

地震時モールの円とその擁壁土圧への適用について

A SOLUTION OF SEISMIC EARTH PRESSURE BY THE MOHR'S CIRCLE METHOD ITS APPLICATION TO RETAINING WALL PROBLEMS

市原 松平*
By Matsuhei Ichihara

1. 緒言

Mohr の円は土質力学において、有効に使用されている。地震時においてもこれを適用すると、土中のすべり面が容易に求められ、塑性領域内の任意の面に作用する土圧を手軽に求めることができ、耐震設計上きわめて有利である。これをもう少し具体的に説明すると、従来は、実際には粘着力 c のある裏込め土を $c=0$ として、土圧計算を行ってきたが、もしも $\beta+\theta > \varphi$ (β は裏込めてんば面の水平面となす角度、 θ は地震合成角) になると、Coulomb 系の地震時土圧式でも、Rankine 系の土中の面に作用する地震時土圧を与える式^{1),2)}でも、根号内の値が負となって計算できないことになる。しかも、このことは $\beta \geq 10^\circ$ の値に対しては、往々にして起こりうることである。

この場合、裏込め砂が粘着力のないきれいな砂である場合に、裏込め砂のてんば面の傾角 β は、地震中に $\beta+\theta=\varphi$ が満足される値まで減少する。すなわち、砂が擁壁前面にすべり落ちるとみなして、地震前の β の値のいかんにかかわらず、 $\beta+\theta=\varphi$ として土圧算定を行なう場合もあるが、現実はどうだろうか。たいていの場合裏込め土には粘着力があって、地震時の裏込め土の斜面崩壊は別として、普通程度の $\beta+\theta$ の値では、裏込め土が地震力ですべり落ちるとは考えられない。ここに、裏込め土に粘着力がある場合の地震時土圧の算定が必要になってくる。

いまここでは、裏込め土砂中の面に作用する地震時土圧の求め方を考えよう。地震力が作用して擁壁が破壊するときは、裏込め土砂中に起こる塑性領域を考えなくては、土中の面に土圧式を適用することができない。このために、塑性領域を包括するすべり面を決定する必要にせまられる。しかしながら、粘着力のある地盤では、このすべり面は、 $\beta=0, \theta=0$ 以外では、曲線のすべり面になり、解析的に求めるのはいくぶんやっかいである。

ここに、地震時 Mohr の円を描き、その pole を決定すると、すべり面の方向が容易にわかり、与えられた一点から出発するすべり面を、その点から逐次描いて一連の一组のすべり面を完成させることができる。また、Mohr の円によって、塑性領域内の任意の面に作用する

応力が容易に求められる。

以下、本論文においては、地震時 Mohr の円の描き方、それによるすべり面などの求め方をのべ、解析結果との比較を示し、擁壁土圧の算定を行なってみる。

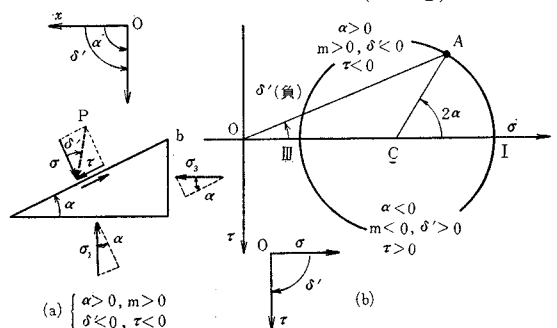
2. Mohr の円の規約

以下に示す Mohr の円は、つぎの規約^{3),4)}にしたがう。面に作用する垂直応力 σ は圧縮力を正、引張力を負とし、せん断応力 τ は、 σ と τ の合応力 p が σ の作用線よりはかって反時計まわりの向きに作用する場合を正、時計まわりの向きに作用する場合を負と規約する。

このように規約すると、 σ, τ の右手系座標では、 σ 軸の正の方向を図-1 (b) のように右方向に取ると、 τ 軸の正の方向は下方に向けてとらなくてはならない。このようにすると、Mohr の円で求めたせん断応力の符号は、解析から求めたものと一致する^{3),4)}。このことを具体的に説明するとつぎのようになる。すなわち、図-1 (a) で面 ab は、長主応力面から α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) だけ反時計まわりに回転した位置にある面で、この面に作用するせん断応力 τ は、図示された方向に向き、その大きさは $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha$ であることは、 σ_1 と σ_3 とを σ と τ の方向に分解してつりあい条件から求められる。しかしながら、面 ab の Mohr の円上の応力点 A は、長主応力面の応力点 I より反時計まわりに中心角 $\angle ICA = 2\alpha$ になるように円上にとった点である。これによれば、 A 点の τ 座標は負で与えられるから、 $\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha$ としなくてはならない。

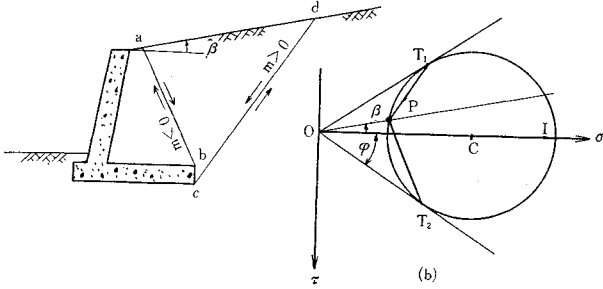
なお、Mohr の円上の応力点からせん断応力の方向を直観的に決定する方法を高木俊介氏⁵⁾ が示しているの

図-1 Mohr の円の説明 ($|\alpha| < \frac{\pi}{2}$)



* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

図-2 裏込め土砂の塑性平衡時におけるすべり面 (c=0)



で、以下これについて付言する。図-1 (a) の面 ab には、二つの τ が図示されている。これらの τ は、大きさが等しく向きが反対である。この二つの τ は偶力を形成していないが、かりに偶力のようにみなして、その回転方向を m であらわし、反時計まわりを正、時計まわりを負とすると、

$$\pi/2 > \alpha > 0 \text{ のとき, } \delta < 0, m > 0$$

$$-\pi/2 < \alpha < 0 \text{ のとき, } \delta > 0, m < 0$$

となる。 $\pi/2 > |\alpha|$ のときの α, τ, δ, m の符号が 図-1 (b) に示されている。ここで、さらに広義に解釈して、 α が任意の値のとき、応力点が σ 軸より上の半円上にあるときは、 $m > 0$ 、下の半円上にあるときに、 $m < 0$ となる。また、この逆も成立する。すなわち、 $m > 0$ の場合には、応力点は Mohr の円の上半分に位置し、 $m < 0$ の場合には、下半分に位置する。

すべり面の両側に、上述したように作用するせん断応力の方向から、すべり面につきのような名称を与える。

図-2 (a) に示すような擁壁が破壊するときには、底面上の2点 b, c をそれぞれ通るすべり面 ab と dc が裏込め土砂 ($c=0$) 中に生じ、両すべり面に囲まれた区域の土砂は塑性平衡状態に移行する。破壊時に両すべり面にかこまれた土砂は下方に落ちこむので、せん断応力は図に矢印で示したような方向をとる。これにより、面 ab では $m < 0$ 、面 cd では $m > 0$ であることがわかる。このために面 ab を $-m$ すべり面、面 cd を $+m$ すべり面と略称する。

