frac{z}{r} - \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right\} \dots\dots(39)$$

つぎの式 (28), (28)', (29), (29)' の積分はそのままでは困難であるので、つぎのように行なう。式 (27)', (28)', (29)' より

$$d\sigma_z + d\sigma_r + d\sigma_t = \Sigma \frac{mE}{m+1} G \frac{2(m+1) K_0(kr)}{m} \frac{1}{k} \sin kz \dots\dots(40)$$

したがって  $k$  について 0 から  $\infty$  まで定積分した結果は、

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_t &= \frac{mE}{m+1} G \frac{2(m+1)}{m} \frac{\pi}{2} \operatorname{arc\,sinh} \frac{z}{r} \dots\dots(41) \end{aligned}$$

ところが  $\Delta\sigma_z$  は式 (39) で表わされるので,  $\Delta\sigma_r$  と  $\Delta\sigma_t$  の関係はつぎようになる。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_t &= \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+2}{m} \operatorname{arc\,sinh} \frac{z}{r} + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right\} \dots\dots(42) \end{aligned}$$

式 (26)~(29) で示される  $\tau$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  の応力は, 式 (1), (2) で示されるつりあいの条件を満たしており, またそのなかの一部である  $z$  方向の応力成分  $r z$ ,  $r$  方向の応力成分  $\left( \frac{r z}{m-1} + \frac{mE C_2}{m+1} \frac{1}{r^2} \right)$ ,  $t$  方向の応力成分  $\left( \frac{r z}{m-1} - \frac{mE C_2}{m+1} \frac{1}{r^2} \right)$  は明らかに式 (1), (2) のつりあいの条件を満たしているから, 式 (27)~(29)' の式で示される応力成分  $\Delta\sigma_z$ ,  $\Delta\sigma_r$ ,  $\Delta\sigma_t$  と  $\tau$  はつりあいの条件を満たしていることになる。したがって, 式 (35) と式 (42) を式 (1) に代入して整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \Delta\sigma_r &= \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+2}{m} \frac{1}{r} \operatorname{arc\,sinh} \frac{z}{r} - \frac{z}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{z^3}{r} \frac{1}{(r^2+z^2)^{3/2}} \right\} \dots\dots(43) \end{aligned}$$

上式を積分して

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r &= \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+2}{2m} \operatorname{arc\,sinh} \frac{\pi}{r} - \frac{m-2}{m} \frac{z}{r^2} \sqrt{r^2+z^2} - \frac{z^3}{r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right\} + \frac{C_5(z)}{r^2} \dots\dots(44) \end{aligned}$$

式 (44) を式 (42) に代入して

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_t &= \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+2}{2m} \operatorname{arc\,sinh} \frac{z}{r} + \frac{m-2}{m} \frac{z}{r^2} \sqrt{r^2+z^2} + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{C_5(z)}{r^2} \right\} \dots\dots(45) \end{aligned}$$

式 (28), (29) において  $G=0$  とすると  $\Delta\sigma_r = \Delta\sigma_t = 0$  となるから式 (44), (45) にふくまれる積分定数は  $C_5(z)=0$  となるべきである。

つぎに地表面の鉛直変位のない場合の計算を行なう。

式 (31) において  $G_1=G_0 k$  とおいて,

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\infty \frac{mE}{m+1} G_0 K_1(kr) (\sin kz + kz \cos kz) dk \\ &= \frac{mE}{m+1} G_0 \left[ -\frac{K_0(kr)}{r} \sin kz \right]_0^\infty \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_0^\infty K_0(kr) z \cos kz dk \\ &\quad + \int_0^\infty z K_1(kr) k \cos kz dk \dots\dots(46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tau &= \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \left[ \frac{z}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{r z}{r^2+z^2} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right] \dots\dots(47) \end{aligned}$$

式 (32), (32)' において  $G_1=G_0 k$  とおいて

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_z &= \int_0^\infty \frac{mE}{m+1} G_0 k K_0(kr) z \sin kz dk \dots\dots(48) \\ &= \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \frac{z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \dots\dots(49) \end{aligned}$$

また式 (32)', (33)', (34)' から  $G_1=G_0 k$  として

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_t &= \Sigma \frac{mE}{m+1} G_1 2 \frac{m+1}{m} K_0(kr) \frac{1}{k} \cos kz \\ &= \int_0^\infty \frac{mE}{m+1} G_0 2 \frac{m+1}{m} K_0(kr) \cos kz dk \\ &= \frac{mE}{m+1} G_0 2 \frac{m+1}{m} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \dots\dots(50) \end{aligned}$$

