

# 腹板の耐荷力に関する一考察

## A CONSIDERATION ON THE STRENGTH OF WEBPLATES

小西一郎\*・白石成人\*\*・渡辺英一\*\*\*

By Ichiro Konishi, Naruhito Shiraishi and Eiichi Watanabe

### 1. ま え が き

最近構造工学は目ざましい進歩を遂げつつあるが、その原因の一つに構造用鋼材の材質の向上、改善がある。しかし高張力鋼が普通の鋼に比較して常に有利であるとはいえないことにも留意しなくてはならない。たとえばトラスを初めとする棒材からなる骨組構造物の圧縮部材に高張力鋼を用いたとしても座屈現象に対しては断面を小さくすることによる利益は少なく、有益ではない。さて、それでは板構造を主体とする構造物に関してはどのようなものであろうか。確かに各国の鋼構造物設計示方書を読めば、高張力鋼の使用による有益性は大きくはないがこれは線形理論に立脚した結論に過ぎないことに注意すべきである。プレート ガーダーなど板構造のうちでも主要部である腹板はフランジや諸補剛材などによって連結的に結合されているから、かなり安定であると思われるので、高張力鋼使用によるメリットを検討することは大きな価値を持っている。この観点から板の座屈がその耐荷力とどのような関係にあるのかを座屈後の板の挙動解析によって明らかにし、この結果が実際のプレート ガーダーの腹板の安定性を考えるうえでいかなる工学的意味を持つかを考察しようと思う。

### 2. 本研究の意義と問題点の提起

対象とする構造物は板構造のうちでも最も簡単なものの一つであるプレート ガーダーである。いまそのプレート ガーダーのうちでも最も簡単な両端単純支持のものを考えてみれば、これが鉛直荷重を受けるとスパンの中央部では曲げが、支点の近傍ではせん断力の影響が卓越することが考えられる。これら両極端な場合についてそれぞれのパネル、すなわち上下フランジと左右2つの垂直補剛材によって囲まれる腹板の部分に着目し、これを単なる板と見なし種々の境界条件を理想的に与えて解析を行ない、これらの結果よりもっと複雑な状態にまで言及するのが過去における、いな現在でも採用されているやむを得ない手法である。またさらに、座屈後の板の挙動についても有限変形理論<sup>1),2),3)</sup>に基づいていくらか

の限られた簡単な場合を取扱った論文が発表せられている。しかし筆者らの見る限り、一方向に圧縮力を受ける有限な板については十分な解析がつくされているが、その他の場合、たとえば純曲げや純せん断を受ける板についての解析は、有益な資料としてわれわれが利用できる段階にはいっていないように思われる。本論文では四辺単純支持の板がそれぞれ純せん断、純曲げを受ける場合を想定し有限変形理論を用いて解析した。

#### (1) せん断力荷重を受ける腹板についての問題点<sup>1)</sup>

せん断座屈後には腹板にいわゆる斜張力の場ができるが、このことは航空工学の分野において大きく取り扱われて来た。しかし航空機部材中の板と橋構造としてのプレート ガーダーの腹板との間には一見相当な類似点があるがまた重大な相違点が存在する。すなわち航空機では板はそれよりもはるかに剛な補剛材により支持されているため、あたかも障子紙と木わくの間に類似している。ところが一般のプレート ガーダーの腹板の剛性とそれを支持する各境界部材の剛性には著しいへだたりがないのが普通である。ゆえに航空工学において発展した斜張力理論はそのままプレート ガーダーの挙動解析に用いることは問題である。われわれはまず一番簡単な場合、すなわち板が四辺単純支持されていて純せん断を受けたとき果たして斜張力の場が現出できるか、またそれがどれくらい簡略化された斜張力理論による解析結果と異なるのかを考察したい。

#### (2) 曲げを受ける腹板についての問題点

過去に行なわれた実験結果より、曲げを受けるパネルの耐荷力は腹板自身の座屈後の強度にはあまり左右されずにむしろ境界の圧縮フランジの座屈などによって大きく影響を受けることが報告されている<sup>5),6)</sup>。曲げを受けるプレート ガーダーが破壊する原因としては

- i) 圧縮フランジの鉛直方向への座屈
- ii) フランジの横方向への座屈
- iii) 圧縮フランジの局部的なねじれ座屈

が考えられるが、このうち i) はほとんど問題にならないし、また ii) は実際の橋梁構造において床板などと十分堅固に結合しておけばまず問題にならないだろう。よって iii) に対して十分な考慮がなされるべきであり、この点に関する研究は数多く行なわれていて非常に重要であると思われるが、本論文は特に腹板の挙動を中心に

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

\*\* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室

\*\*\* 学生会員 工修 京都大学大学院 工学研究科博士課程学生  
土木工学専攻

解析するという方針をとっているためにあえてこの問題を  
取り扱わないことにする。

**3. Marguerre, Kármán の非線形偏微分方程式を用いた板の後座屈挙動の解析**

Marguerre の方程式はつぎの2式から成る<sup>7)</sup>。

$$r^4 w = \frac{h}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w + w_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right. \\ \left. \times (w + w_0) - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w + w_0) \right] \dots\dots\dots(1-a)$$

$$r^4 F = E \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots(1-b)$$

(1) 境界にそって一様な大きさのせん断応力  $\tau$  を受ける初期たわみを有する四辺単純支持の長方形板の後座屈挙動 (図-1)<sup>8)</sup>

a) 基礎方程式の誘

導 問題を簡単にするため任意の境界辺にそったこれに垂直な方向の直応力の代数和は0として、その直応力につり合うだけの拘束力が外から作用するものとする。

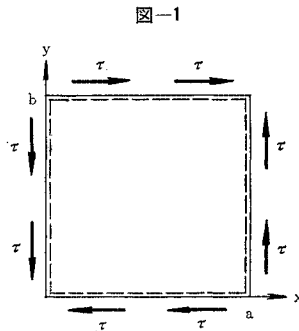


図-1

条件式は

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{along } y=0 \text{ \& } y=b \dots(2-a)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{along } x=0 \text{ \& } x=a \dots(2-b)$$

$$\int_0^b \bar{\sigma}_x dy = 0 \quad \text{along } x=0 \text{ \& } x=a \dots(2-c)$$

$$\int_0^a \bar{\sigma}_y dx = 0 \quad \text{along } y=0 \text{ \& } y=b \dots(2-d)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \tau \quad \text{along all boundaries} \dots(2-e)$$