すなわち、塑性平衡状態の土砂中の一点には、2個のすべり面 ($+m$ すべり面と $-m$ すべり面) が存在する。粘着力 $c=0$ の土では、すべり面は直線であるから、前者のすべり面は 図-2 (b) のように、Mohr の円の上の半円にある接点 T_1 と pole P を結んだ線に平行であり、後者のすべり面は下の半円にある接点 T_2 と P を結んだ線に平行である。Sokolovski^{(5),(6)} は前者を第1のすべり面、後者を第2のすべり面と称している。

3. 地震時 Mohr の円

(1) 半無限体の地盤に地震力が作用した場合の地盤の極限平衡状態の Mohr の円

図-3 地震時に擁壁の安定にもっとも危険な瞬間における重力と地震力の合力の作用方向

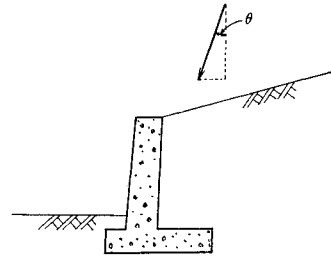


図-3 に示された擁壁が、地震時に安定上もっとも危険な瞬間は重力と地震力の合力が図に示されたように、鉛直線に地震合成角 θ だけ傾いて作用する場合である。ここに θ は、

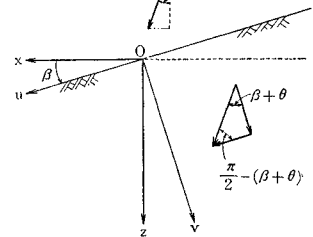
$$\theta = \tan^{-1} \frac{k}{1-k_1}$$

で、 k : 水平設計震度

k_1 : 鉛直設計震度である。

このような瞬間の土圧を求めるために、図-4 に示したように、半無限体の地盤に、地震力と重力との合力が作用した場合の、極限平衡状態について考える。地盤上の任意の一点を原点として、 v 軸を地表面に直角に地盤の内部に向け

図-4 半無限体の地盤に図のように重力と地震力との合力が作用した瞬間の地盤内の極限応力を求める座標



とり、 u 軸を地表面に沿って右手系直角座標になるようにとる。また、地表面の水平面に対する傾角を β とすると、つりあい方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_v}{\partial v} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} &= r_0 \cos \beta_0 \\ \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} &= r_0 \sin \beta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$r_0 = \frac{1-k_1}{\cos \theta} r, \quad \beta_0 = \beta + \theta$$

で、 r は土の単位体積重量である。

地表面では、

$$\sigma_v = 0, \quad \tau_{uv} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

また、

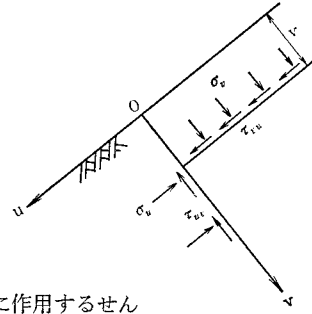
$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} = 0$$

であるから、式 (1), (2) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= r_0 v \cos \beta_0 \\ \tau_{uv} &= r_0 v \sin \beta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

解析的にえられたせん断応力が式(3)で示されることは、 $\sin \beta_0 > 0$ の場合に、 u 面、 v 面におけるせん断応力の方向が、それぞれ、**図-5**に示された方向に作用することである。これから v 面に作用するせん断応力を Mohr の円上に図示する場合

図-5 $\beta_0 > 0$ のとき、 u 面、 v 面に作用するせん断応力の方向



$$\tau_{vu} = -r_0 v \sin \beta_0 \dots\dots\dots (4)$$

としなくてはならない。 σ_v と τ_{vu} の合応力は $r_0 v$ となるから、**図-1 (b)** を参照して、**図-6** で、原点 O を通り σ 軸からはかって反時計まわりに β_0 の角度をなす直線を引き、その直線上に $OV = r_0 v_0$ になるように V 点をさだめると、 V 点は Mohr の円上における v 面の応力点をあらわす。↗

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} [r_0 v \cos \beta_0 + c \sin \varphi \cos \varphi \pm \sqrt{\{r_0 v \sin(\varphi - \beta_0) + c \cos \varphi\} \{r_0 v \sin(\varphi + \beta_0) + c \cos \varphi\}}] \dots\dots\dots (5)$$

上式の根号内の値は、 $\varphi \geq \beta_0$ のときは常に正である。 $\varphi < \beta_0$ のときはつぎに示す式(7)の条件を使用すると負にならないことがわかる。根号の前にある複号は、上号が受働の状態、下号は主働の状態の Mohr の円に適用される。 $v=0$ の場合は、 $\bar{\sigma}$ の値は、

$$\left. \begin{aligned} \text{受働の状態} \quad \bar{\sigma} &= \frac{c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \\ \text{主働の状態} \quad \bar{\sigma} &= \frac{-c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

であり、これらの円は **図-7** に示される。

地盤に極限平衡状態がなりたつためには、**図-6** の Mohr の円からわかるように、

$$(\sigma_v + c \cot \varphi) \tan \varphi \geq |\tau_{uv}| = r_0 v \sin \beta_0$$

ここに、 φ は内部摩擦角、 c は粘着力である。

σ_v に式(3)の値を代入すると、

$$v \cdot \frac{\sin(\varphi - \beta_0)}{\cos \varphi} \geq \frac{c}{r_0}$$

図-6 Mohr の円における v 面の応力点 V の表示

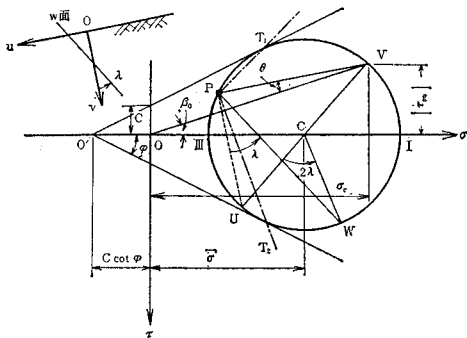
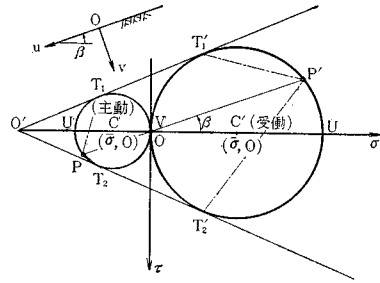


図-7 地表面の Mohr の円と応力点 U, V とすべり面の方向



このようにして、 V 点が $\sigma\tau$ 座標上に決定されると、その r 点を通り両破壊線に接する円を描くと、それが求める地震時 Mohr の円となり、その円の中心の座標 $(\bar{\sigma}, 0)$ は、次式で与えられる。**図-6** で、 $OC = \bar{\sigma}$ であるから

$$(\sigma_v - \bar{\sigma})^2 + \tau_{vu}^2 = \{(\bar{\sigma} + c \cot \varphi) \sin \varphi\}^2$$