式 (49) と (50) から  $\Delta\sigma_r$  と  $\Delta\sigma_t$  の関係を求めると

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_t &= \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{2(m+1)}{m} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{z^2}{r^2+z^2} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right\} \dots\dots(51) \end{aligned}$$

となるから, まえと同じように式 (47) と式 (51) を式 (1) に代入して積分すると

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r &= \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \left[ \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} - \frac{2}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 + 2 \frac{z^2}{r^2} \right) + \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \right] + \frac{C_6(z)}{r^2} \dots\dots(52) \end{aligned}$$

また, したがって式 (51) と (52) からつぎの結果を得る。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_t &= \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left\{ \frac{3m+2}{m} + 4 \frac{z^2}{r^2} \right\} - \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} \right] - \frac{C_6(z)}{r^2} \dots\dots(53) \end{aligned}$$

式 (33), (34) において  $G_1=0$  すなわち  $G_0=0$  とおくと  $\Delta\sigma_r = \Delta\sigma_t = 0$  となるから式 (52), (53) にある積分定数は  $C_6(z)=0$  となるべきである。

### 8. 荷重と側面摩擦

いま杭頭にかかる荷重を  $Q$  とする。はじめに述べたように摩擦杭はこの荷重を杭側面のせん断抵抗でささえるわけであるから, かりに杭が半径  $a$ , 杭長  $l$  の場合つぎの関係が成立する。

$$Q = 2\pi a \int_{z=0}^l \tau_{r=a} dz \dots\dots(54)$$

式 (36) を式 (54) に代入することによって, 未知の係数  $G$  はつぎのように決定できる。

$$\begin{aligned} \frac{mE}{m+1} G = 2Q/\pi^2 l^2 \left\{ \sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}} + \frac{a^2}{l^2} \log \frac{a/l}{1 + \sqrt{1 + a^2/l^2}} \right\} \dots\dots(55) \end{aligned}$$

また式(47)を式(54)に代入することによって  $G_0$  なる係数はつぎのように決定できる。

$$\frac{mE}{m+1} G_0 = \frac{Q}{\pi^2 l} \left\{ \sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}} - \frac{a^2}{l^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}}} \right\} \dots (56)$$

杭径にくらべて杭長の大きな細長い杭の場合には、近似的に、

$$\frac{mE}{m+1} G = \frac{2Q}{\pi^2} \frac{1}{l^2} \dots (57)$$

$$\frac{mE}{m+1} G_0 = \frac{\theta Q}{\pi^2} \frac{1}{l} \dots (58)$$

とおいてよい。このようにして、式(36)、(39)、(44)、(45)および式(47)、(49)、(52)、(53)で示される応力成分の表示式にふくまれる未知の係数  $G$  および  $G_0$  を決定することができる。

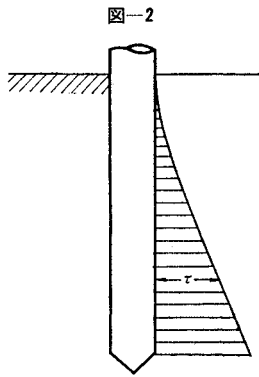
さて式(36)に示される側面摩擦の分布は杭の側面のところを  $r=a$  として、

$$\tau \propto \frac{z^2}{a \sqrt{a^2 + z^2}} \dots (59)$$

となるから、 $a$ にくらべて $z$ の小さい、地表にごく近い浅いところでは  $\tau \propto z^2$  となるが、ある程度深くなると、 $z$ の大きさにくらべて $a$ を無視すると、

$$\tau \propto \frac{z}{a^2} \dots (60)$$

となり、側面摩擦は深さに比例し、いわゆる三角形分布になることがわかる。したがって杭の側面摩擦が図-2に示すような三角形分布をするときは、地盤内の垂直応力の変化は式(39)、(44)、(45)のようになるはずである。



つぎにまた式(47)に示される側面摩擦の分布は  $r=a$  として

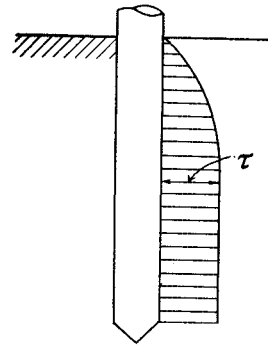
$$\tau \propto \frac{z}{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \left\{ 1 + \frac{a^2}{a^2 + z^2} \right\} \dots (61)$$