いまたわみ  $w$ 、初期たわみ  $w_0$  をつぎのように展開できるものとする。

$$w = h \sum_m \sum_n b_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \dots\dots\dots(3)$$

$$w_0 = h \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 $m, n=1, 2, 3, \dots$

$b_{mn}$  はこれから求めるべき未知数であって  $a_{mn}$  は与えられる定数である。そこでまず条件式 (2-a)~(2-e) を用いて式 (1-b) を応力関数  $F$  について厳密に解き、外

力  $\tau$  と未知数  $b_{mn}$  で表わしつぎに Galerkin の近似理論をもって式 (1-a) を解くことにする。たわみを式 (3)、(4) のように正弦級数で展開したので式 (2-a)、(2-b) は自動的に満足される。いま式 (3)、(4) を式 (1-b) へ代入すれば簡単に

$$r^4 F = (Eh^2 \pi^4 / a^2 b^2) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{p,q} \cos \frac{p \pi x}{a} \cos \frac{q \pi y}{b} \dots\dots\dots(5)$$

となる。この解  $F$  として

$$F = -\tau x y + Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \Phi_{p,q} \cos \frac{p \pi x}{a} \cos \frac{q \pi y}{b} \dots\dots\dots(6)$$

を選べばこれは残りの条件式 (2-c)、(2-d)、(2-e) を満足することがわかる\*。ただし

$$\Phi_{p,q} = \beta^2 C_{p,q} / (p^2 + \beta^2 q^2)^2, \quad \beta = a/b$$

つぎに  $F$  を用いて式 (1-a) を近似的に解くことを試みる。すなわち

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ r^4 w - \frac{h}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w + w_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w + w_0) - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w + w_0) \right] \right\} \\ \times \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} dx dy = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ただし  $r, s=1, 2, 3, \dots$

この式によりつぎの基本式が導かれる。

$$\frac{\pi^4}{4 \beta^2} (r^2 + \beta^2 s^2)^2 b_{rs} - \frac{2 \beta b^2 h}{D} \tau \sum_m \sum_n \frac{m^2 n^2}{m^2 - r^2} \\ \cdot \frac{m n r s}{(m^2 - r^2)(n^2 - s^2)} [(-1)^{m-r} - 1][(-1)^{n+s} - 1] \\ \times (a_{mn} + b_{mn}) - \frac{3}{4} \pi^4 (1 - \nu^2) \sum_m \sum_n (a_{mn} + b_{mn}) \\ \times \{ [m(n+s) - n(m+r)]^2 \Phi_{m+r, n+s} \\ - [m(n+s) - n(m-r)]^2 \Phi_{m-r, n+s} \\ - [m(n+s) + n(r-m)]^2 \Phi_{r-m, n+s} \\ - [m(n-s) - n(m+r)]^2 \Phi_{m+r, n-s} \\ + [m(n-s) - n(m-r)]^2 \Phi_{m-r, n-s} \\ + [m(n-s) + n(r-m)]^2 \Phi_{r-m, n-s} \\ - [m(s-n) + n(m+r)]^2 \Phi_{m+r, s-n} \\ + [m(s-n) + n(m-r)]^2 \Phi_{m-r, s-n} \\ + [m(s-n) - n(r-m)]^2 \Phi_{r-m, s-n} \} = 0$$

ただし

$$\Phi_{p,q} (p < 0 \text{ or } q < 0) = 0 \\ r, s=1, 2, 3, \dots \dots\dots(8)$$

初めにたわみ  $w$ 、初期たわみ  $w_0$  を無限級数の形に展開したが実際問題としてこれでは解くことが困難なので主要なモード成分5つを図-2のようにとれば応力関数の項  $\Phi_{p,q}$  の数は図-3のように21個となることがわ

\*  $\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ,  $\bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ,  $\bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

図-2 零でない  $b_{mn}$  (斜線部)

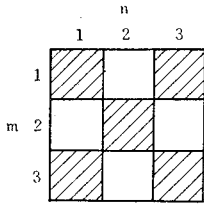


図-3 零でない  $\phi_{mn}$  (斜線部)