これより

$\varphi \geq \beta_0$ のときには、いかなる v の値に対しても、上式の平衡条件は成立する。 $\varphi < \beta_0$ のときは、 v の値は次式を満足させる範囲内で平衡条件は成立する。

$$v \leq \frac{c}{r_0} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin(\beta_0 - \varphi)} \dots\dots\dots (7)$$

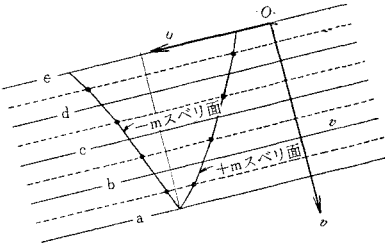
(2) Pole, すべり面ならびに応力

図-6 で円と σ 軸との交点 I, III がそれぞれ長短主応力面の応力点であり、応力点 V を通る直径の他端が、 u 面の応力点 U である。応力点 V より v 面 (u 軸) に平行線を引き、Mohr の円との交点 P が pole となる。pole と Mohr の円の応力点を結んだ線は、その応力点が示す面に平行であることは、この地震時 Mohr の円でも、つぎのように容易に証明することができる。すなわち、 P, U を結ぶと、 $\angle UPV$ は直角になり、線分 PU は u 面に平行となる。また、任意の面 w が u 面に対して、**図** に示されるように、 λ だけ反時計まわりに傾斜した位置にあるとすると、 w 面の応力点 W は Mohr の円上で中心角 $\angle O'W = 2\lambda$ になるように図示されるので、 $\angle UPW = \lambda$ である。ここで、 PU は、上述したように、 u 面に平行であるので、 PW が w 面に平行となる。

したがって、pole と接点 T_1, T_2 を結んだ線は、Mohr の円が示す土中の一点を通る $+m$ すべり面、 $-m$ すべり面にそれぞれ平行である。これは T_1, T_2 がそれぞれ両すべり面の応力点であることからわかる。

すべり面が曲線の場合には、上述した Mohr の円で求められるすべり面の方向は、曲線の接線の方向となる。**図-8** のように、与えられた点 a を通るすべり面を

描くには、ま 図-8 Mohrの円によるすべり面の描き方
ず、図のa,b,c,
dの各深さにお
ける Mohr の
円からすべり面
の方向を決定す
る。つぎに、こ
れらの深さの中
間点(図に点線



で示された深さ)まで、最初にa点を通り、それらの中間点の下方の Mohr の円 で決定されたすべり面の方向に平行線を引き、最後に地表面の Mohr の円から決定された方向に平行線を引き、一連のすべり面を完成させればよい。

図-6 でわかるように、 $\angle PVO$ は θ に等しい。したがって、地震力がない場合には、周知のように、 OV と円との交点が pole となる。以上は主動状態の pole であるが、受働状態の pole は、図-12 に示すように、 V 点を通る v 面への平行線と受働の Mohr の円との交点で与えられる。

つぎに、 u 面、 v 面、 w 面に働く応力は、それぞれ各面の応力点の示す座標で与えられ、 τ の方向は、前述した Mohr の円の規定から容易にわかる。

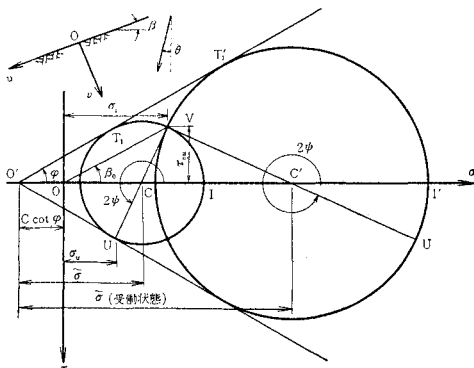
このようにして、求められたすべり面と応力は、つぎに示す解析結果と一致する。

4. 応力ならびにすべり面を求める解析的方法

半無限体の地盤に地震力が 図-4 に示すように作用した場合の、地盤の極限平衡状態におけるすべり面と応力を求める解析的方法を示す。

長主応力面から反時計まわりにはかって、 u 面が ψ なる角度をなす位置にあるとすると、 u 面、 v 面の応力点 U, V は Mohr の円上では、図-9 のようにあらわされる。それゆえ、 $\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}$ は、 ψ を使用すると、次式であらわされる。

図-9 Mohrの円における u 面の応力点 U の表示



$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \bar{\sigma}(1 + \sin \varphi \cos 2\psi) - c \cot \varphi \\ \sigma_v &= \bar{\sigma}(1 - \sin \varphi \cos 2\psi) - c \cot \varphi \\ \tau_{uv} &= -\bar{\sigma} \sin \varphi \sin 2\psi \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

ここに、 $\bar{\sigma}$ は両破壊線の交点と Mohr の円の中心との距離である。式(3)、(8)の σ_u, τ_{uv} をそれぞれ等しいとおくと、

$$v = -\frac{c}{r_0} \cdot \frac{\cos \varphi \sin 2\psi}{\sin \beta_0 + \sin \varphi \sin(2\psi - \beta_0)} \dots\dots(9)$$

$$\bar{\sigma} = c \cdot \frac{\cot \varphi \sin \beta_0}{\sin \beta_0 + \sin \varphi \sin(2\psi - \beta_0)} \dots\dots(10)$$

すべり面の方程式は、

$$\frac{dv}{du} = -\tan(\psi \pm \delta) \dots\dots(11)$$

複号の上号は $+m$ すべり面、下号は $-m$ すべり面である。

$$\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \dots\dots(12)$$

しかるに、

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\psi} &= \frac{2c \cos \varphi}{r_0} \\ &\times \frac{\sin \beta_0 (\sin \varphi - \cos 2\psi)}{[\sin \beta_0 + \sin \varphi \sin(2\psi - \beta_0)]^2} \dots\dots(13) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \cos 2\psi &= \cos(\pi/2 - \varphi) - \cos 2\psi \\ &= 2 \sin(\psi + \delta) \sin(\psi - \delta) \end{aligned}$$

と変形し、

$$\frac{du}{d\psi} = \frac{dv}{d\psi} \cdot \frac{du}{dv}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\psi} &= -\frac{2c \cos \varphi \sin \beta_0}{r_0} \\ &\times \frac{\sin 2\psi \mp \cos \varphi}{[\sin \beta_0 + \sin \varphi \sin(2\psi - \beta_0)]^2} \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2c \cos \varphi \sin \beta_0}{r_0} \\ &\times \int \frac{\sin 2\psi \mp \cos \varphi}{[\sin \beta_0 + \sin \varphi \sin(2\psi - \beta_0)]^2} d\psi \\ &+ C_1 \dots\dots(14) \end{aligned}$$

