

# 周辺で単純支持される無梁板の解法\*

## ANALYSIS OF SIMPLY SUPPORTED RECTANGULAR PLATE WITH INTERMEDIATE COLUMNS (FLAT SLAB)

山崎 徳也\*\*・樗木 武\*\*\*  
By Tokuya Yamasaki and Takeshi Chisyaki

### 1. 緒 言

板と柱とが直結する無梁板構造物は、柱・はりおよび板の三者からなる構造物に比較して、構造形式が簡単のため機能的、経済的かつ施工が容易である等の利点をもつ。このため、アメリカ・ドイツをはじめとする諸外国はもちろんのこと、わが国においてもひろく利用されるにいたり、無梁板の解法に関する研究も Marcus<sup>1)</sup>, Nádai<sup>2)</sup>, Lewe<sup>3)</sup>, Krieger<sup>4)</sup>, Grein<sup>5)</sup>, 堯天氏<sup>6)</sup>, 坪井・宮崎氏<sup>7), 8)</sup>, 棚橋氏<sup>9)</sup>ら多くの人々により行なわれてきた。しかし、これらの研究は、無梁板が構造的に対称かつ少なくとも一方は無限長であること、中間支柱の反力モーメントを無視し、あるいは考慮しても各中間支柱に同一反力モーメントを仮定する等のきわめて単純な仮定にもとづくこと、載荷が等分布荷重または対称荷重等の特殊な状態に限定されること、解法が複雑であること等の多くの難点を持ち、したがって、その適用範囲に自ずから限界をもつものである。特に任意垂直荷重を受け、柱配列、柱間隔および柱の剛度が全く任意であり、かつ板がいずれの方向においても有限長であるとき無梁板の解法を論じた論文はいまだ見当らない。

本論文は柱配列、柱間隔および柱の剛度が任意でかつ板周辺が単純支持された有限長の長方形無梁板に任意垂直荷重が働く場合の無梁板の理論解析法を提示するもので、著者らが先に報告した“フーリエ級数による連続はりおよびラーメンの解法<sup>10)</sup>”における解析手法を板理論に応用拡張したものである。

### 2. 解 法

無梁板は板と柱とが直結するゆえ、板から柱に垂直反力、 $x, y$  方向の水平反力、反力モーメントおよび板面内のねじりモーメントが伝えられるが(図-1 参照)、本論文では、板面に対して垂直荷重が働く場合の板の垂直面内曲げを論ずるので、板面内のねじりモーメントおよび水平反力は微小としてこれらを見捨てる、板から柱に垂直反力および、 $x, y$  方向の反力モーメントが伝えら

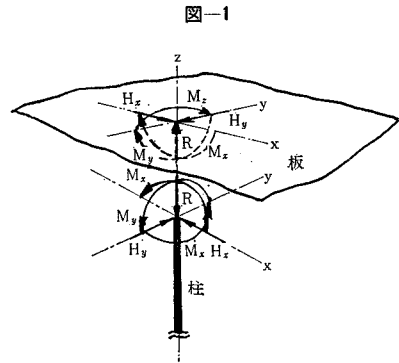


図-1

れるるとき等方性等断面の無梁板の解法を論ずることとする。

#### (1) 板の弾性曲面

平板の弾性曲面を  $w$ 、これに働く任意垂直荷重の荷重強度を  $q(x, y)$  とすれば、平板の基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \dots\dots(1)$$

ここに、 $D = Eh_p^3 / 12(1 - \nu^2)$  (板剛度)

$E$  = 板の弾性係数

$\nu$  = 板のポアソン比

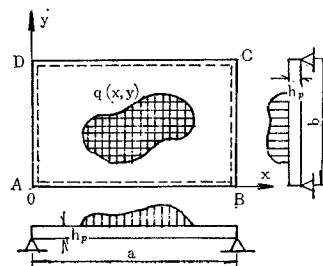
$h_p$  = 板の厚さ

図-2 に示すスパン  $a, b$  の長方形板において、AB 辺に沿って  $x$  軸、AD 辺に沿って  $y$  軸、紙面に直交して  $w$  軸をもつ直交座標系を導入し、かつ式(1)の特殊解を  $w_0$ 、余関数を  $w_1$  とすれば式(1)の一般解  $w$  は次式で与えられる。

$$w = w_1 + w_0 \dots\dots(2)$$

特殊解  $w_0$  は  $x, y$  の変数分離型でかつ二重正弦フ

図-2



\* 昭和 40 年度土木学会西部支部研究発表会および第 21 回土木学会年次学術講演会にて発表

\*\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 九州大学助手 工学部土木工学科

一リエ級数である次式を仮定する。

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots (3)$$

ここに、 $G_{mn}$  は任意定数である。

また、余関数  $w_1$  は次式を仮定する。

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y \dots (4)$$

式(4)の  $w_1$  は当然ながら

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0 \dots (5)$$

を満足しなければならない。したがって、式(4)を式(5)に代入すれば、 $X_n(x)$ 、 $Y_m(y)$  がつぎのごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} X_n(x) &= (A_n + B_n x) \sinh \frac{n\pi}{b} x \\ &\quad + (C_n + D_n x) \cosh \frac{n\pi}{b} x \\ Y_m(y) &= (A'_m + B'_m y) \sinh \frac{m\pi}{a} y \\ &\quad + (C'_m + D'_m y) \cosh \frac{m\pi}{a} y \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ただし、 $A_n, B_n, C_n, D_n, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$  は積分定数である。

以上、式(3)、(4)、(6)より式(2)に示す長方形板の弾性曲面  $w$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} w = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A'_m + B'_m y) \sinh \frac{m\pi}{a} y \right. \\ & \left. + (C'_m + D'_m y) \cosh \frac{m\pi}{a} y \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_n + B_n x) \sinh \frac{n\pi}{b} x \right. \\ & \left. + (C_n + D_n x) \cosh \frac{n\pi}{b} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots (7) \end{aligned}$$

ここで、図-2 に示すとき四辺単純支持長方形板の境界条件は  $x$  および  $y$  方向のモーメントを  $M_x$  および  $M_y$  とすればつぎのとおりである。

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で} \\ w=0, M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ y=0, b \text{ で} \\ w=0, M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

したがって、式(7)を式(8)に代入してえられる諸式を連立に解き、積分定数  $A_n, B_n, C_n, D_n, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$  を求めればつぎの結果をうる。