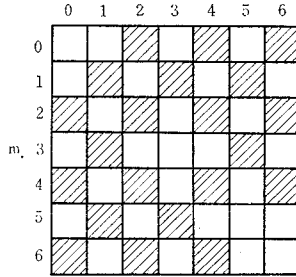


表-1

$i, j$	$\phi_{i,j}$
0 2	$0.03125 b_{11}^2 + 0.00625 a_{11} b_{11} - 0.0625 b_{11} b_{13} - 0.0625 a_{11} b_{31} - 0.5625 b_{21} b_{33} + 0.28125 b_{31}^2$
0 4	$0.140625 b_{31} b_{33} + 0.03125 b_{22}^2 + 0.015625 b_{11} b_{13} + 0.015625 a_{11} b_{13}$
0 6	$0.0034722 b_{13}^2 + 0.03125 b_{33}^2$
1 1	$-1.0 b_{13} b_{22} - 1.0 b_{22} b_{31}$
1 3	$0.04 b_{11} b_{22} + 0.04 a_{11} b_{22} + 0.16 b_{22} b_{31}$
1 5	$0.0236686 b_{13} b_{22} + 0.0532544 b_{22} b_{31}$
2 0	$0.03125 b_{11}^2 + 0.0625 a_{11} b_{11} - 0.0625 b_{11} b_{31} - 0.0625 a_{11} b_{31} - 0.5625 b_{13} b_{33} + 0.28125 b_{13}^2$
2 2	$0.0625 b_{11} b_{13} + 0.0625 a_{11} b_{13} + 0.0625 a_{11} b_{31} + 0.0625 b_{11} b_{31} - 0.25 b_{13} b_{31}$
2 4	$-0.0025 b_{11} b_{13} + 0.0225 b_{11} b_{33} + 0.0625 b_{13} b_{31} - 0.0025 a_{11} b_{13} + 0.0225 a_{11} b_{33}$
2 6	$0.0225 b_{13} b_{33}$
3 1	$0.04 b_{11} b_{22} + 0.04 a_{11} b_{22} + 0.16 b_{13} b_{22}$
3 5	$-0.0034602 b_{13} b_{22}$
4 0	$0.015625 b_{11} b_{31} + 0.140625 b_{13} b_{33} + 0.015625 a_{11} b_{31} + 0.03125 b_{22}^2$
4 2	$-0.0025 b_{11} b_{31} + 0.0225 b_{11} b_{33} + 0.0625 b_{13} b_{31} - 0.0025 a_{11} b_{31} + 0.0225 a_{11} b_{33}$
4 4	$-0.015625 b_{13} b_{31}$
4 6	$-0.0033284 b_{13} b_{31}$
5 1	$0.0236686 b_{22} b_{31} + 0.0532544 b_{22} b_{33}$
5 3	$-0.0034602 b_{22} b_{31}$
6 0	$0.03125 b_{33}^2 + 0.0034722 b_{31}^2$
6 2	$0.0225 b_{31} b_{33}$
6 4	$-0.003328 b_{31} b_{33}$

かる。

簡単な場合、すなわち正方形板でしかも初期たわみ  $w_0$  が

$$w_0 = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

で与えられる場合を考えてみよう。表-1 によって式 (8) は

(1)

$$\begin{aligned} & -1.465202 X + 0.05348172 \lambda Y + 0.500000 K^2 V \\ & + 0.500000 K^2 W - 1.500000 KXZ - 4.260000 KV^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -4.260000 KW^2 - 1.280000 KY^2 - 1.620000 KZ^2 \\ & + 1.500000 KXV + 1.500000 KXW + 4.680000 KYZ \\ & + 4.680000 KWZ - 2.000000 KVV - 0.500000 X^3 \\ & + 0.750000 X^2 V + 0.750000 X^2 W - 4.260000 XV^2 \\ & - 4.260000 XW^2 - 1.280000 XY^2 - 1.620000 XZ^2 \\ & - 2.000000 XYW + 4.680000 XVZ + 4.680000 XWZ \\ & - 20.250000 VWZ + 6.500000 VW^2 + 6.500000 V^2 W \\ & - 3.560000 VY^2 - 3.560000 WY^2 = 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & -23.44322 Y + (0.053481715 K + 0.053481715 X \\ & - 0.09626709 V - 0.09626709 W + 0.17328076 Z) \lambda \\ & - 1.280000 K^2 Y - 2.560000 KXY - 7.120000 KYW \\ & - 7.120000 KYV - 1.280000 X^2 Y - 7.120000 XYV \\ & - 7.120000 XYW - 24.816557 YZV \\ & - 24.81656 YZV + 27.81015 YV^2 - 27.81015 YW^2 \\ & - 8.000000 Y^3 - 15.337267 YZ^2 = 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & -118.68132 Z + 0.1732808 \lambda Y + 0.090000 K^2 V \\ & + 0.090000 K^2 W - 0.900000 K^2 Z - 2.520000 KXZ \\ & + 4.680000 KXV + 4.680000 KXW \\ & - 42.750000 KVV + 2.340000 X^2 V + 2.340000 X^2 W \\ & - 1.620000 X^2 Z - 42.750000 XVW + 20.250000 W^3 \\ & + 20.250000 V^3 - 40.500000 Z^3 - 86.60982 ZV^2 \\ & - 86.60982 ZW^2 - 12.40828 Y^2 V - 12.40828 Y^2 W \\ & - 15.33727 Y^2 Z = 0 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & -36.63004 V - 0.09626709 \lambda Y + 0.500000 K^2 X \\ & - 2.010000 K^2 V + 0.090000 K^2 Z - 1.000000 K^2 W \\ & - 8.520000 KXV + 0.750000 KX^2 - 2.000000 KXW \\ & - 3.560000 KY^2 + 0.250000 X^3 - 4.260000 X^2 V \\ & + 6.500000 KW^2 + 4.680000 KXZ - 22.50000 KZW \\ & + 13.00000 KVV - 1.000000 X^2 W + 2.340000 X^2 Z \\ & - 3.560000 XY^2 + 6.500000 ZW^2 - 22.50000 XWZ \\ & + 13.00000 XVW - 20.50000 V^3 + 60.75000 ZV^2 \\ & - 86.60982 Z^2 V - 27.81015 Y^2 V - 16.00000 Y^2 W \\ & - 29.50000 VW^2 - 12.40828 Y^2 Z = 0 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} & -36.63004 W - 0.09626709 Y + 0.500000 K^2 X \\ & - 2.010000 K^2 W + 0.090000 K^2 Z - 1.000000 K^2 V \\ & + 0.750000 KX^2 - 8.520000 KXW - 2.000000 KXV \\ & + 4.680000 KXV - 22.50000 KZV \\ & + 13.00000 KVV - 1.000000 X^2 V + 13.00000 XVW \\ & - 20.50000 W^3 + 60.75000 ZW^2 - 86.60982 Z^2 W \\ & - 27.81015 Y^2 W + 2.340000 X^2 Z - 3.560000 XY^2 \\ & + 6.500000 KV^2 - 3.560000 KY^2 + 0.250000 X^3 \\ & - 4.260000 X^2 W + 6.500000 XV^2 - 22.50000 XVZ \\ & - 16.00000 Y^2 V - 29.50000 V^2 W - 12.40828 Y^2 Z \\ & = 0 \end{aligned}$$

.....(9)