上式の右辺の複号は、上号が $+m$ すべり面、下号が $-m$ すべり面である。積分定数 C_1 は、一点 (u_0, v_0) を通るすべり面から決定する。すなわち、式(9)から、 $v_0 = f_1(\psi_0)$ 、以下に示す式(14)の積分された値より、 $u_0 = f_2(\psi_0) + C_1$ とおいて、 ψ_0 を消去して求める。式(14)の解は、 β_0 の値によりつぎのようになる。

$$u = -\frac{c}{r_0} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} (I_1 + I_2) + C_1 \dots\dots(15)$$

ここに、

$$a = \frac{\cos \varphi}{\cos \beta_0}, \quad b = \frac{\sin \beta_0}{\sin \varphi}$$

$$I_1 = -\frac{\tan \beta_0}{\sin(2\psi - \beta_0) + b}$$

以下に示す式の複号は、上号は +m すべり面で、下号は -m すべり面である。

(i) $\varphi > |\beta_0|$ のとき、

$$n^2 = (1 - b^2)/b^2 \text{ (ただし } n > 0 \text{) とおくと、}$$

$$I_2 = \mp \frac{a}{nb^2} \log \left[\frac{\tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} - n}{\tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} + n} \right] - \frac{b \pm a}{b^2} \left[\frac{1 + \cos(2\psi - \beta_0)}{b + \sin(2\psi - \beta_0)} \right] - \frac{2}{n^2 b^2} \left[\frac{n \left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}}{n^2 - \left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}^2} \right] + \frac{1}{2} \log \left[\frac{n + \left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}}{n - \left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}} \right] \Bigg\}$$

(ii) $\varphi = |\beta_0|$ のとき、

$$n^2 = (1 - b^2)/b^2 \text{ (ただし } n > 0 \text{) とおくと、}$$

$$I_2 = -(b \pm 1) \frac{1 + \cos(2\psi - \beta_0)}{1 + \sin(2\psi - \beta_0)} \div 2 \frac{1}{\tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b}} + \frac{4}{3}(b \pm 1) \frac{1}{\left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}^3}$$

-m すべり面は、

$$I_2 = -(b - 1) \frac{1 + \cos(2\psi - \beta_0)}{b + \sin(2\psi - \beta_0)} - 2 \frac{1}{\tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b}} + \frac{4}{3}(b - 1) \frac{1}{\left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}^3}$$

(iii) $\varphi < |\beta_0|$ のとき、

$$n^2 = (b^2 - 1)/b^2 \text{ (} n > 0 \text{) とおくと、}$$

$$I_2 = \mp 2 \frac{a}{b^2 n} \tan^{-1} \frac{1}{n} \left[\tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right] - \frac{b \pm a}{b^2} \left[\frac{1 + \cos(2\psi - \beta_0)}{b + \sin(2\psi - \beta_0)} \right] + \frac{2}{n^3 b^2} \left[\tan^{-1} \frac{1}{n} \left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\} \right. \\ \left. + \frac{n \left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}}{n^2 + \left\{ \tan\left(\psi - \frac{\beta_0}{2}\right) + \frac{1}{b} \right\}^2} \right] \Bigg\}$$

上述したすべり面の座標 (u, v), ならびに後述する任意の面の応力を求めるために、媒介変数 ψ の値を決定しなくてはならない。式(9)を解くと、 ψ は v の関数として、つぎのようにあらわされる。

$$\sin 2\psi = \frac{A \sin \beta_0}{B + A^2 \sin^2 \beta_0} [1 - A \sin \varphi \cos \beta_0 \pm \sin \varphi \sqrt{B}] \dots (16)$$

ただし、

$$A = -\frac{v}{\cos \varphi} \cdot \frac{r_0}{c} \text{ [無次元]}$$

$$B = (1 - A \sin \varphi \cos \beta_0)^2 - A^2 \sin^2 \beta_0 \cos^2 \varphi = \{1 - A \sin(\varphi + \beta_0)\} \{1 - A \sin(\varphi - \beta_0)\}$$

$A \leq 0$ であるから、 $\varphi \geq \beta_0$ のとき、 $B > 0$ 、 $\varphi < \beta_0$ のとき、式(7)の条件を使用すると、 $B \geq 0$ 。

また、 $1 - A \sin \varphi \cos \beta_0 \pm \sin \varphi \sqrt{B} \geq 0$ であるから、 $\sin \beta_0 > 0$ のとき、 $\sin 2\psi \leq 0$ となり、 2ψ は第3、第4象限の値をとることになる。式(16)の複号は、 $\beta_0 > 0$ のとき、上号は主働の場合、下号は受働の場合に適用される。これはつぎのようにして証明される。

図-9よりわかるように、応力点 V が主働の Mohr の円上を長主応力面の位置 (I) より出発して接点 T_1 まで動くときに、応力点 U は主働の場合に、第3象限か第4象限にあり、受働の場合には、必ず第4象限に位置する。つぎに、地表面における ψ の値は式(16)で $v=0$ とすると $\sin 2\psi=0$ となる。また図-7から、明白なように、地表面では主働が $2\psi=180^\circ$ 、受働が $2\psi=360^\circ$ となる。したがって、主働では v が大になるにつれて、 ψ は増大するが、受働では逆に減少する。すなわち、前者では $d\psi/dv > 0$ 、後者では $d\psi/dv < 0$ となる。ここで、式(13)の関係を用いると、 $\beta_0 > 0$ のとき、主働では $\sin \varphi > \cos 2\psi$ 、受働では $\sin \varphi < \cos 2\psi$ をうる。式(9)より、

$$\cos 2\psi = \frac{A \sin \beta_0 + (A \sin \varphi \cos \beta_0 - 1) \sin 2\psi}{A \sin \varphi \sin \beta_0}$$

であるから、この $\cos 2\psi$ を上記の不等式に代入し、さらに、 $\sin 2\psi$ に式(16)を代入すると、つぎの不等式が得られる。

$$(1 - A \sin \varphi \cos \beta_0)^2 \sin^2 \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{B} (1 - \sin \varphi \cos \beta_0) \geq A^2 \sin^2 \beta_0 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \dots \dots \dots (i)$$

式(i)の不等号の上号が主働、下号が受働に適用される。式(i)の左辺の複号は、式(16)の複号と全く同じである。この複号のうち上号をとり、式(i)の右辺を左辺に移行して因数分解をすると、

$$\sqrt{B} \sin \varphi \{ \sqrt{B} \sin \varphi + (1 - A \sin \varphi \cos \beta_0) \} \geq 0 \dots \dots \dots (ii)$$

同様に、式(i)の左辺の複号の下号をとると、

$$\sqrt{B} \sin \varphi \{ \sqrt{B} \sin \varphi - (1 - A \sin \varphi \cos \beta_0) \} \geq 0 \dots \dots \dots (iii)$$

しかるに、

$$(1 - A \sin \varphi \cos \beta_0)^2 > \sin^2 \varphi \{ (1 - A \sin \varphi \cos \beta_0)^2 - A^2 \sin^2 \beta_0 \cos^2 \varphi \}$$