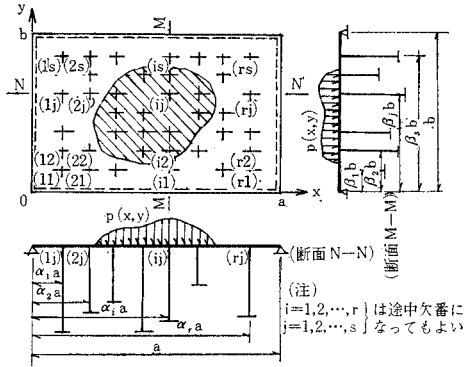
$$\left. \begin{aligned} A_n = B_n = C_n = D_n = 0 \\ A'_m = B'_m = C'_m = D'_m = 0 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

式(9)を式(7)に代入すれば、四辺単純支持長方形板の弾性曲面  $w$  がえられつぎのごとく簡単となる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots (10)$$

さて、本論文で取り扱う無梁板は図-3 に示すごとく周辺単純支持であるから、載荷荷重  $p(x, y)$  と同様各中間支柱の垂直反力および  $x, y$  方向におけるそれぞれの反力モーメントをすべて荷重とみなせば、これらの力

図-3



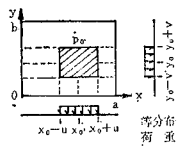
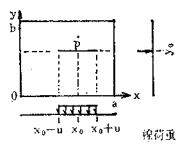
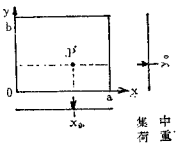
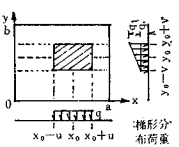
およびモーメントが作用するスパン  $a, b$  なる周辺単純支持長方形板として取り扱える。いま、無梁板を支える中間支柱をそれぞれ 11, 12, ..., 1s, 21, 22, ..., 2s, ..., ij, ..., r1, r2, ..., rs とし、それらの座標値を  $(\alpha_1 a, \beta_1 b), (\alpha_2 a, \beta_2 b), \dots, (\alpha_i a, \beta_s b), (\alpha_2 a, \beta_1 b), (\alpha_2 a, \beta_2 b), \dots, (\alpha_2 a, \beta_s b), \dots, (\alpha_r a, \beta_j b), \dots, (\alpha_r a, \beta_1 b), (\alpha_r a, \beta_2 b), \dots, (\alpha_r a, \beta_s b)$  とする(図-3参照)。また、板面に垂直な任意荷重  $p(x, y)$  が作用するとき、板から各中間支柱に伝えられる垂直反力を  $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1s}, R_{21}, R_{22}, \dots, R_{2s}, \dots, R_{ij}, \dots, R_{r1}, R_{r2}, \dots, R_{rs}$  とし、 $x$  方向の反力モーメントを  $M_{11}^x, M_{12}^x, \dots, M_{1s}^x, M_{21}^x, M_{22}^x, \dots, M_{2s}^x, \dots, M_{ij}^x, \dots, M_{r1}^x, M_{r2}^x, \dots, M_{rs}^x$ 、 $y$  方向の反力モーメントを  $M_{11}^y, M_{12}^y, \dots, M_{1s}^y, M_{21}^y, M_{22}^y, \dots, M_{2s}^y, \dots, M_{ij}^y, \dots, M_{r1}^y, M_{r2}^y, \dots, M_{rs}^y$  とする。なお、垂直反力の符号は上向きを正とし、 $x$  方向の反力モーメントは座標原点側からみて右回りを正、 $y$  方向の反力モーメントは座標原点側からみて左回りを正とする。しかるとき、各中間支柱における垂直反力を二重正弦フーリエ級数展開すれば次式のごとくなる。

$$R_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{ij} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots (11)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, s$

$$\begin{aligned} F_{mn}^{ij} &= \frac{4}{ab} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\alpha_i a - \Delta x}^{\alpha_i a + \Delta x} \int_{\beta_j b - \Delta y}^{\beta_j b + \Delta y} \frac{R_{ij}}{4 \Delta x \Delta y} \\ &\quad \times \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot dx dy \\ &= \frac{4}{ab} R_{ij} \cdot \sin m\pi \alpha_i \cdot \sin n\pi \beta_j \dots (12) \end{aligned}$$

表-1  $F_{mn}$  一覧

| 荷重状態   | 二重正弦フーリエ級数展開式展開係数 ( $F_{mn}$ )   |   |
|--|--|---|
|  <p>均分布荷重</p>   | $F_{mn} = \frac{16 p_0}{mn \pi^2} \cdot \sin \frac{m \pi u}{a} \cdot \sin \frac{m \pi x_0}{a} \cdot \sin \frac{n \pi v}{b} \cdot \sin \frac{n \pi y_0}{b}$   |   |
|  | 特  | $x_0 = u = a/2$ $y_0 = v = a/2$ $F_{mn} = \frac{16 p_0}{mn \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{m \pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{n \pi}{2}$  |
|  | 例  | $x_0 = u = a/2$ $y_0 = v = a/4$ $F_{mn} = \frac{16 p_0}{mn \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{m \pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{n \pi}{4}$  |
|  <p>線荷重</p>     | $F_{mn} = \frac{8 p}{m \pi b} \cdot \sin \frac{m \pi u}{a} \cdot \sin \frac{m \pi x_0}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y_0}{b}$  |   |
|  | 特  | $x_0 = u = a/2$ $y_0 = b/2$ $F_{mn} = \frac{8}{m \pi b} \cdot \sin^2 \frac{m \pi}{2} \cdot \sin \frac{n \pi}{2}$  |
|  | 例  | $x_0 = u = a/2$ $y_0 = b/4$ $F_{mn} = \frac{8}{m \pi b} \cdot \sin^2 \frac{m \pi}{2} \cdot \sin \frac{n \pi}{4}$  |
|  <p>集中荷重</p>    | $F_{mn} = \frac{4 P}{ab} \cdot \sin \frac{m \pi x_0}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y_0}{b}$  |   |
|  | 特  | $x_0 = a/2$ $y_0 = b/2$ $F_{mn} = \frac{4 P}{ab} \cdot \sin \frac{m \pi}{2} \cdot \sin \frac{n \pi}{2}$   |
|  | 例  | $x_0 = a/4$ $y_0 = b/4$ $F_{mn} = \frac{4 P}{ab} \cdot \sin \frac{m \pi}{4} \cdot \sin \frac{n \pi}{4}$   |
|  <p>梯形分布荷重</p> | $F_{mn} = \frac{16}{mn \pi^2} \cdot \sin \frac{m \pi u}{a} \cdot \sin \frac{m \pi x_0}{a} \left\{ q \sin \frac{n \pi v}{b} \cdot \sin \frac{n \pi y_0}{b} - \frac{1}{2} q_1 \cos \frac{n \pi}{b} (y_0 + v) + \frac{q_1 b}{2 n \pi v} \cdot \sin \frac{n \pi v}{b} \cdot \cos \frac{n \pi y_0}{b} \right\}$ |   |
|  | 特  | $x_0 = u = a/2$ $y_0 = v = b/2$ $F_{mn} = \frac{16}{m n \pi^2} \cdot \sin^2 \frac{m \pi}{2} \left\{ q \cdot \sin^2 \frac{n \pi}{2} - \frac{(-1)^n}{2} q_1 \right\}$ |
|  | 例  | $x_0 = u = a/2$ $y_0 = v = b/2$ $q = 0$ $F_{mn} = -\frac{8(-1)^n}{m n \pi^2} \cdot q_1 \cdot \sin^2 \frac{m \pi}{2}$  |