となる。ただし  $\lambda = b^2 h \tau / D$

$$K = a_{11}, X = b_{11}, Y = b_{22}, Z = b_{33}, V = b_{13},$$

$$W = b_{31}$$

式(9)は五元三次連立代数方程式であるがさらに  $b_{13}$  と  $b_{31}$  の対称性を考慮して四元方程式とすることができる。

**b) 諸応力の算出** 板厚に関して一様に生ずる応力を  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$  とすれば式(6)を微分することによってそれぞれ

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -(Eh^2 \pi^2 / b^2) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (q^2 \Phi_{p,q}) \times \cos \frac{p \pi x}{a} \cos \frac{q \pi y}{b} \dots\dots\dots(10-a)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -(Eh^2 \pi^2 / a^2) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (p^2 \Phi_{p,q}) \times \cos \frac{p \pi x}{a} \cos \frac{q \pi y}{b} \dots\dots\dots(10-b)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau + (Eh^2 \pi^2 / ab) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (p \cdot q \Phi_{p,q}) \sin \frac{p \pi x}{a} \sin \frac{q \pi y}{b} \dots\dots\dots(10-c)$$

**c) 境界線の相対変位**

$$[u]_{x=0}^x = \int_0^x \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx \dots\dots\dots(11-a)$$

$$[v]_{y=0}^y = \int_0^y \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy \dots\dots\dots(11-b)$$

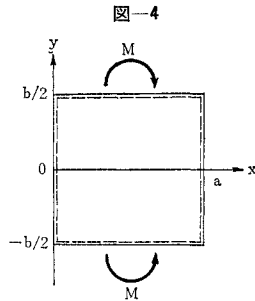
式(11)において  $\beta = 1$  とおくと

$$[u]_{x=0}^x = a = -\frac{\pi^2 h^2}{8b} (b_{11}^2 + 10 b_{13}^2 + 2 a_{11} b_{11} + 4 b_{22}^2 + 9 b_{33}^2) = [v]_{y=0}^y \dots\dots\dots(12)$$

すなわち Edge の相対変位は境界にそって一定である。

**(2) 一方向に面内曲げモーメント M を受ける初期たわみを有する四辺単純支持の長方形板の後座屈挙動**

(図-4)



前の場合と同じく、荷重を受けない方の境界辺にそってこれに垂直な方向の直応力の代数和は0とする。

この場合条件式は

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{along } y = \pm b/2 \dots\dots(13-a)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{along } x = 0, a \dots\dots(13-b)$$

$$M = -h \int_0^a \bar{\sigma}_y x dx \quad \text{along } y = \pm b/2 \dots\dots(13-c)$$

$$h \int_{-b/2}^{b/2} \bar{\sigma}_x dy = 0 \quad \text{along } x = 0, a \dots\dots(13-d)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = 0 \quad \text{along all boundaries} \dots\dots(13-e)$$

の5式である。

いま初期たわみ  $w_0$ , たわみ  $w$  をつぎのように級数に展開できるものとする。

$$w_0 = h \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \dots\dots(14)$$

$$w = h \sum_m \sum_n b_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \dots\dots\dots(15)$$

前の場合と同様にして式(1-a), (1-b)を解く。式(5)に対応する式として

$$\nabla^4 F = (Eh^2 \pi^4 / a^2 b^2) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{p,q} \times \cos \frac{p \pi x}{a} \cos \frac{2q \pi y}{b} \dots\dots\dots(16)$$

が得られるが、この解としてつぎの  $F$  が決定される。

$$F = -\frac{2M}{a^3 h} \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \Phi_{p,q} \times \cos \frac{p \pi x}{a} \cos \frac{2q \pi y}{b} \dots\dots\dots(17)$$

ただし

$$\Phi_{p,q} = C_{p,q} / (p^2 + 4 \beta^2 q^2)^2, \quad \beta = a/b$$

つぎに式(7)と同じような手法により基本式を導くと

$$\frac{\pi^4}{8 \beta^2} (r^2 + \beta^2 s^2)^2 b r_s - \frac{\partial M}{D} s^2 \sum_m^{m \neq r} \frac{m r}{(m^2 - r^2)^2} \times [(-1)^{m+r} - 1] (a m_s + b m_s) - \frac{Eh^2 \pi^2}{32 D} \sum_m \sum_n (a m_n + b m_n) \{ [2m(n+s) + n(m+r)]^2 \Phi_{m+r, (n+s)/2} - [2m(n+s) + (m-r)n]^2 \Phi_{m-r, (n+s)/2} - [2m(n+s) - (r-m)n]^2 \Phi_{r-m, (n+s)/2} + [2m(n-s) - (m+r)n]^2 \Phi_{m+r, (n-s)/2} - [2m(n-s) - (m-r)n]^2 \Phi_{m-r, (n-s)/2} - [2m(n-s) + (r-m)n]^2 \Phi_{r-m, (n-s)/2} + [2m(s-n) + (m+r)n]^2 \Phi_{m+r, (s-n)/2} - [2m(s-n) + (m-r)n]^2 \Phi_{m-r, (s-n)/2} - [2m(s-n) - (r-m)n]^2 \Phi_{r-m, (s-n)/2} = 0$$

ただし

$$\Phi_{p,q} (p < 0 \text{ or } q < 0) = 0$$

$$r = 1, 2, 3, \dots \quad s = 1, 3, 5, \dots$$

**4. 電子計算機による数値計算例**

初期たわみのないせん断力を受ける正方形板を例として取り上げ、この場合についての基本式を近似的に解き、ついで諸力学量すなわちたわみ  $w$ , 応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 主応力  $\sigma_1, \sigma_2$ , 主応力角  $\theta$ , Huber von Mises-Hencky の比較応力  $\sigma_M$ , Edge の相対変位  $u, v$  などを板の各百分点についてそれぞれ求めた。

(1) 基本方程式の解法

式(9)において  $a_{11}=0$  とおき, さらに  $b_{13}$  と  $b_{31}$  の対称性を考慮すればさらに簡単な4元3次齊次代数方程式を導くことができる。これらの式の解法の概要は

Step 1 線形理論による座屈点での各モード成分の比を求め<sup>2)</sup>, これを

$$\alpha_{cr} = b_{22}/b_{11}, \beta_{cr} = b_{33}/b_{11}, \tau_{cr} = b_{31}/b_{33}$$