なる関係があるから、

$$(1 - A \sin \varphi \cos \beta_0)^2 > B \sin^2 \varphi > 0$$

$A < 0$ であるから、

$$1 - A \sin \varphi \cos \beta_0 > \sqrt{B} \sin \varphi > 0$$

よって、式(ii)の不等号は上号のみ、式(iii)の不等号は下号のみが成立することになる。

すなわち、式(16)の右辺の複号は、上号が主働状態に、

下号が受働状態の Mohr の円に適用されることになる。

図-10, 図-11 は, 全く同じ地盤に, 同じ地震力が, 同じ方向に作用した場合のすべり面を示しているが, 前者は主働状態, 後者は受働状態におけるすべり面である。両者とも $v=9.5\text{ m}$ の深さの一点を通っている。計算は, 1m 間隔の v の位置で行なったが, Mohr の円で幾何学的に求めたすべり面は, 解析の結果と一致して, この程度の縮尺の図面では両者は重なりあってしまう。図-10 に v_0 の線が地表面に平行に引かれているが, これは主働状態で, u 面に作用する垂直応力が 0 になる深さを示したもので, 式 (8) の $\sigma_u=0$ を満足させる ψ を, 式 (9) に代入して求められる。

図-10, 図-11 の両図に不連続面とかかれた線は, 式

図-10 $v=9.5\text{ m}$ の深さの一点を通る主働時のすべり面 ($\beta_0 > \varphi$)

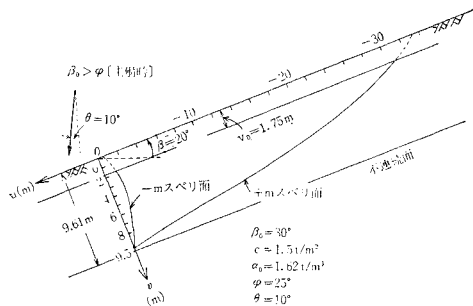


図-11 $v=9.5\text{ m}$ の深さの一点を通る受働時のすべり面 ($\beta_0 > \varphi$)

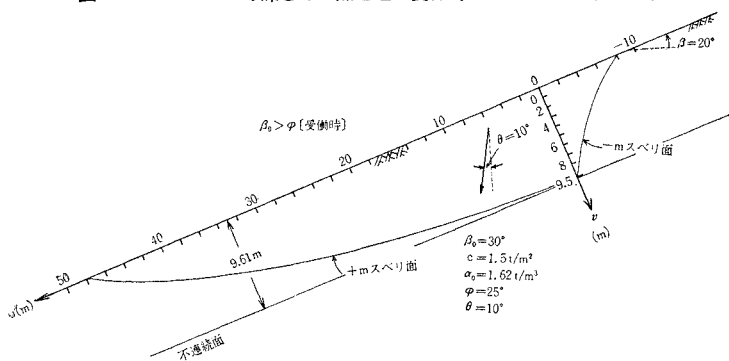
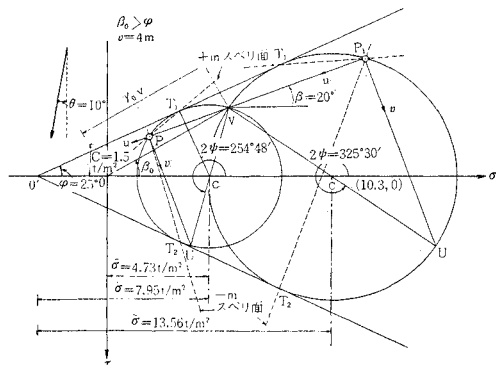


図-12 すべり面の接線方向を示す Mohr の円



(7) の等号を満足させる v から決定される。 $c=1.5\text{ t/m}^2$, $\beta_0=30^\circ$ であるので, この深さを与える v は $v=9.61\text{ m}$ である。この不連続面の位置で, $+m$ すべり面の接線方向は $dv/du=0$, $-m$ すべり面のそれは $dv/du=\tan(\pi/2-\varphi)$ となる。これは, 式 (7), (9) の v を等しいとおいて, 2ψ を求めると, $2\psi=3/2\cdot\pi+\varphi$ となることからわかる。

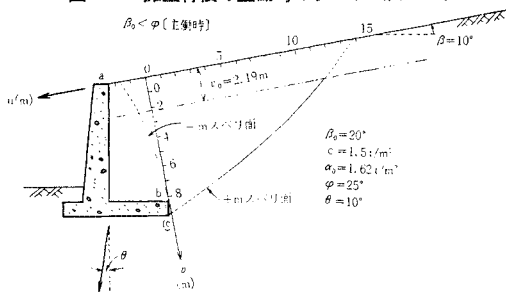
なお, 図-12 は, 上述した図-10, 図-11 のすべり面を求めるために描いた Mohr の円の一例 ($v=4.0\text{ m}$) を示したものであるが, この図面には, 解析のときに使用される ψ と $\bar{\sigma}$ とが併記されている。

5. 擁壁に作用する土圧への適用

(1) 擁壁背後のすべり面

内部摩擦角 $\varphi=25^\circ$, 粘着力 $c=1.5\text{ t/m}^2$, $r=1.6\text{ t/m}^3$

図-13 擁壁背後の主働時のすべり ($\beta_0 < \varphi$)



の裏込め土砂に, 水平設計震度 $k=0.176$ ($\theta=10^\circ$) に相当する地震力が作用したとき, 擁壁背後に生ずるすべり面についてのべる。図-13 で, 擁壁が地震力で破壊するときは, 底面の b, c からすべり面が発生し, この2つのすべり面で囲まれた区間の土砂が, 塑性平衡状態に移行するとみなすことができる。図-13 から図-15 までは同一地震力に対して, β の値がことなり, 図-13 は $\beta_0 < \varphi$, 図-14 は $\beta_0 = \varphi$, 図-15

は $\beta_0 > \varphi$ の場合で, これらのすべり面は, Mohr の円によって描いたものである。

図-14 擁壁背後の主働のすべり面 ($\beta_0 = \varphi$)

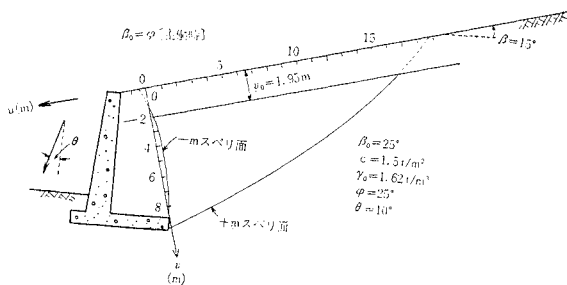
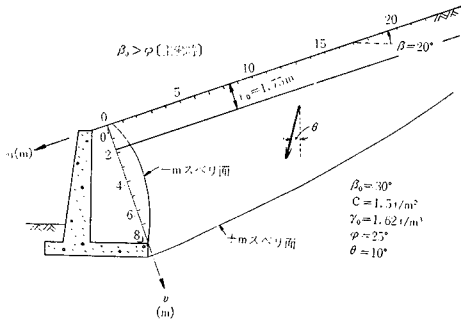


図-15 擁壁背後の主働時のすべり面 ($\beta_0 > \varphi$)