となるから、杭径  $a$  にくらべて  $z$  の小さい地表に近いところでは  $\tau \propto z$  となるが、ある程度深くなると  $z$  の大きさにくらべて  $a$  を無視して、

$$\tau \propto \frac{1}{a} \dots (62)$$

となって、側面摩擦は深さに無関係な一定の値となる。したがって、杭の側面摩擦が、図-3に示すような長方形に近い分布をするときは、地盤内の垂直応力の変化は式(49)、(52)、(53)のようになるはずである。

図-3



### 9. 杭の周囲の地盤内の応力

さて式(55)、(56)から明らかなように、荷重  $Q$  が作用しない場合には  $G=G_0(=G_1)=0$  となるから、まえにも述べたように地盤内の応力は自然の状態に等しいはずで、水平方向の垂直応力は自然の静止土圧に等しくなるべきである。したがって式(28)、(29)または式(30)、さらに式(33)、(34)で示される  $\sigma_r$ 、 $\sigma_t$  の式の右辺第1項である  $r z / (m-1)$  の項は、 $r \rightarrow \infty$  における水平の弾性変位の条件を多少ぎせいにし、 $N_0 r z$  (ただし  $N_0$  は静止土圧係数)とおきかえた方が、より実状に近く合理的と思われる。ただし荷重をささえる杭のため、地盤の自然状態の応力にくらべて新たに生じる応力の間には弾性変位の条件は成立している。杭が地盤を横方向に押圧する締固め作用のともなわない場合には、式(28)、(29)、(30)および式(33)、(34)にふくまれる係数  $C_2$  は0となる。このように係数を変えても、それぞれの式は地盤内の応力のつりあいの条件を依然満足していることは、いうまでもなく明らかである。したがって地盤内の応力は、つぎのように表現される。

杭側面の摩擦分布がほぼ深さに比して増加する場合

$$\tau = \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \frac{z^2}{r \sqrt{r^2 + z^2}} \dots (63)$$

$$\sigma_z = r z + \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \text{arc sinh} \frac{z}{r} - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right\} \dots (64)$$

$$\sigma_r = N_0 r z + \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+2}{2m} \text{arc sinh} \frac{z}{r} - \frac{m-2}{m} \frac{z}{r^2} \sqrt{r^2 + z^2} - \frac{z^3}{r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right\} \dots (65)$$

$$\sigma_t = N_0 r z + \frac{mE}{m+1} G \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+2}{2m} \text{arc sinh} \frac{z}{r} + \frac{m-2}{m} \frac{z}{r^2} \sqrt{r^2 + z^2} + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right) \right\} \dots (66)$$

杭側面の摩擦分布が深さにあまり関係なく、ほぼ一定の値をとる場合

$$\tau = \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{z}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \right\} \dots\dots\dots(67)$$

$$\sigma_z = rz + \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \frac{z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \dots\dots\dots(68)$$

$$\sigma_r = N_0 r z + \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} - \frac{2}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 + 2 \frac{z^2}{r^2} \right) + \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \right\} \dots\dots\dots(69)$$

$$\sigma_t = N_0 r z + \frac{mE}{m+1} G_0 \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( \frac{3m+2}{m} + 4 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} \right\} \dots\dots\dots(70)$$

式 (63)~(70) に含まれる係数  $\frac{mE}{m+1} G$ ,  $\frac{mE}{m+1} G_0$

は、それぞれ式 (55), (56) で与えられている。

さて地盤に関する土質工学上の種々の問題を検討するとき、主応力の計算を必要とすることがある。この場合は、上の式 (63)~(66), または式 (67)~(70) をつぎの関係<sup>18)</sup>に入れればよい。

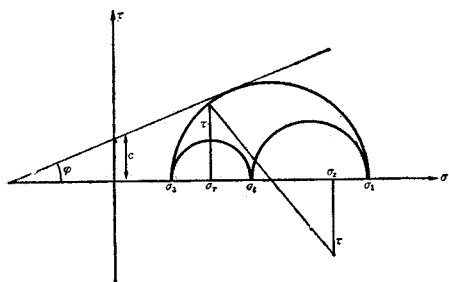
$$\sigma^3 - (\sigma_z + \sigma_r + \sigma_t) \sigma^2 + (\sigma_z \sigma_r + \sigma_r \sigma_t + \sigma_t \sigma_z - \tau^2) \sigma + \sigma_z \sigma_r \sigma_t + \sigma_t \tau^2 = 0 \dots\dots\dots(71)$$