とおく。

Step 2 荷重  $\lambda_i$  を座屈荷重  $\lambda_{cr}$  よりわずかにだけ増大し

$$\alpha_i = \alpha_{cr} \cdot [\delta + \phi \cdot \text{FLOAT}(M)]$$

$$\beta_i = \beta_{cr} \cdot [\delta + \phi \cdot \text{FLOAT}(N)]$$

ただし

$$M = 1, 2, \dots, 50; N = 1, 2, \dots, 50$$

として  $\delta, \phi$  を適当な値にとり変動させる。

Step 3  $i$  番目の方程式において  $b_{22}, b_{33}, b_{31}$  をすべて  $\alpha_i, \beta_i, \tau_{cr}$  と  $b_{11}$  で表わし

$$U_l \cdot b_{11}^3 + T_l \cdot b_{11} = 0 \quad (l=1, 2, 3, 4)$$

の形にする。ここに  $U_l, T_l$  は

$$U_l = U_l(A_{jk}, \alpha_i, \beta_i, \tau_{cr}, \lambda_i)$$

$$T_l = T_l(A_{jk}, \alpha_i, \beta_i, \tau_{cr})$$

$A_{jk}$ : 基本代数方程式の定数係数のつくる Matrix の要素

として表わされる。

Step 4

$$b_{11}(l) \equiv RT(l) = \sqrt{-T_l/U_l}$$

$$T_l \cdot U_l < 0 \text{ for } l=1, 2, 3, 4$$

Step 5 すべての  $M, N$  の組み合わせについて  $RT(l)$  を計算し相対的な誤差として

$$SS = [1 - RT(2)/RT(1)]^2 + [1 - RT(3)/RT(1)]^2 + [1 - RT(4)/RT(1)]^2$$

を最小ならしめる ( $M, N$ ) の組を求めそのときの  $\alpha, \beta$  を  $\alpha^*, \beta^*$  として

$$b_{11} = \frac{1}{4} \sum_l RT(l), \quad b_{22} = \alpha^* b_{11}, \quad b_{33} = \beta^* b_{11},$$

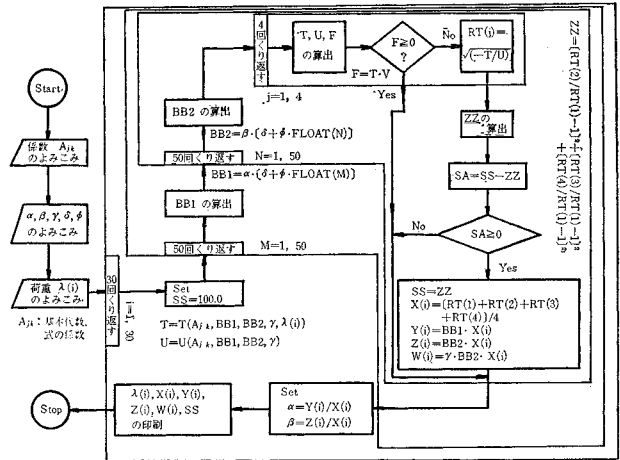
$$b_{31} = \tau_{cr} \cdot \beta^* b_{11}$$

によって未知数を決定する。

Step 6  $\alpha_{cr} = \alpha^*, \beta_{cr} = \beta^*$  として初めの Step からくり返し順次大きな荷重に対して解を求める。

以上が計算過程であるが  $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{31}$  のうち  $b_{33}, b_{31}$  の大きさは  $b_{11}, b_{22}$  の大きさと比較すると十分小さいと考えられるため  $b_{31}/b_{33} = r$  を座屈点のときの値にとって以後もこの比は変化しないものと考えた。実際は  $r$  の値は変動するであろうがその影響は一応小さいものと考えられるし, このようないわば“しらみつぶし”式の計算には時間を要するのでやむを得ない方法であろう

図-5 未知数  $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{31}$  を求めるためのプログラムフローチャート



(もちろん後でこの点について検討を行なう必要がある)。図-5 は未知数決定のためのプログラムフローチャートを示すものである。

(2) 計算結果とその解析

a) 基本方程式の解 表-2 に各荷重レベルに対する解が示してある。解の大きさは座屈点の近傍において急激に増加し, 荷重が大きくなるにしたがってその増加率が鈍化する。

表-2

$b^2hr/D$	$b_{11}$	$b_{22}$	$b_{33}$	$b_{13}=b_{31}$
93.1	0.1754	0.05155	0.00697	-0.01255
93.2	0.2714	0.07948	0.01068	-0.01923
93.4	0.3645	0.1063	0.01417	-0.02551
93.7	0.4340	0.1263	0.01674	-0.03013
94.2	0.5403	0.1566	0.02050	-0.03690
94.6	0.6177	0.1784	0.02311	-0.04160
95.0	0.6625	0.1912	0.02466	-0.04439
96.0	0.8103	0.2315	0.02926	-0.05739
97.0	0.8919	0.2549	0.03188	-0.05739
98.0	0.9902	0.2829	0.03469	-0.06244
99.0	1.061	0.3033	0.03681	-0.06626
100.0	1.129	0.3227	0.03877	-0.06979
102.0	1.237	0.3533	0.04203	-0.07566
104.0	1.358	0.3879	0.04523	-0.08141
106.0	1.434	0.4137	0.04775	-0.08596
108.0	1.525	0.4398	0.05026	-0.09047
110.0	1.594	0.4646	0.05256	-0.09461
114.0	1.761	0.5131	0.05689	-0.1024
140.0	2.496	0.7612	0.07871	-0.1417
150.0	2.738	0.8434	0.08548	-0.1539
160.0	2.941	0.9152	0.09184	-0.1653
170.0	3.119	0.9899	0.09836	-0.1771
190.0	3.449	1.116	0.1098	-0.1977
210.0	3.776	1.231	0.1199	-0.2159
240.0	4.232	1.397	0.1334	-0.2402
270.0	4.573	1.540	0.1471	-0.2648
300.0	4.975	1.675	0.1579	-0.2841
340.0	5.385	1.831	0.1726	-0.3106
380.0	5.809	1.995	0.1862	-0.3351
440.0	6.337	2.198	0.2051	-0.3692
500.0	6.900	2.394	0.2211	-0.3980

b) たわみ 図-6 は板の中央点(0.5a, 0.5a)のたわみ曲線であるがこれより板がせん断座屈してもたわみは極端に大きくなることはないことがわかる。また図-7 は特定の荷重レベルにおけるたわみ分布を示す立体図である。