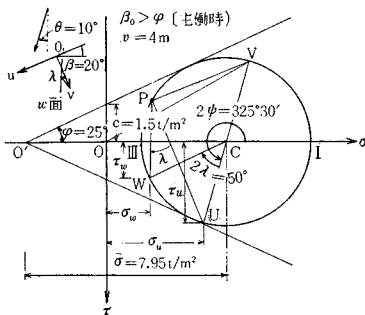


これらの図で、+m と -m の両すべり面は、いずれも底面の b, c 点でくい違いはあるが、交角は $(\pi/2 - \varphi)$ で、 β_0 が大になると、これらの交角を維持したまま、両すべり面が時計まわりに回転し、図-15 では、-m すべり面が w 軸の右側にきている。この回転の角度は、同一の β_0 に対しては、 θ が大きい方が大であることは Mohr の円の pole の位置の変化から容易に考えられる。

(2) 擁壁背面の主働土圧, 前面の受働土圧

塑性領域内で土圧を求めるために、図-13 では、 b 点を通る u 面に土圧を作用させることができるが、図-14, 15 では、上記の u 面に土圧を作用させることができない。図-14, 15 の場合の土圧は、 b 点を通り u 面から時計まわりに λ だけ傾斜した土中の w 面に作用させなくてはならない。 w 面の応力点 W は、図-16 の Mohr の円で、応力点 U から時計まわりにはかって、中心角が $\angle UCW = 2\lambda$ になるように W 点をとればよい。あるいは、pole P と U 点を結ぶ線分 PU から、pole P を軸にして、時計まわりにはかって $\angle UPW = \lambda$ になるように W 点をとればよい。この W 点の座標をよめば、 σ_w と τ_w が与えられる。

図-16 w 面の応力を示す応力点 W



解析的には、応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_w &= \bar{\sigma} \{1 + \sin \varphi \cos 2(\psi - \lambda)\} - c \cot \varphi \\ \tau_w &= -\bar{\sigma} \sin \varphi \sin 2(\psi - \lambda) \end{aligned} \quad \dots(17)$$

上式で、 λ の前のマイナスの符号は w 面が u 面から時計まわりの位置にあるためであり、 $\bar{\sigma}$ は式 (10) に与

図-17 擁壁背後の土中の面に作用する主働土圧の垂直分力の分布 ($\beta_0 < \varphi$) (点線は $c=0$ 場合)

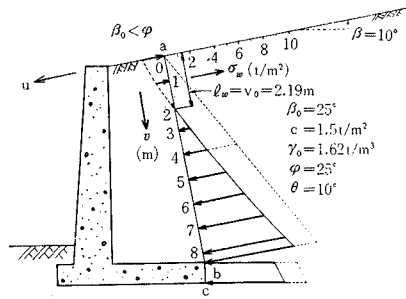


図-18 擁壁背後の土中の面に作用する主働土圧の垂直分力の分布 ($\beta_0 = \varphi$) (点線は $c=0$ の場合)

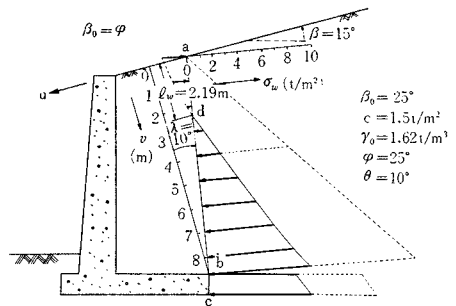
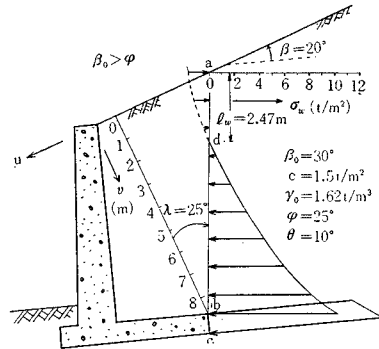


図-19 擁壁背後の土中の面に作用する主働土圧の垂直分力の分布 ($\beta > \varphi$)



えられている。

図-17, 18, 19 はそれぞれ b 点を通り u 面に $\lambda=0$, $\lambda=10^\circ$, $\lambda=25^\circ$ だけ傾斜した面に作用する法線方向の土圧 σ_w の分布を示す。これらの図における擁壁底面の鉛直面 bc には、いずれも、土中の鉛直面 ($\lambda = \beta$) に作用する土圧を近似的に適用している。土圧 σ_w の分布は、 β_0 が大になるにしたがって、地表面近くで曲率の大きな曲線となる。

つぎに、図-20, 21, 22 には、それぞれ、上述した各面に作用するせん断応力の分布と、その方向とを示している。

土圧 σ , せん断応力 τ の両方とも、一般に、ある深さを境にして、符号が変化している。 σ は $\sigma=0$ の点より

図-20 擁壁背後の土中の面に作用するせん断応力分布 ($\beta_0 < \varphi$) (点線は $c=0$ の場合)

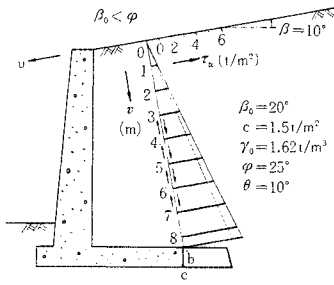


図-21 擁壁背後の土中の面に作用するせん断応力分布 ($\beta_0 = \varphi$) (点線は $c=0$ の場合)

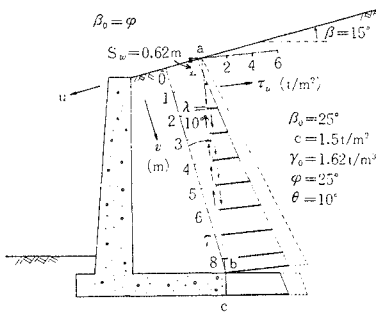
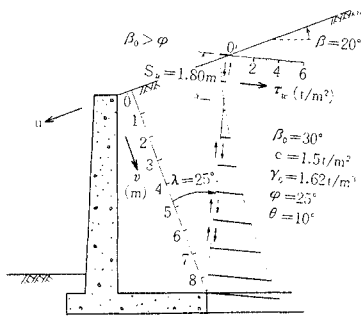


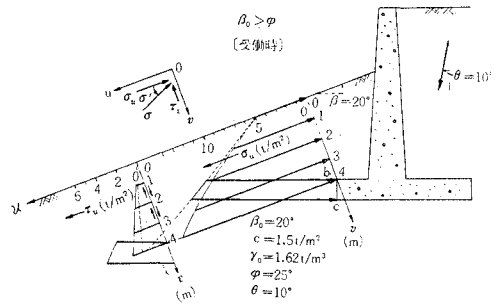
図-22 擁壁背後の土中の面に作用するせん断応力分布 ($\beta_0 > \varphi$)



上部の面では引張力が、下部の面では、図に示すように、圧縮力が作用する。 τ は μ 面を除いて他の面では、ある点より上部では $\tau < 0$ 、すなわち $m > 0$ 、下部では、 $\tau > 0$ 、 $m < 0$ の値を示す。図には τ の方向を矢印で示している。