この3次式を解けば3つの主応力が求まる。しかし、この計算はあまり簡単ではない。そこでつぎのような計算を考える。

杭軸に関する対称の性質から、式 (63)~(70) で示される垂直応力のうち、杭軸をむくむ鉛直面に垂直な応力  $\sigma_t$  は主応力の一つであることは明らかである。自然の地盤では、鉛直垂直応力  $\sigma_z$  が最大主応力  $\sigma_1$  で、水平垂直応力の  $\sigma_r$  と  $\sigma_t$  が最小主応力  $\sigma_3$  である。したがって杭が荷重をうけて沈下をしようとし、側面に摩擦が発生した場合、式 (66) または式 (70) で示される  $\sigma_t$  は自然の状態から多少変化するが、中間主応力  $\sigma_2$  または最小主応力  $\sigma_3$  のいずれかであると思われる。そこでまず第一に  $\sigma_t$  が中間主応力  $\sigma_2$  であると仮定して計算を行なう。この場合、図-4 に示すモールの応力円を利用して計算すると<sup>19)</sup> つぎのようになる。

杭の側面摩擦が深さにほぼ比例して増加する場合式 (63), (64), (65), (66) から

図-4



$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \frac{X}{2} \left[ \frac{3m+2}{2m} \text{arc sinh } \frac{z}{r} - \frac{m-2}{m} \frac{z}{r^2} \sqrt{r^2+z^2} \right. \\ & \left. - \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right) + (N_0+1) \frac{r z}{X} \right] \\ & - \frac{X}{2} \left[ \left( \frac{m-2}{2m} \right)^2 \text{arc sinh}^2 \frac{z}{r} + \left( \frac{m-2}{m} \right)^2 \frac{z^2 (r^2+z^2)}{r^4} \right. \\ & \left. + \frac{z^2}{r^2+z^2} \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^2 + 2 \left\{ \frac{(m-2)^2}{2m^2} \cdot \frac{z}{r^2} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{r^2+z^2} \text{arc sinh } \frac{z}{r} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{z^2}{r^2} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \frac{m-2}{2m} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \text{arc sinh } \frac{z}{r} \right\} \\ & + 2 \left\{ - \frac{m-2}{2m} \text{arc sinh } \frac{z}{r} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{z}{r^2} \cdot \sqrt{r^2+z^2} \right. \\ & \left. + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \right\} \times (N_0-1) \frac{r z}{X} \\ & + (N_0-1)^2 \frac{r^2 z^2}{X^2} \Big]^{1/2} \dots\dots\dots(71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_t = N_0 r z + X \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{m+2}{2m} \text{arc sinh } \frac{z}{r} \right. \\ \left. + \frac{m-2}{m} \cdot \frac{z}{r^2} \times \sqrt{r^2+z^2} + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right) \right\} \dots\dots\dots(72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = & \frac{X}{2} \left[ \frac{3m+2}{2m} \text{arc sinh } \frac{z}{r} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{z}{r^2} \cdot \sqrt{r^2+z^2} \right. \\ & \left. - \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right) + (N_0+1) \frac{r z}{X} \right] \\ & + \frac{X}{2} \left[ \left( \frac{m-2}{2m} \right)^2 \text{arc sinh}^2 \frac{z}{r} + \left( \frac{m-2}{m} \right)^2 \frac{z^2 (r^2+z^2)}{r^4} \right. \\ & \left. + \frac{z^2}{r^2+z^2} \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^2 + 2 \left\{ \frac{(m-2)^2}{2m^2} \cdot \frac{z}{r^2} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{r^2+z^2} \text{arc sinh } \frac{z}{r} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{z^2}{r^2} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \frac{m-2}{2m} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \text{arc sinh } \frac{z}{r} \right\} \\ & + 2 \left\{ - \frac{m-2}{2m} \text{arc sinh } \frac{z}{r} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{z}{r^2} \sqrt{r^2+z^2} \right. \\ & \left. + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \right\} \times (N_0-1) \frac{r z}{X} \\ & + (N_0-1)^2 \frac{r^2 z^2}{X^2} \Big]^{1/2} \dots\dots\dots(73) \end{aligned}$$