図-6 板の中央点のたわみ曲線

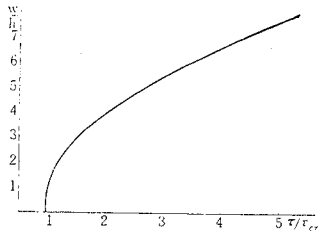


図-7  $\tau/\tau_{cr}=5.4$  のときのたわみ波形

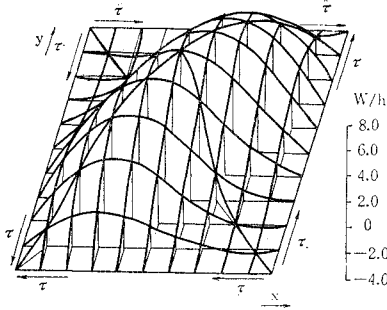


図-8  $\tau/\tau_{cr}=5.4$  のときの  $\sigma_x$  の分布形

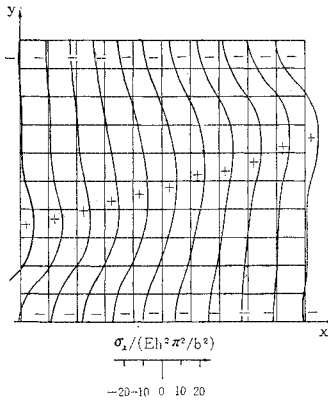


図-10(a)  $\tau/\tau_{cr}=1$  のときの主応力線図

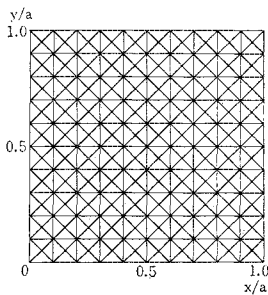


図-10(b)  $\tau/\tau_{cr}=1.14$  のときの主応力線図

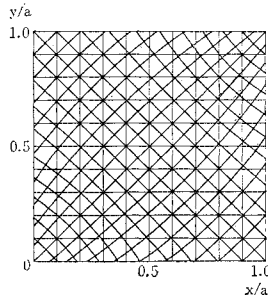
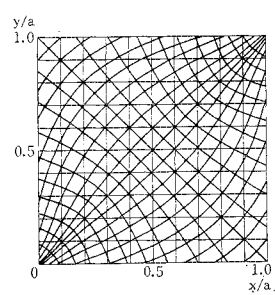


図-10(c)  $\tau/\tau_{cr}=5.38$  ときの主応力線図



c) 応力諸量

• 直応力  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ : 図-8 は荷重レベル  $\tau/\tau_{cr}=5.4$  に対する  $\bar{\sigma}_x$  の分布を示すものである。Edge においては外

図-9(a) 板の対角線  $y=x$  上の  $\tau_{xy}$  の分布

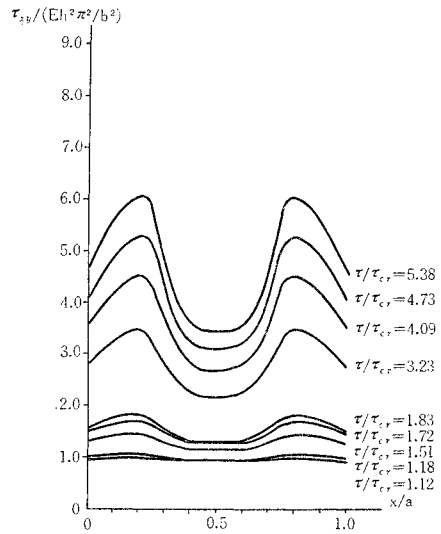
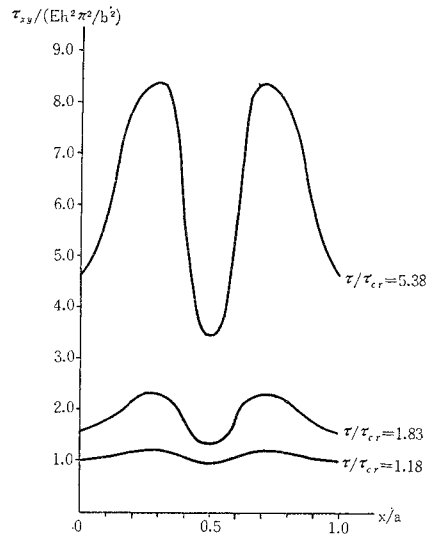


図-9(b) 板の対角線  $y=a-x$  上の  $\tau_{xy}$  の分布



から拘束力が働いているものとする。なお  $\bar{\sigma}_y$  の分布は  $\bar{\sigma}_x$  の分布と対角線に関して対称なので省略する。

•せん断応力  $\bar{\tau}_{xy}$  : 図-9 は板の2つの対角線上に生ずるせん断応力  $\tau_{xy}$  の分布を示すものである。

•主応力線 : 図-10 は3つの荷重レベルに対する主応力線図を示すものであり、初め 45° 方向に走っていた直線群が変化するのが見受けられる。

•最大最小主応力の大きさ : 図-11 は板の2つの対角線上に生ずる最大最小主応力の大きさの分布を示す。また 図-12 は特定の点に着目してそこに生ずる主応力の大きさをプロットしたものであるが、中央付近ではある