また、載荷荷重の二重正弦フーリエ級数展開式はつぎのとおりである。

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cdot \sin \frac{m \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n \pi}{b} y \quad \dots\dots\dots(13)$$

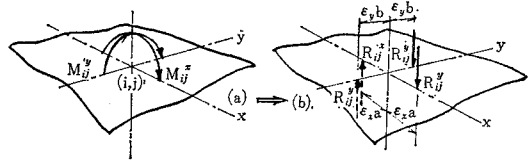
ここに、

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n \pi}{b} y \cdot dx \cdot dy \quad \dots\dots\dots(14)$$

式 (14) の展開係数  $F_{mn}$  を種々の荷重状態について算出すれば、表-1 のごとくなる。

反力モーメント  $M_{ij}^x, M_{ij}^y$  については、これらを直接正弦フーリエ級数に展開することができないので、中間支柱から  $x$  および  $y$  方向にそれぞれ正および負の方向に  $\epsilon_x a, \epsilon_y b$  離れた一対の偶力 ( $R_{ij}^x, -R_{ij}^x$ ) および ( $R_{ij}^y, -R_{ij}^y$ ) に置きかえる (図-4 参照)。すなわち、 $M_{ij}^x, M_{ij}^y$  と  $R_{ij}^x, R_{ij}^y$  との関係はつぎのとおりで

図-4



ある。

$$M_{ij}^x = 2 \epsilon_x a R_{ij}^x, \quad M_{ij}^y = 2 \epsilon_y b R_{ij}^y \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots, r, \quad j=1, 2, \dots, s$

しかるとき、 $R_{ij}^x, -R_{ij}^x, R_{ij}^y$  および  $-R_{ij}^y$  を二重正弦フーリエ級数展開すれば次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} R_{ij}^x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ij}^x \cdot \sin \frac{m \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n \pi}{b} y \\ -R_{ij}^x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{ij}^x \cdot \sin \frac{m \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n \pi}{b} y \\ R_{ij}^y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ij}^y \cdot \sin \frac{m \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n \pi}{b} y \end{aligned} \right\}$$

$$-R_{ij}^y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_{ij}^y} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, s$

$$A_{ij}^x = \frac{4}{ab} \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_y \rightarrow 0} \int_{(\alpha_i - \epsilon_x)a + dx}^{(\alpha_i - \epsilon_x)a - dx} \int_{\beta_j b - dy}^{\beta_j b + dy} \frac{R_{ij}^x}{4 \Delta x \Delta y} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot dx \cdot dy$$

$$= \frac{4}{ab} \cdot R_{ij}^x \cdot \sin m\pi(\alpha_i - \epsilon_x) \cdot \sin n\pi\beta_j$$

同様に、

$$\overline{A_{ij}^x} = -\frac{4}{ab} R_{ij}^x \cdot \sin m\pi(\alpha_i + \epsilon_x) \cdot \sin n\pi\beta_j$$

$$A_{ij}^y = \frac{4}{ab} R_{ij}^y \cdot \sin m\pi\alpha_i \sin n\pi(\beta_j - \epsilon_y)$$

$$\overline{A_{ij}^y} = -\frac{4}{ab} R_{ij}^y \cdot \sin m\pi\alpha_i \sin n\pi(\beta_j + \epsilon_y)$$

.....(17)

前述のごとく、無梁板に働く任意垂直荷重  $p(x, y)$  の他に各中間支柱の垂直反力および反力モーメントをも荷重とみなし式(1)の右辺に式(11), (13)および(16)を代入し、かつ  $w$  の式として式(10)を左辺に代入すれば、結局任意定数  $G_{mn}$  がつきのごとく決定される。

$$G_{mn} = T_{mn} / D \left\{ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 \quad \dots\dots(18)$$

ただし、

$$T_{mn} = F_{mn} - (F_{mn}^{11} + F_{mn}^{12} + \dots + F_{mn}^{1s} + F_{mn}^{21} + F_{mn}^{22} + \dots + F_{mn}^{2s} + \dots + F_{mn}^{ij} + \dots + F_{mn}^{r1} + F_{mn}^{r2} + \dots + F_{mn}^{rs}) - \{(A_{11}^x + \overline{A_{11}^x}) + (A_{12}^x + \overline{A_{12}^x}) + \dots + (A_{1s}^x + \overline{A_{1s}^x}) + (A_{21}^x + \overline{A_{21}^x}) + \dots + (A_{22}^x + \overline{A_{22}^x}) + \dots + (A_{2s}^x + \overline{A_{2s}^x}) + \dots + (A_{ij}^x + \overline{A_{ij}^x}) + \dots + (A_{r1}^x + \overline{A_{r1}^x}) + (A_{r2}^x + \overline{A_{r2}^x}) + \dots + (A_{rs}^x + \overline{A_{rs}^x})\} - \{(A_{11}^y + \overline{A_{11}^y}) + (A_{12}^y + \overline{A_{12}^y}) + \dots + (A_{1s}^y + \overline{A_{1s}^y}) + (A_{21}^y + \overline{A_{21}^y}) + \dots + (A_{22}^y + \overline{A_{22}^y}) + \dots + (A_{2s}^y + \overline{A_{2s}^y}) + \dots + (A_{ij}^y + \overline{A_{ij}^y}) + \dots + (A_{r1}^y + \overline{A_{r1}^y}) + (A_{r2}^y + \overline{A_{r2}^y}) + \dots + (A_{rs}^y + \overline{A_{rs}^y})\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