ただし、係数  $X$  は、 $\frac{mE}{m+1} G$  を表わし、式 (55) であたえられる。

杭の側面摩擦が深さに関係なくほぼ一定の場合式 (67), (68), (69), (70) から、

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \frac{Y}{2} \left[ \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} + \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( -1 - 4 \frac{z^2}{r^2} \right) \right. \\ & \left. + (N_0+1) \frac{r z}{Y} \right] - \frac{Y}{2} \left[ \left( \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2+z^2} \left\{ -2 - 4 \frac{z^2}{r^2} + \frac{r^2-z^2}{r^2+z^2} \right\}^2 \right. \\ & \left. + 2 \left( \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \left( -2 - 4 \frac{z^2}{r^2} + \frac{r^2-z^2}{r^2+z^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+2(N_0-1)\frac{r z}{Y} \times \left\{ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( -2-4\frac{z^2}{r^2} + \frac{r^2-z^2}{r^2+z^2} \right) \right\} + (N_0-1)^2 \frac{r^2 z^2}{Y^2} \\ + 4\frac{z^2}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2+z^2} \left\{ 1 + \frac{2r^2}{r^2+z^2} + \left( \frac{r^2}{r^2+z^2} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(74)$$

$$\sigma_2 = \sigma_t = N_0 r z + Y \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( \frac{3m+2}{m} + 4\frac{z^2}{r^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} \right\} \dots\dots\dots(75)$$

$$\sigma_3 = \frac{Y}{2} \left[ \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} + \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( -1-4\frac{z^2}{r^2} \right) \right] \\ + (N_0+1) \frac{r z}{Y} + \frac{Y}{2} \left[ \left( \frac{m+1}{m} \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left\{ -2-4\frac{z^2}{r^2} + \frac{r^2-z^2}{r^2+z^2} \right\}^2 \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \left( -2-4\frac{z^2}{r^2} + \frac{r^2-z^2}{r^2+z^2} \right) \right. \\ \left. + 2(N_0-1) \frac{r z}{Y} \times \left\{ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left( -2-4\frac{z^2}{r^2} + \frac{r^2-z^2}{r^2+z^2} \right) \right\} + (N_0-1)^2 \frac{r^2 z^2}{Y^2} \right. \\ \left. + 4\frac{z^2}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2+z^2} \left\{ 1 + \frac{2r^2}{r^2+z^2} + \left( \frac{r^2}{r^2+z^2} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \dots\dots\dots(76)$$

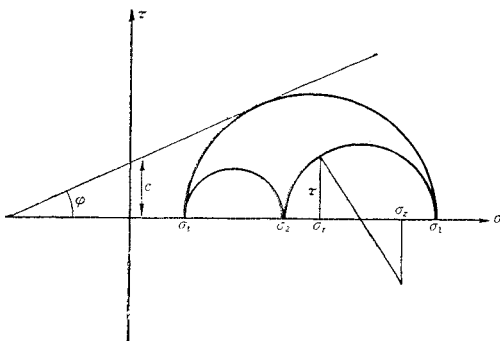
ただし、係数 Y は  $\frac{mE}{m+1} G_0$  を表わし、式 (56) で与えられる。

つぎに  $\sigma_t$  が最小主応力  $\sigma_3$  であると仮定する場合は、**図-5** に示すようなモールの応力円の関係を利用すればよい。この場合の計算結果は、上述の式 (72), (73) と式 (75), (76) において、 $\sigma_2$  と  $\sigma_3$  とを入れかえればよい。上の各式において、杭から離れた所 ( $r \rightarrow \infty$ ) では、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= r z \\ \sigma_2 &= N_0 r z \\ \sigma_3 &= N_0 r z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(77)$$

となって自然の主応力の状態に一致する。

図-5



10. 計算式の適用制限

式 (63)~(66), 式 (67)~(70), 式 (71)~(73), 式 (74)~(76) は地盤が弾性的に作動するものと仮定して求めた。したがって杭のため生じる応力により、地盤が破壊しない範囲に限られるべきである。すなわち、地盤の土の摩擦角を  $\phi$ , 粘着力を  $c$  としたとき、式 (71) と (73), または、式 (74) と (76) の間につきの制限があるべきである。

$$\sigma_1 + c \cot \phi \leq (\sigma_3 + c \cot \phi) \{ (1 + \sin \phi) / (1 - \sin \phi) \} \dots\dots\dots(78)$$