図-11 (a) 板の対角線  $y=x$  上の主応力の大きさ分布

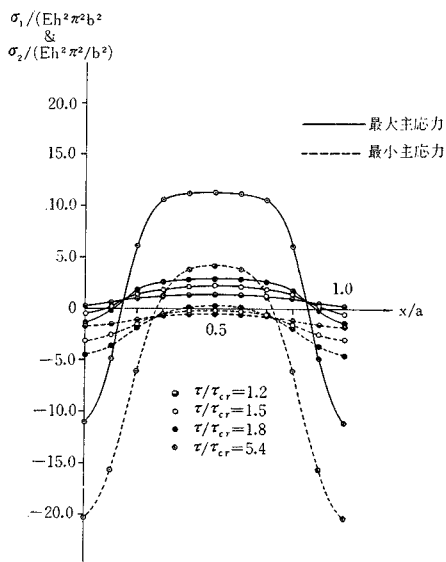


図-11 (b) 板の対角線  $y=a-x$  上の主応力の大きさ分布

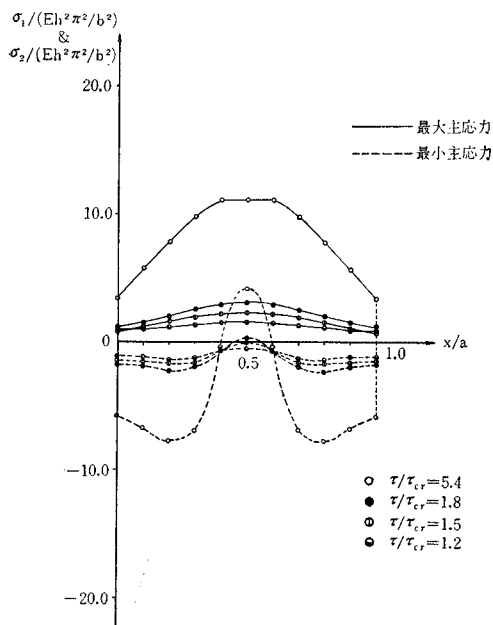


図-12 (a) 板内の点  $(0.3a, 0.3a)$ ,  $(0.7a, 0.7a)$  上の主応力

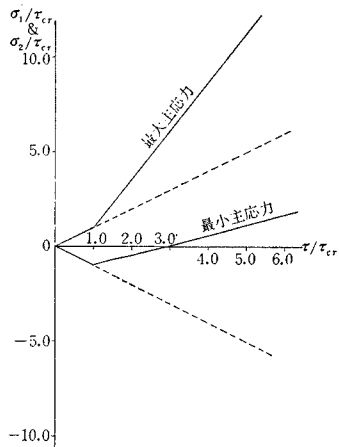


図-12 (b) 板内の点  $(0.4a, 0.6a)$ ,  $(0.6a, 0.4a)$  上の主応力

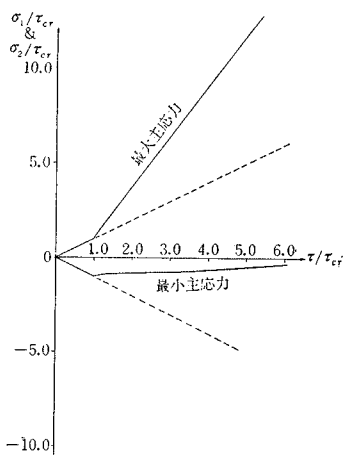
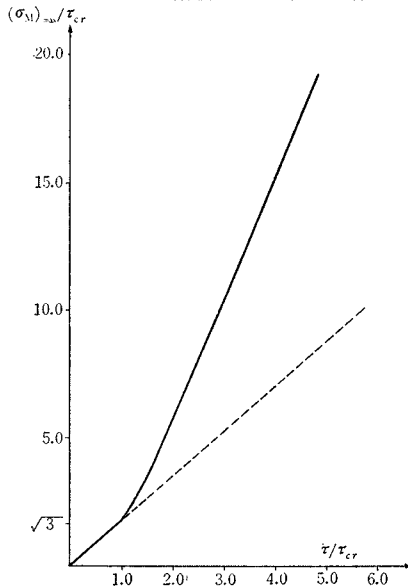


図-13  $(\sigma_M)_{max}$  と  $\tau/\tau_{cr}$  の関係



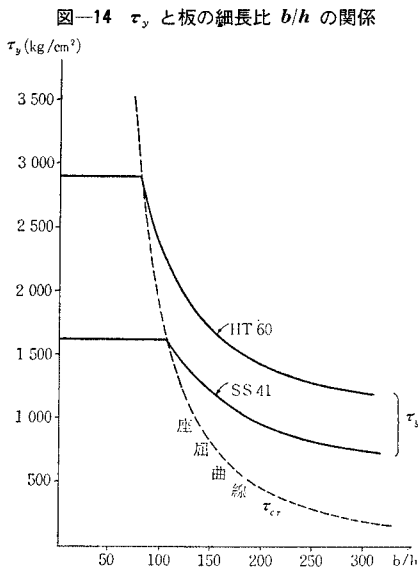


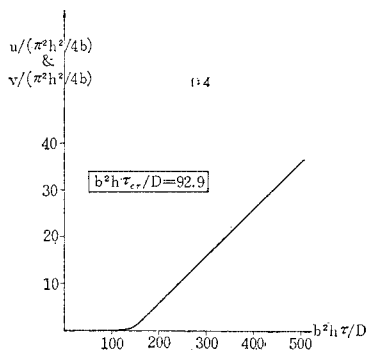
図-14  $\tau_y$  と板の細長比  $b/h$  の関係

荷重以上に達すれば最小主応力も圧縮側から引張側へ変化することが認められる。このことは関西橋梁鉄骨溶接研究会が昭和 37 年に行なった実験の際にも見受けられていると思われる<sup>9)</sup>。しかし Skaloud 氏の計算結果ではこのようなことは全く現われていない。