さて、図-4(a)の反力モーメント  $M_{ij}^x, M_{ij}^y$  の正弦フーリエ級数展開式は図-4(b)において  $\epsilon_x \rightarrow 0, \epsilon_y \rightarrow 0$  とした場合の極限状態と与えられる。したがって、式(19)における、 $(A_{11}^x + \overline{A_{11}^x}), (A_{12}^x + \overline{A_{12}^x}), \dots, (A_{ij}^x + \overline{A_{ij}^x}), \dots, (A_{rs}^x + \overline{A_{rs}^x})$  および  $(A_{11}^y + \overline{A_{11}^y}), \dots, (A_{ij}^y + \overline{A_{ij}^y}), \dots, (A_{rs}^y + \overline{A_{rs}^y})$  は式(15), (17)を用いてつきのごとく与えられる。

$$A_{ij}^x + \overline{A_{ij}^x} = \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4 R_{ij}^x}{ab} \sin m\pi(\alpha_i - \epsilon_x) \cdot \sin n\pi\beta_j \right.$$

$$\left. - \frac{4 R_{ij}^x}{ab} \sin m\pi(\alpha_i + \epsilon_x) \sin n\pi\beta_j \right\} = \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} \left( - \frac{2 M_{ij}^x}{a^2 b \epsilon_x} \cdot \cos m\pi\alpha_i \cdot \sin m\pi\epsilon_x \cdot \sin n\pi\beta_j \right) = - \frac{4 m\pi}{a^2 b} \cdot M_{ij}^x \cdot \cos m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$A_{ij}^y + \overline{A_{ij}^y} = \lim_{\epsilon_y \rightarrow 0} \left\{ \frac{4 R_{ij}^y}{ab} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi(\beta_j - \epsilon_y) - \frac{4 R_{ij}^y}{ab} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi(\beta_j + \epsilon_y) \right\} = \lim_{\epsilon_y \rightarrow 0} \left( - \frac{2 M_{ij}^y}{ab^2 \epsilon_y} \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \cos n\pi\beta_j \cdot \sin n\pi\epsilon_y \right) = - \frac{4 n\pi}{ab^2} \cdot M_{ij}^y \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \cos n\pi\beta_j \quad \dots\dots\dots(21)$$

式(12), (20), (21)を式(19)に代入して  $T_{mn}$  を求めれば、次式のごとく与えられる。

$$T_{mn} = F_{mn} - \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left\{ R_{ij}^x \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j - \frac{m\pi}{a} \cdot M_{ij}^x \cdot \cos m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j - \frac{n\pi}{b} M_{ij}^y \sin m\pi\alpha_i \cos n\pi\beta_j \right\} \quad \dots\dots(22)$$

式(22)を式(18)に代入し、その結果を式(10)に代入すれば、図-3に示す無梁板に関する弾性曲面  $w$  が求まり次式となる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{mn}}{D \left\{ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \times \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \dots\dots\dots(23)$$

(2) 無梁板解析のための基本連立方程式

α) ひずみエネルギー— 平板全体のひずみエネルギー  $U$  は周知のごとく次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[ (V^2 w)^2 - 2(1-\nu) \times \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad \dots\dots\dots(24)$$

式(24)の右辺第2項{ }内の積分は、Gaussの定理によってつきのごとく周辺  $C$  に沿う曲線積分に直すことができる。すなわち、

$$\iint \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \frac{1}{2} \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy = \frac{1}{2} \oint_C \left[ - \left( \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dy \right]$$

本題におけるごとく、周辺のたわみが0である長方形

板の場合には

$$x \text{ 方向で } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$y \text{ 方向で } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

であるから、結局上記曲線積分は 0 となり、板のひずみエネルギー  $U$  は式 (24) よりさらに簡単な次式で表わされる。

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b (V^2 w)^2 dx dy \dots\dots\dots (25)$$

よって、式 (25) に式 (23) を代入すれば無梁板全体のひずみエネルギー  $U$  がえられ、式 (26) の結果となる。

$$U = \frac{ab}{8 D \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{mn}^2}{\left\{ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \dots\dots\dots (26)$$

**b) 基本連立方程式の誘導** 図-3 に示す無梁板の

中間支柱 11, 12, ..., 1s, 21, 22, ..., 2s, ..., ij, ..., r1, r2, ..., rs における垂直変位をそれぞれ  $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1s}, d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2s}, \dots, d_{ij}, \dots, d_{r1}, d_{r2}, \dots, d_{rs}$ ,  $x$  方向の接線角を  $\tau_{11}^x, \tau_{12}^x, \dots, \tau_{1s}^x, \tau_{21}^x, \tau_{22}^x, \dots, \tau_{2s}^x, \dots, \tau_{ij}^x, \dots, \tau_{r1}^x, \tau_{r2}^x, \dots, \tau_{rs}^x$ ,  $y$  方向の接線角を  $\tau_{11}^y, \tau_{12}^y, \dots, \tau_{1s}^y, \tau_{21}^y, \tau_{22}^y, \dots, \tau_{2s}^y, \dots, \tau_{ij}^y, \dots, \tau_{r1}^y, \tau_{r2}^y, \dots, \tau_{rs}^y$  として、式 (26) に Castigliano の定理を適用すれば、無梁板に作用する諸力と上記各変位との一連の関係式が求まる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_{ij}} &= d_{ij} \\ \frac{\partial U}{\partial M_{ij}^x} &= \tau_{ij}^x \\ \frac{\partial U}{\partial M_{ij}^y} &= \tau_{ij}^y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 $i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, s$

式 (27) を演算のうえ整理して結局つぎの連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s \left( R_{kl} \cdot D_{kl}^{ij} - \frac{\pi}{a} M_{kl}^x \cdot X_{kl}^{ij} - \frac{\pi}{b} M_{kl}^y \cdot Y_{kl}^{ij} \right) & \\ = \frac{ab}{4} D^{ij} + \frac{ab}{4} D \pi^4 d_{ij} & \\ \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s \left( R_{kl} \cdot A_{kl}^{ij} - \frac{\pi}{a} M_{kl}^x \cdot O_{kl}^{ij} - \frac{\pi}{b} M_{kl}^y \cdot V_{kl}^{ij} \right) & \\ = \frac{ab}{4} E_x^{ij} - \frac{a^2 b}{4} D \pi^3 \tau_{ij}^x & \\ \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s \left( R_{kl} \cdot B_{kl}^{ij} - \frac{\pi}{a} M_{kl}^x \cdot Q_{kl}^{ij} - \frac{\pi}{b} M_{kl}^y \cdot W_{kl}^{ij} \right) & \\ = \frac{ab}{4} E_y^{ij} - \frac{ab^2}{4} D \pi^3 \tau_{ij}^y & \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, s$