特に、 $\phi=0$  のような粘土地盤のときは、

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq 2c \dots\dots\dots(79)$$

そしてまた、 $\sigma_t$  が中間主応力と考える場合には

$$\tau \leq c \dots\dots\dots(80)$$

地盤内の応力は、杭に近づくにつれて大きくなるから、上の式 (78), (79), (80) は、一般に  $r=a$  の所で考えればよい。粘土地盤内において、中間主応力が  $\sigma_t$  であると考え、式 (80) の条件を式 (36), (47) に適用すると杭長が杭径にくらべ大きい場合、杭にかかる荷重について近似的につきのような結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} \text{側面摩擦が深さに比例する場合} & \quad Q \leq \pi a^2 c \\ \text{側面摩擦が深さに無関係で一定の場合} & \quad Q \leq 2 \pi a l c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(81)$$

なお本文は、杭の側面摩擦による応力の計算式を示しているのであるから、最初に述べたように、杭先の影響が少ない、比較的細長い杭の周囲で、杭長より浅い地盤内の計算に限って用いるべきであろう。

11. む す び

杭長  $l$ , 杭半径  $a$  の比較的細長い摩擦杭に荷重  $Q$  が作用したとき、その杭の周囲の地盤内の任意の点に生じる、鉛直方向と水平方向の3つの垂直応力、せん断応力、さらに3つの主応力を計算する式を理論的にも求めた。計算は、側面摩擦の分布が、深さに比例する場合と深さに無関係に一定の値をとる場合について行なった。地盤の表面では、鉛直の垂直応力もせん断応力も作用せず、杭から離れた遠方では、地盤の応力は自然の状態に一致する解をあたえている。本研究では、文部省科学研究費<sup>20)</sup>より一部補助をうけた。

参 考 文 献

- 1) Mindlin, R.D. : Force at A Point in the Interior of A Semi-Infinite Solid, Physics, Vol. 7, No. 5, p. 195 ~202 (1936)
- 2) 西田義親 : 地下の分布荷重によって生じる地盤内の鉛直応力と変位の一計算, 土と基礎, 第13巻第11号, p. 3 ~8 (昭40)
- 3) Thurman, A.G. : Computed Load Capacity and Movement of Friction and End-Bearing Piles Emb-



- eded in Uniform and Stratified Soils, Ph. D Thesis (Carnegie Inst Tech), pp. 112 (1964)
- 4) Burmister, D.M. : Stress Distribution for Pile Foundations, Proc. Purdue Conf. Soil Mech. p. 339~341 (1940)
  - 5) Martins, H.A. : Tensoes transmitidas ao Terreno por Estacas, Revista Politecnica, No. 146, p. 365 (1952)
  - 6) 棚橋・五十嵐 : 弾性体中の摩擦杭支持力について, 日本建築学会研究報告, 30号-10 (昭30)
  - 7) 最上武雄 : 半無限弾性体中の一点に力が作用するときの応力を求める数値表, 鹿島建設技術研究所, pp.58(1957)
  - 8) Kezdi, A. : Beiträge zur Berechnung der Spannungsverteilung im Boden, Der Bauingenieur, 33 Jah. H. 2. S. 54~58 (1958)
  - 9) Föppl, A. & Föppl, L. : Drang und Zwang, 2 er Bd. S. 140 (1928)
  - 10) 例えば木村二郎 : 耐圧試験の際に生じる円柱形物体内の応力分布及びその破壊状態について, 土木学会誌 17 卷 8号, p. 715 (昭6)
  - 11) 西田義親・保田市兵衛 : 締固め杭に関する基本的研究, 土木学会論文集, 69号, p. 38~44. (昭35)
  - 12) 西田義親 : 砂地盤に及ぼす杭の締固め範囲の計算, 土と基礎, 13 卷8号, p. 33~37 (昭38)
  - 14) 西田義親 : 杭に作用する間隙水圧の一計算法, 土木学会論文集, 98号, p. 10~14 (昭34)
  - 14) 西田義親 : 砂質地盤内の基礎杭の支持力の一計算法, 土木学会論文集, 64号, p. 48~54 (昭34)
  - 15) 西田義親 : 同上 (14)
  - 16) 西田義親 : 杭の側面摩擦による間隙水圧の一計算, 土と基礎, 14 卷3号, p. 3~6 (昭41)
  - 17) 西田義親 : The Elastic Settlement of a Pile in the Ground, Soil and Foundation, Vol. 5 No. 1, p. 31~40 (1964)
  - 18) たとえば, 湯浅亀一 : 材料力学, p. 198 (昭14)
  - 19) この計算は第2, 3 著者が行った。
  - 20) 文部省科学研究費補助金 (試験研究 No. 54005 代表西田義親) (1966.7.5・受付)
-