上述した各図に、粘着力がない場合の垂直土圧ならびにせん断応力の分布が点線で示されている。粘着力を考慮した土圧計算では、 $c=0$ による計算と比較して、主動土圧が減少し、受働土圧が増大して得られ、きわめて有利な計算となる。粘着力が土圧を軽減させる程度は、 c の大きさと擁壁の高さによってことなるから、一概にいえないが、図-17 では、主動土圧が 60% に軽減され、図-18 では、40% に軽減される。特に、 β_0 が φ

図-23 擁壁前面の土中の面に作用する受働土圧の垂直成分の分布およびせん断応力の分布



に接近した場合の土圧軽減の割合は大きい。

図-23 は、底面の b 点を通る u 面に作用する受働土圧分布ならびにせん断応力の分布を示している。せん断応力は、 u 面に沿って上方に向いている。図に点線で示しているのは、常時 ($\theta=0$) における σ と τ の u 面上における分布である。

地震時の受働土圧を常時のそれと比較すると、地表面では σ は同じ大きさで、 u 面では 図-7、式(6) よりわかるように、

$$\sigma = 2c \tan(45^\circ + \varphi/2)$$

で与えられる。

v が大になると、地震時土圧は常時土圧よりも減少してくる。なお主動土圧も地表面では常時土圧と同じ大きさで

$$\sigma_w = -2c \cos^2 \lambda \cdot \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\tau_w = -2c \cos \lambda \sin \lambda \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

であることがわかる。

擁壁の安定計算では、土圧の作用面と壁体との間で囲まれた土砂は、壁体の一部とみなして、所定の慣性をこれに作用させなくてはならない。土圧の作用面における土圧合力とせん断応力の合力は、土圧 σ とせん断応力 τ とが正の値を示す区間の合力を求めればよい。そのためには、これらの分布は直線の分布をしていともなして、合力を求めるのが実用的である。主動土圧は、できれば、底面の b 点を通る u 面に作用させるのがよい。この理由は、 u 面では、せん断応力が 0 の点は地表面のみであるためである。

なお、主動状態で式(17)より $\tau_w = 0$ なるためには、

$$\psi = \pi/2 + \lambda \dots\dots\dots(18)$$

この ψ を式(9)に代入すると、 $\tau_w = 0$ なる v の値が求められる。つぎに式(17)で $\sigma_w = 0$ とおくと、次式がえられる。

$$\tan 2\psi = \frac{\sin \beta_0 (1 + \cos 2\lambda)}{\cos \beta_0 - \sin \beta_0 \sin 2\lambda} \dots\dots\dots(19)$$

任意の λ の値に対しては、すなわち、任意の w 面で

は、式 (18), (19) を満足させる ψ の値はことなる。このことは、任意の w 面では、 $\tau_w=0$ を与える深さ v と $\sigma_w=0$ を与える深さ v は、同一の値でないことを意味する。ここで、同一の深さ v に対して、 $\sigma_w=0, \tau_w=0$ を与える面は、式 (18), (19) の ψ を等しいとおいて、 λ を求めると、それは次式で与えられる。

$$\lambda = \beta_0 \dots\dots\dots(20)$$

この面は u 面に対して時計まわりに $\beta_0 = \beta + \theta$ だけ回転した位置にある面、すなわち、鉛直面に対して θ だけ時計まわりに回転した位置にある面である。その深さ v は $\psi = \pi/2 + \beta_0$ を式 (9) に代入すると、次式で与えられる。

$$v = \frac{2c}{r_0} \cos \beta_0 \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \dots\dots\dots(21)$$

ここで、地表面から鉛直にはかった深さを z であらわすと、 $z = v/\cos \beta$ となるから、式 (21) の v を z で置きかえると、

$$z = \frac{2c}{r_0} \cdot \frac{\cos(\beta + \theta)}{\cos \beta} \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \dots\dots\dots(22)$$

となる。ただし、これは鉛直面に対して時計まわりに θ だけ回転した面に作用する応力 σ と τ が、同時に 0 を示す鉛直深さである。 $\theta=0$ とおくと、この面は鉛直面に一致し、 z は次式に示す粘着高 z_0 となる。

$$z_0 = \frac{2c}{r_0} \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \dots\dots\dots(23)$$

式 (18), (19) で $\lambda=0$ とおくと、 u 面における σ または τ が 0 となる深さ v がえられ、また $\lambda=\beta$ とおくと、鉛直面におけるそれらの深さがえられる。地震時には、土中の鉛直面上の一点で $\sigma=0, \tau=0$ にはならない。このことは、常時の場合とことなる。

上述したことは、地表面に載荷重がない場合である。地表面上に単位面積あたり q なる等分布荷重がある場合には、地表面においては、

$$\sigma_v = q_0 \cos \beta_0, \quad \tau_{uv} = q_0 \sin \beta_0 \dots\dots\dots(2)'$$

ここに、

$$q_0 = \frac{1-k_i}{\cos \theta} \cdot q$$

である。

したがって、式 (3) はつぎのように書きかえられる。

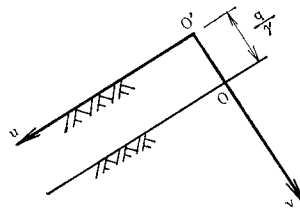
$$\sigma_v = (r_0 v + q_0) \cos \beta_0, \quad \tau_{uv} = (r_0 v + q_0) \sin \beta_0 \dots\dots\dots(3)'$$

この式は、また、つぎのように書きかえられる。

$$\sigma_v = r_0 \left(v + \frac{q}{r}\right) \cos \beta_0, \quad \tau_{uv} = r_0 \left(v + \frac{q}{r}\right) \sin \beta_0$$

したがって、平面座標の原点 O を図-24 に示すように、 $v=q/r$ だけ O' の位置に移動し、すなわち、地表面が q/r だけ上方に移動したと考え、新しい座標によって計算し、旧地表面までのすべり面ならびに応力を求めればよい。

図-24 地表面等分布載荷重 q がある場合の原点移動を示す



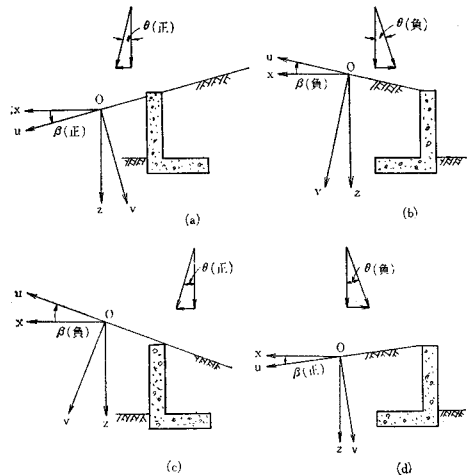
6. 地表面の傾角 β が負の場合の考察

図-25 に示すように、擁壁に作用する地震力の u 軸方向の分力が u 軸の正の方向に向いている

場合を θ の正の値、反対方向に向いている場合を θ の負の値とさだめる。また β に対しては、斜面 u 軸が水平面 x 軸からはかって反時計まわりの角度である場合を正の値、時計まわりの角度である場合を負の値とさだめる。