$$\left. \begin{aligned} D_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \\ &\times \sin m \pi \alpha_k \cdot \sin n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} X_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \\ &\times \cos m \pi \alpha_k \cdot \sin n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \\ &\times \sin m \pi \alpha_k \cdot \cos n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cos m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \\ &\times \sin m \pi \alpha_k \cdot \sin n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} O_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{K_{mn}} \cos m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \\ &\times \cos m \pi \alpha_k \cdot \sin n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{K_{mn}} \cos m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \\ &\times \sin m \pi \alpha_k \cdot \cos n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \cdot \cos n \pi \beta_j \\ &\times \sin m \pi \alpha_k \cdot \sin n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \cdot \cos n \pi \beta_j \\ &\times \cos m \pi \alpha_k \cdot \sin n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} W_{kl}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \cdot \cos n \pi \beta_j \\ &\times \sin m \pi \alpha_k \cdot \cos n \pi \beta_l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} D^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \cdot F_{mn} \sin m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \\ E_x^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cdot F_{mn} \cos m \pi \alpha_i \cdot \sin n \pi \beta_j \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} E_y^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \cdot F_{mn} \sin m \pi \alpha_i \cdot \cos n \pi \beta_j \\ K_{mn} &= \left\{ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

式 (28) の各式はそれぞれ中間支柱と同数の連立方程式となり、各中間支柱において、たとえば中間支柱がなければ反力および反力モーメントがそれぞれ 0 となり、また中間支柱があれば垂直変位が 0 となり、板の接線角が柱の接線角と同じ値となる等の条件を含め、垂直反力  $R_{ij}$  または垂直変位  $d_{ij}$ ,  $x$  方向の反力モーメント  $M_{ij}^x$  または接線角  $\tau_{ij}^x$ ,  $y$  方向の反力モーメント  $M_{ij}^y$  または接線角  $\tau_{ij}^y$  のいずれか一方がその他の条件から判明すれば、式 (28) の連立方程式の数と未知数の数とが一致し、したがって、式 (28) を連立に解くことにより、図-3 に示す無梁板の解がえられることになる。

なお、既往の諸研究<sup>1)~7)</sup>に示されるごとく、柱の反力モーメントを無視する場合、または無梁板構造物が中間支柱の代りに中間において点支持される場合には反力モーメントがないゆえ  $M_{kl}^x = M_{kl}^y = 0$  となり、式 (28) は次式のごとく簡単となる。

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s R_{kl} \cdot D_{kl}^{ij} = \frac{ab}{4} D^{ij} + \frac{ab}{4} D \pi^4 d_{ij} \dots\dots\dots (28)'$$

ここに,  $i=1, 2, \dots, r, \quad i=1, 2, \dots, s$

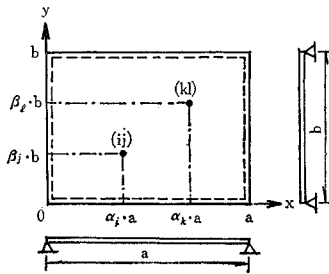
c) 形状定数および荷重項について

① 形状定数: 式(28)の基本連立方程式に含まれる  $R_{kl}, \frac{\pi}{a}M_{kl}^{ij}, \frac{\pi}{b}M_{kl}^{ij}$  の諸係数  $D_{kl}^{ij}, X_{kl}^{ij}, Y_{kl}^{ij}, A_{kl}^{ij}, O_{kl}^{ij}, V_{kl}^{ij}, B_{kl}^{ij}, Q_{kl}^{ij}$  および  $W_{kl}^{ij}$  は, 式(29)に示されるごとく与えられた無梁板の形状, すなわち板の寸法および断面積, 中間支柱の位置などによって定まる定数であるゆえ, これらを形状定数と称することとすればつぎのごとき内容をもつ。

いま, 図-5に示すごとく, 無梁板構造物からすべての中間支柱を取り除いた周辺単純支持長方形板を無梁板構造物の基本構と名づける。しかるとき, 式(22)の  $T_{mn}$  は第2項以下すべて0で  $T_{mn}=F_{mn}$  となり, この結果を式(23)に代入すれば, 基本構の弾性曲面  $w$  が求まり次式となる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{\pi^4 D \left\{ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \times \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots(30)$$

図-5



さて, 図-5において, 点  $kl(\alpha_k a, \beta_k b)$  に単位集中荷重  $P=1$  が作用するものとすれば, この荷重の二重正弦フーリエ級数展開式における展開係数  $F_{mn}$  は次式で与えられる(表-1参照)。

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} \sin m\pi\alpha_k \cdot \sin n\pi\beta_l \dots\dots\dots(31)$$

式(31)を式(30)に代入すれば,  $P=1$  が作用する場合の基本構の弾性曲面  $w$  が求まり次式となる。

$$w = \frac{4}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \cdot \sin m\pi\alpha_k \times \sin n\pi\beta_l \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots(32)$$

また, 式(32)の  $x, y$  に関する一次偏導関数を求めれば,  $x, y$  それぞれの方向における基本構の接線角  $\tau^x, \tau^y$  をうる。

$$\tau^x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{4}{a^2 b \pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cdot \sin m\pi\alpha_k \times \sin n\pi\beta_l \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots(33)$$

$$\tau^y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4}{ab^2 \pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \cdot \sin m\pi\alpha_k \times \sin n\pi\beta_l \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots(34)$$

したがって, 点  $kl$  に  $P=1$  が作用した場合の点  $ij(\alpha_j a, \beta_j b)$  のたわみを  $d_{ij}(kl)$ ,  $x, y$  方向の接線角を  $\tau_{ij}^x(kl)$  および  $\tau_{ij}^y(kl)$  とすれば, これらは式(32), (33), (34)よりつぎのごとく求まる。

$$\left. \begin{aligned} d_{ij}(kl) &= \frac{4}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \sin n\pi\beta_l \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \\ \tau_{ij}^x(kl) &= \frac{4}{a^2 b \pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \sin n\pi\beta_l \cdot \cos m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \\ \tau_{ij}^y(kl) &= \frac{4}{ab^2 \pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \sin n\pi\beta_l \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \cos n\pi\beta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

式(35)に式(29)の関係を代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} D_{kl}^{ij} &= \frac{ab}{4} \pi^4 D \cdot d_{ij}(kl) \\ A_{kl}^{ij} &= \frac{a^2 b}{4} \pi^3 D \cdot \tau_{ij}^x(kl) \\ B_{kl}^{ij} &= \frac{ab^2}{4} \pi^3 D \cdot \tau_{ij}^y(kl) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