• Huber-von Mises-Hencky の比較応力  $\bar{\sigma}_M : \bar{\sigma}_M$  の最大値  $(\sigma_M)_{max}$  が降伏応力  $\sigma_y$  に達したとき板内の一点で降伏すると考える。計算結果によれば  $(\sigma_M)_{max}$  の生ずる箇所は荷重が座屈荷重の 1.5 倍ぐらいまでは点  $(0.3a, 0.7a)$  または点  $(0.7a, 0.3a)$  でありそれ以上に荷重を増大すれば点  $(0.7a, 1.0a)$  または点  $(1.0a, 0.7a)$ , 点  $(0, 0.3a)$ , 点  $(0.3a, 0)$  である。

• 降伏曲線：図-13 は上に述べた  $(\sigma_M)_{max}$  と荷重レベル  $\tau/\tau_c$  との関係を図示したものである。つぎに 図-14 はこれを用いて腹板の細長比  $b/h$  と降伏応力度に達するときの荷重レベル  $\tau_y$  との関係を示す。ただし計算例として関西橋梁鉄骨溶接研究会の行なった試験結果を利用し SS 41 ( $\sigma_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$ ), HT 60 ( $\sigma_y = 5000 \text{ kg/cm}^2$ ) の2つをとっている。この図によって明らかに HT 60 の方が SS 41 よりも有利であることがわかる。

図-15 Edge の相対変化  $u, v$



d) Edge の相対変位 式 (12) を計算して相対変位  $u, v$  の大きさを各荷重レベルについてプロットすれば 図-15 のようになる。

### 5. む す び

以上のせん断耐力に関する計算結果よりつぎのことが明らかになった。

(1) 荷重  $\tau$  が座屈荷重  $\tau_{cr}$  を越えて増大しても極端に大きなたわみは生じない。

(2) 荷重が  $\tau_{cr}$  から増大するにしたがって、たわみ波形において斜め方向の細長い帯状の起伏が次第に顕著になる。

(3) 座屈後荷重の増大とともに相対する板の端辺は互いに接近するように変形するが、この相対変位は荷重が  $\tau_{cr}$  の 5 倍ほどになると板の細長比 100, 200, 300 に対してそれぞれ板厚の 0.9 倍, 0.4 倍, 0.3 倍ぐらいの大きさになる。したがってもし板の境界にそってフランジや補剛材が配置されておればこの相対変位は拘束されることになるので実際の腹板の耐力はいま考えている板のそれと比較して大きい。

(4) 荷重の増大とともに板には膜引張力が発達する。そのとき最大主応力と最小主応力の大きさの差は次第に大きくなり、板の中央半分ぐらいの領域においては明確な斜め張力場が認められる。荷重が非常に大きくなると最小主応力も圧縮側から引張側へと変化するようになるが、この現象は板の境界部材の剛度と腹板のそれとの比によって全く異なる可能性があることを示唆しておく。

(5) 板のせん断力による座屈後の「荷重-たわみ曲線」、「荷重-応力曲線」を描くと前者はいわば放物線形の曲線であるのに対して後者はほぼ直線形を示す。

(6) 現在の鋼構造物設計方書によればせん断耐力に関しては高張力鋼の使用によるメリットは大きくない。しかし実際にはもし降伏応力に対して一定の安全率を有するように設計すれば本論文に述べられたように普通鋼よりも高張力鋼の方が有利であることが結論づけられる。しかも実際の腹板は堅固な上下フランジと補剛材によって連続的に支持されているので安定性は解析の対象となった板よりは明らかに良好であり、高張力鋼の有益性が生かせよう。

今後さらに本研究において考慮されたいような場合についてはもちろん他の複雑な場合についても数値計算を行なって資料としたいと思う。

### 6. 記 号

$x, y, z$  : 直交座標,  $Z$  は板厚方向

$M$  : 外力曲げモーメント

$\sigma_x, \sigma_y, \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  :  $x-, y$ -軸に平行な直応力度成分であり



記号(～)は板の中央面に関すること  
を示す(以下同じ)

$\tau$ : 外力せん断応力度

$\tau_{cr}$ : 座屈せん断応力度(座屈荷重)

$\tau_{xy}, \bar{\tau}_{xy}$ : 直交座標に関するせん断応力度成分

$\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ : 主応力度

$\sigma_M, \bar{\sigma}_M$ : Huber-von Mises-Hencky の降伏仮  
説にもとづく比較応力度

$u, v, w, \bar{u}, \bar{v}$ : 直交座標に関する変位成分

$w_0$ : 初期たわみ

$E$ : ヤング係数

$G$ : 剛性率

$\nu$ : ポアソン比

$a, b$ : 板の寸法

$h$ : 板の厚さ

$\beta = a/b$ : 板の縦横比(数値計算においては  $\beta = 1$  の場合をとりあげている)

$a_{mn}, b_{mn}$ : たわみを表示する係数

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ : 板剛度

$F$ : Airy の応力関数

$\phi_{p,q}$ : Airy の応力関数の非線形要素の係数

#### 参考文献

- 1) Novozhilov, V.V.: "Foundations of Nonlinear Theory of Elasticity", 1953.
- 2) Mansfield, E.H.: "The Bending and Stretching of Plates", pp. 99-133, Vol. 6 of International Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics.
- 3) Langhaar, H.L.: "Energy Methods in Applied Mechanics", pp. 159-164, John Wiley and Sons, Inc., 1962.
- 4) Basler, K.: "Strength of Plate Girders in Shear", Proceedings of ASCE ST7, 1961.
- 5) Basler, K. and Thürlimann, B.: "Strength of Plate Girders in Bending", Proceedings of ASCE ST 6, 1961.
- 6) Massonet, C.E.L.: "Stability Considerations in the Design of Steel Plate Girders", Proceedings of ASCE ST 1, 1960.
- 7) Yamaki, N.: "Postbuckling Behaviour of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression", Journal of Applied Mechanics September, 1959, June 1960.
- 8) Skaloud, M.: "Design of Webplates of Steel Girder with Regard to the Postbuckling Behaviour (Analytical Solution)", "The Structural Engineer, December, 1962.
- 9) 「プレートガーダーの耐荷力に関する理論と実験」, 関西橋梁鉄骨溶接研究会, 1965年7月

(1966.5.11・受付)