また、ここでは、地震力が裏込め土砂にせん断破壊を引き起こさせる方向に作用した場合を考えているのであるから、地震力の方向ならびに裏込め土砂のてんば面の傾斜角度は、図-25 の 4 通りの場合しか考えられない。このうち、(b), (d) に示す図面は、紙の裏から見ると、(a) 図、(c) 図とそれぞれ同じであるから、(a), (c) 両図の場合、すなわち $\theta \geq 0$ で、(i) $\beta \geq 0$ か、(ii) $\beta < 0$ の二つの場合についてのみ考えればよい。

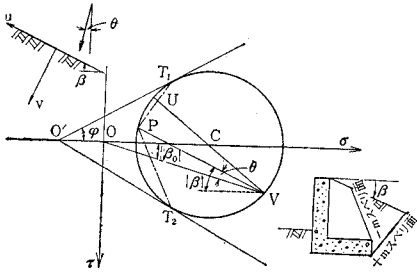
図-25 地震力の方向と裏込め天端面の方向



(i) の場合は $\beta_0 \geq 0$ となり、これは前節までに考えてきた場合である。

(ii) の場合には、 $\beta_0 = -|\beta| + \theta$ とおくことができ、 β は正負の値をとる。したがって、 $\beta_0 \geq 0$ の場合には、Mohr の円上の応力点 V は (i) の場合と全く同じようにして求められる。 $\beta_0 < 0$ の場合には、式 (4) からわかるように、 $\tau_{vu} > 0$ となる。したがって、応力点 V は、Mohr の円の σ 軸より下半分にはならない。図-26 のように応力点 V は、 σ 座標の原点 O を通り、 σ 軸から時計まわりに $|\beta_0|$ なる角度をなす直線を引

図-26 $\beta_0 < 0$ のときの応力点 V



き、その直線と、深さ v における Mohr の円との交点で与えられる。この Mohr の円の中心の σ 軸の値は、式 (5) で与えられることは前述したとおりである。

解析的には、 $\beta_0 = \beta + \theta$ とおけば、 β, β_0 の正負にかかわらず、上述した式を用いて求められる。 v を与えて 2ψ を求める場合に、式 (16) の複号は、 β_0 正負にかかわらず同一で、上号が主動、下号が受働状態に適用される。 β_0 の正負によって、 2ψ は表-1 に示す象限の値をとる。式 (15) の解は、 φ と $|\beta_0|$ の大小の比較で区別される。また、 β_0 が負のときには、式 (20) で決定される λ は、 $\lambda = -|\beta_0|$ とかくことができるから、これは u 面から反時計まわりにはかって $|\beta_0|$ だけ傾斜した平面と解釈される。

表-1 u 面の応力点 U の Mohr の円上の位置を示す 2ψ の値

	主動状態	受働状態
$\beta_0 \geq 0$	第3, 第4象限	第4象限
$\beta_0 < 0$	第2, 第1象限	第1象限

7. 結 語

Mohr の円を使用すると、塑性平衡状態における地盤中、または裏込め土砂中の任意の一点を通して、逐次すべり面を描き、一連のすべり面を完成させることができ、その操作はきわめて簡単である。すべり面ならびに応力分布図の形状の正確さということになると、幾何学的にも解析的にも、操作を行なう点の数量によるが、ここに示した程度の間隔で円を描いて求めると、両方法による曲線は完全に一致した。この報文では、Mohr の円による幾何学的関係と二次元解析の方法を混用して論述を進めたところがあるが、解析的方法を助ける意味においても、Mohr の円による方法は重要である。

Mohr の円による幾何学的方法を土中の面に作用する擁壁土圧に適用したが、これによりつぎのことが得られた。

(1) 地震合成角 θ が大になるにしたがって、塑性平

衡状態の領域を示す両すべり面は、同一交角を維持したまま擁壁と反対側の裏込め土砂の方向に回転してくる。このことは、地震力が強いほど、擁壁より遠方の裏込土砂が塑性平衡状態に移行することを示している。

(2) 塑性領域を求めて、土圧の作用面を決定しなくてはならない。この面は、できれば、図-17 の底面の b 点を通る u 面にとる方がよい。これは u 面は、地表面のみが $\tau=0$ となるためである。

(3) 裏込土に粘着力がある場合、底面の b 点を通る地震時主動土圧の作用面で、垂直応力 σ とせん断応力 τ が、同一点で0になる面は、 u 面に β_0 だけ傾斜した面以外にはない。 $\theta > 0$ となるようにして土圧を計算するときに、 $\beta_0 > 0$ の場合には、この面は u 面より時計まわりに β_0 だけ傾斜した面であり、 $\beta_0 < 0$ の場合には、この面は u 面より反時計まわりに β_0 だけ傾斜した面である。いずれにしても、 v 軸に沿うこの深さ v は、

$$v = \frac{2c}{\tau_0} \cos \beta_0 \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

で与えられる。

(4) 粘着力を取り入れて計算した土圧は、粘着力を無視して計算した土圧と比較して、地震時の主動土圧は小になり、受働土圧は大になる。計算に用いた粘着力の大きさや、擁壁の高さによって、主動土圧の減少量はことなるが、計算に用いたような $c=1.5 \text{ t/m}^2$ の土で、 β_0 が φ に接近した場合がその減少の割合は顕著になり、 $c=0$ の場合の 60% も減少させる。

(5) 粘着力があると、 $\beta_0 > \varphi$ の場合でも、土圧算定ができる。ただし、この場合、粘着力を極度に大にすると、式 (7) を満足させる不連続面の位置が上昇し、擁壁下部で土圧算定ができなくなる。このような場合には、擁壁の高さを考慮して、計算に用いる c を小にとらなくてはならない。

(6) 土中の u 面に作用する地震時受働土圧を常時土圧と比較すると、地表面載荷重がない場合には、地表面での垂直土圧 σ は、常時土圧と同じで、 $\sigma = 2c \tan(45^\circ + \varphi/2)$ で与えられる。 v が大になるにつれて、 σ の値は常時土圧よりも減少する。

計算の労をとられた日本港湾コンサルタントKKの古川清君(前名古屋大学助手)に感謝する。

参考文献

- 1) 市原松平: 擁壁, 基礎工学ハンドブック, p. 667.
- 2) 市原松平: 擁壁, 土質工学ハンドブック, p. 835.
- 3) 高木俊介: 講座「土質工学の考え方」II, 農業土木研究 26 巻 5 号 (昭和 34 年), pp. 41~45.
- 4) 鶴戸口英善・川口雄一・倉西正嗣: 「材料力学上巻」, pp. 60~65.
- 5) Sokolovski: Statics of Soil Media, p. 17.
- 6) 星 塾 和・佐藤健吉訳: 土のような粒状体の力学, p. 25.
- 7) 高木俊介: 講座「土質工学の考え方」IV, 農業土木研究 27 巻 1 号, pp. 44~49.

(1966.4.18・受付)