式(36)より, 形状定数  $D_{kl}^{ij}, A_{kl}^{ij}, B_{kl}^{ij}$  はつぎのごとき内容をもつことがわかる。すなわち,

$D_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $kl$  に単位集中荷重  $P=1$  が働くととき, 点  $ij$  が  $P$  の方向に起こす変位  $d_{ij}(kl)$  を  $\frac{ab}{4} \pi^4 D$  倍したものである。

$A_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $kl$  に単位集中荷重  $P=1$  が働くととき, 点  $ij$  が原点側からみて時計方向に起こす  $x$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^x(kl)$  を  $\frac{a^2 b}{4} \pi^3 D$  倍したものである。

$B_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $kl$  に単位集中荷重  $P=1$  が働くととき, 点  $ij$  が原点側からみて反時計方向に起こす  $y$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^y(kl)$  を  $\frac{ab^2}{4} \pi^3 D$  倍したものである。

また, 形状定数  $X_{kl}^{ij}$  および  $Y_{kl}^{ij}$  は  $A_{kl}^{ij}$  および  $B_{kl}^{ij}$  の  $ij$  と  $kl$  を入れかえたものに等しい(式(29)参照)。

$$X_{kl}^{ij} = A_{ij}^{kl}, \quad Y_{kl}^{ij} = B_{ij}^{kl} \dots\dots\dots(37)$$

したがって, 形状定数  $X_{kl}^{ij}, Y_{kl}^{ij}$  はつぎの内容をもつ。

$X_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $ij$  に単位集中荷重  $P=1$  が働くととき, 点  $kl$  が原点側からみて時計方向に起こす  $x$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^x(kl)$  を  $\frac{a^2 b}{4} \pi^3 D$  倍したものである。

$Y_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $ij$  に単位集中荷重  $P=1$  が働くと

き、点  $kl$  が原点側からみて反時計方向に起こす  $y$  方向の回転変位  $\tau_{kl}^y(ij)$  を  $\frac{ab^2}{4}\pi^3D$  倍したものである。

つぎに、基本構の点  $kl$  に  $x$  方向の単位モーメント  $M^x=1$  が働く場合および  $y$  方向の単位モーメント  $M^y=1$  が働く場合について考える。 $M^x=1, M^y=1$  の二重正弦フーリエ級数展開式における展開係数をそれぞれ  $F_{mn}^x, F_{mn}^y$  とすれば、これらは次式で与えられる(式 (20), (21) 参照)。

$$\left. \begin{aligned} F_{mn}^x &= -\frac{4m\pi}{a^2b} \cos m\pi\alpha_k \cdot \sin n\pi\beta_l \\ F_{mn}^y &= -\frac{4n\pi}{ab^2} \sin m\pi\alpha_k \cdot \cos n\pi\beta_l \end{aligned} \right\} (38)$$

式 (38) を式 (30) に代入し、 $M^x=1$  が働く場合の基本構の弾性曲面  $w^x$  および  $M^y=1$  が働く場合の基本構の弾性曲面  $w^y$  を求めれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} w^x &= -\frac{4}{a^2b\pi^3D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cos m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \sin n\pi\beta_l \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \\ w^y &= -\frac{4}{ab^2\pi^3D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \cos n\pi\beta_l \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

点  $kl$  に  $M^x=1$  および  $M^y=1$  が作用するときの点  $ij$  のたわみを、 $d_{ij}^x(kl), d_{ij}^y(kl)$  とすれば、これらは式 (39) よりつぎのごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} d_{ij}^x(kl) &= -\frac{4}{a^2b\pi^3D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cos m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \sin n\pi\beta_l \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \\ d_{ij}^y(kl) &= -\frac{4}{ab^2\pi^3D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \cos n\pi\beta_l \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

式 (40) に式 (29) の関係式を代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} X_{kl}^{ij} &= A_{ij}^{kl} = -\frac{a^2b}{4}\pi^3D \cdot d_{ij}^x(kl) \\ Y_{kl}^{ij} &= B_{ij}^{kl} = -\frac{ab^2}{4}\pi^3D \cdot d_{ij}^y(kl) \end{aligned} \right\} \dots\dots(41)$$

式 (41) より  $X_{kl}^{ij}, Y_{kl}^{ij}, A_{ij}^{kl}, B_{ij}^{kl}$  は前述の内容説明の他につぎのごとく説明することもできる。

$X_{kl}^{ij}(=A_{ij}^{kl})$  は基本構の点  $kl$  に  $x$  方向の単位モーメント  $M^x=1$  が働くとき、点  $ij$  が下方 (図-5 参照) に起こす変位  $d_{ij}^x(kl)$  を  $-\frac{a^2b}{4}\pi^3D$  倍したものである。

$Y_{kl}^{ij}(=B_{ij}^{kl})$  は基本構の点  $kl$  に  $y$  方向の単位モーメント  $M^y=1$  が働くとき、点  $ij$  が下向 (図-5 参照) に起こす変位  $d_{ij}^y(kl)$  を  $-\frac{ab^2}{4}\pi^3D$  倍したものである。

式 (39) の  $x, y$  に関する一次偏導関数を求めれば、 $x$  および  $y$  方向における基本構のそれぞれの接線角が求まる。すなわち、 $M^x=1$  が作用する場合の基本構の  $x, y$  方向の接線角を  $\tau^{xx}$  および  $\tau^{xy}$ 、 $M^y=1$  が作用する場合の基本構の  $x, y$  方向の接線角を  $\tau^{yx}$  および  $\tau^{yy}$  とすれば、これらは次式のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \tau^{xx} &= -\frac{4}{a^2b\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{K_{mn}} \\ &\quad \times \cos m\pi\alpha_k \sin n\pi\beta_l \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \tau^{xy} &= -\frac{4}{a^2b^2\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{K_{mn}} \\ &\quad \times \cos m\pi\alpha_k \sin n\pi\beta_l \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ \tau^{yx} &= -\frac{4}{a^2b^2\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{K_{mn}} \\ &\quad \times \sin m\pi\alpha_k \cos n\pi\beta_l \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \tau^{yy} &= -\frac{4}{ab^3\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{K_{mn}} \\ &\quad \times \sin m\pi\alpha_k \cos n\pi\beta_l \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

点  $kl$  に  $M^x=1$  が働く場合の点  $ij$  における  $x, y$  方向の接線角を  $\tau_{ij}^{xx}(kl)$  および  $\tau_{ij}^{xy}(kl)$ 、 $M^y=1$  が働く場合の点  $ij$  における  $x, y$  方向の接線角を  $\tau_{ij}^{yx}(kl)$  および  $\tau_{ij}^{yy}(kl)$  とすれば、これらは式 (42) に点  $ij$  の座標値 ( $\alpha_i a, \beta_j b$ ) を代入することによりただちに算出され次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij}^{xx}(kl) &= -\frac{4}{a^2b\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{K_{mn}} \cos m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \sin n\pi\beta_l \cos m\pi\alpha_i \sin n\pi\beta_j \\ \tau_{ij}^{xy}(kl) &= -\frac{4}{a^2b^2\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{K_{mn}} \cos m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \sin n\pi\beta_l \sin m\pi\alpha_i \cos n\pi\beta_j \\ \tau_{ij}^{yx}(kl) &= -\frac{4}{a^2b^2\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \cos n\pi\beta_l \cos m\pi\alpha_i \sin n\pi\beta_j \\ \tau_{ij}^{yy}(kl) &= -\frac{4}{ab^3\pi^2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_k \\ &\quad \times \cos n\pi\beta_l \sin m\pi\alpha_i \cos n\pi\beta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

式 (43) に式 (29) の関係式を代入すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} O_{kl}^{ij} &= -\frac{a^2b}{4}\pi^2D \cdot \tau_{ij}^{xx}(kl) \\ Q_{kl}^{ij} &= -\frac{a^2b^2}{4}\pi^2D \cdot \tau_{ij}^{xy}(kl) \\ V_{kl}^{ij} &= -\frac{a^2b^2}{4}\pi^2D \cdot \tau_{ij}^{yx}(kl) \\ W_{kl}^{ij} &= -\frac{ab^3}{4}\pi^2D \cdot \tau_{ij}^{yy}(kl) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

式 (44) より形状定数  $O_{kl}^{ij}, Q_{kl}^{ij}, V_{kl}^{ij}, W_{kl}^{ij}$  は

つぎのごとき内容をもつことがわかる。

$O_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $kl$  に  $x$  方向の単位モーメント  $M^x=1$  が働くとき、点  $ij$  が原点側からみて時計方向に起こす  $x$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^{xx}(kl)$  を  $-\frac{a^2b}{4}\pi^2D$  倍したものである。

$Q_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $kl$  に  $x$  方向の単位モーメント  $M^x=1$  が働くとき、点  $ij$  が原点側からみて反時計方向に起こす  $y$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^{xy}(kl)$  を  $-\frac{a^2b^2}{4}\pi^2D$  倍したものである。

$V_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $kl$  に  $y$  方向の単位モーメント  $M^y=1$  が働くとき、点  $ij$  が原点側からみて時計方向に起こす  $x$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^{yx}(kl)$  を  $-\frac{a^2b^2}{4}\pi^2D$  倍したものである。

$W_{kl}^{ij}$  = 基本構の点  $kl$  に  $y$  方向の単位モーメント  $M^y=1$  が働くとき、点  $ij$  が原点側からみて反時計方向に起こす  $y$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^{yy}(kl)$  を  $-\frac{ab^3}{4}\pi^2D$  倍したものである。

なお、 $Q_{kl}^{ij}$  と  $V_{kl}^{ij}$  とは式 (29) の式形から明らかなど  $ij$  と  $kl$  を入れかえることにより等置することができるゆえ、前述の  $Q_{kl}^{ij}$  の内容はそのまま  $V_{ij}^{kl}$  の内容を示すものであり、 $V_{kl}^{ij}$  の内容はそのまま  $Q_{ij}^{kl}$  の内容を示すものである。

② 荷重項：式 (28) の右辺第 1 項に示される定数  $D^{ij}$ ,  $E_x^{ij}$ ,  $E_y^{ij}$  は与えられた荷重条件によりきまるものであるからこれらを荷重項と称する。しかるとき、荷重項はつぎのごとき内容をもつ。

前述のごとく、図-5 の基本構の弾性曲面  $w$  は式 (30) で表わされるゆえ、 $x=\alpha a$ ,  $y=\beta b$  を代入することによりただちに点  $ij$  のたわみ  $d_{ij}$  が算出される次式となる。

$$d_{ij} = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{K_{mn}} \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \quad \dots\dots\dots(45)$$

式 (45) に式 (29) に示される  $D^{ij}$  の関係式を代入すれば、 $d_{ij}$  と  $D^{ij}$  との関係が求まり次式となる。

$$D^{ij} = \pi^4 D \cdot d_{ij} \quad \dots\dots\dots(46)$$

式 (46) より荷重項  $D^{ij}$  はつぎのごとき内容をもつことがわかる。

$D^{ij}$  = 基本構に求めんとする  $D^{ij}$  の荷重状態と同じ荷重が働くとき、基本構の点  $ij$  が下向きに起こす垂直変位  $d_{ij}$  を  $D\pi^4$  倍したものである。

また、式 (30) の  $x, y$  に関する一次偏導関数より基本構の任意点  $(x, y)$  における  $x, y$  方向の接線角  $\tau^x, \tau^y$  が求まる。すなわち、

$$\tau^x = \frac{1}{a\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cdot F_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \times \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \dots\dots\dots(47)$$

$$\tau^y = \frac{1}{b\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \cdot F_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \times \cos \frac{n\pi}{b} y \quad \dots\dots\dots(47)$$

式 (47) より点  $ij$  の  $x, y$  方向の接線角  $\tau_{ij}^x, \tau_{ij}^y$  がただちに求まり次式となる。

$$\tau_{ij}^x = \frac{1}{a\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cdot F_{mn} \times \cos m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \quad \dots\dots\dots(48)$$

$$\tau_{ij}^y = \frac{1}{b\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \cdot F_{mn} \times \sin m\pi\alpha_i \cdot \cos n\pi\beta_j$$

式 (48) および式 (29) より  $\tau_{ij}^x, \tau_{ij}^y$  と  $E_x^{ij}, E_y^{ij}$  との関係がそれぞれつぎのごとくえられる。

$$E_{ij}^x = a\pi^3 D \tau_{ij}^x, \quad E_{ij}^y = b\pi^3 D \tau_{ij}^y \quad \dots\dots\dots(49)$$

式 (49) より荷重項  $E_{ij}^x, E_{ij}^y$  はつぎの内容をもつことがわかる。

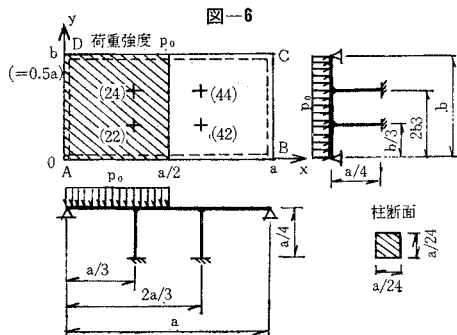
$E_{ij}^x$  = 基本構に求めんとする  $E_{ij}^x$  の荷重状態と同じ荷重が働くとき、基本構の点  $ij$  が原点側からみて時計方向に起こす  $x$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^x$  を  $a\pi^3 D$  倍したものである。

$E_{ij}^y$  = 基本構に求めんとする  $E_{ij}^y$  の荷重状態と同じ荷重が働くとき、基本構の点  $ij$  が原点側からみて反時計方向に起こす  $x$  方向の回転変位  $\tau_{ij}^y$  を  $b\pi^3 D$  倍したものである。

以上より明らかなごとく、形状定数および荷重項はいずれも基本構すなわち四辺単純支持長方形板のたわみまたはたわみ角により与えられるものであり、これらについてあらかじめ算出し図表化しておくことは容易であり、また在来の演算結果も利用でき、そのつど算出する必要はなく本法の長所の一端を形成している。

### 3. 計 算 例

図-6 に示すごとく、板周辺が単純支持されかつ中間支柱 22, 24, 42, 44 で支持された無梁板に等分布荷重が左側半分に作用する場合の数値計算例を示せばつぎのとおりである。すなわち、図-6 において板の辺長比  $\mu = \frac{b}{a}$  を 0.5 とし、また各中間支柱の支点沈下が起こらないものとすれば  $d_{22} = d_{24} = d_{42} = d_{44} = 0$  であるから、式 (28) はつぎの内容となる。





$$\begin{pmatrix}
 D_{22}^{22} D_{24}^{22} D_{42}^{22} D_{44}^{22} - X_{22}^{22} - X_{24}^{22} - X_{42}^{22} - X_{44}^{22} - Y_{22}^{22} - Y_{24}^{22} - Y_{42}^{22} - Y_{44}^{22} \\
 D_{22}^{24} D_{24}^{24} D_{42}^{24} D_{44}^{24} - X_{22}^{24} - X_{24}^{24} - X_{42}^{24} - X_{44}^{24} - Y_{22}^{24} - Y_{24}^{24} - Y_{42}^{24} - Y_{44}^{24} \\
 D_{22}^{42} D_{24}^{42} D_{42}^{42} D_{44}^{42} - X_{22}^{42} - X_{24}^{42} - X_{42}^{42} - X_{44}^{42} - Y_{22}^{42} - Y_{24}^{42} - Y_{42}^{42} - Y_{44}^{42} \\
 D_{22}^{44} D_{24}^{44} D_{42}^{44} D_{44}^{44} - X_{22}^{44} - X_{24}^{44} - X_{42}^{44} - X_{44}^{44} - Y_{22}^{44} - Y_{24}^{44} - Y_{42}^{44} - Y_{44}^{44} \\
 A_{22}^{22} A_{24}^{22} A_{42}^{22} A_{44}^{22} - O_{22}^{22} - O_{24}^{22} - O_{42}^{22} - O_{44}^{22} - V_{22}^{22} - V_{24}^{22} - V_{42}^{22} - V_{44}^{22} \\
 A_{22}^{24} A_{24}^{24} A_{42}^{24} A_{44}^{24} - O_{22}^{24} - O_{24}^{24} - O_{42}^{24} - O_{44}^{24} - V_{22}^{24} - V_{24}^{24} - V_{42}^{24} - V_{44}^{24} \\
 A_{22}^{42} A_{24}^{42} A_{42}^{42} A_{44}^{42} - O_{22}^{42} - O_{24}^{42} - O_{42}^{42} - O_{44}^{42} - V_{22}^{42} - V_{24}^{42} - V_{42}^{42} - V_{44}^{42} \\
 A_{22}^{44} A_{24}^{44} A_{42}^{44} A_{44}^{44} - O_{22}^{44} - O_{24}^{44} - O_{42}^{44} - O_{44}^{44} - V_{22}^{44} - V_{24}^{44} - V_{42}^{44} - V_{44}^{44} \\
 B_{22}^{22} B_{24}^{22} B_{42}^{22} B_{44}^{22} - Q_{22}^{22} - Q_{24}^{22} - Q_{42}^{22} - Q_{44}^{22} - W_{22}^{22} - W_{24}^{22} - W_{42}^{22} - W_{44}^{22} \\
 B_{22}^{24} B_{24}^{24} B_{42}^{24} B_{44}^{24} - Q_{22}^{24} - Q_{24}^{24} - Q_{42}^{24} - Q_{44}^{24} - W_{22}^{24} - W_{24}^{24} - W_{42}^{24} - W_{44}^{24} \\
 B_{22}^{42} B_{24}^{42} B_{42}^{42} B_{44}^{42} - Q_{22}^{42} - Q_{24}^{42} - Q_{42}^{42} - Q_{44}^{42} - W_{22}^{42} - W_{24}^{42} - W_{42}^{42} - W_{44}^{42} \\
 B_{22}^{44} B_{24}^{44} B_{42}^{44} B_{44}^{44} - Q_{22}^{44} - Q_{24}^{44} - Q_{42}^{44} - Q_{44}^{44} - W_{22}^{44} - W_{24}^{44} - W_{42}^{44} - W_{44}^{44}
 \end{pmatrix}
 \times
 \begin{pmatrix}
 R_{22} \\
 R_{24} \\
 R_{42} \\
 R_{44} \\
 \frac{\pi}{a} M_{22}^x \\
 \frac{\pi}{a} M_{24}^x \\
 \frac{\pi}{a} M_{42}^x \\
 \frac{\pi}{a} M_{44}^x \\
 \frac{\pi}{b} M_{22}^y \\
 \frac{\pi}{b} M_{24}^y \\
 \frac{\pi}{b} M_{42}^y \\
 \frac{\pi}{b} M_{44}^y
 \end{pmatrix}$$

表-2 形状定数表 ( $\mu=0.5$ )

( $\times \alpha^4$ )

| 形状定数          | ij | kl       |          |          |          |          |
|---------------|----|----------|----------|----------|----------|----------|
|               |    | 22       | 24       | 33       | 42       | 44       |
| $D_{ij}^{kl}$ | 22 | 0.03951  | 0.02900  | 0.02889  | 0.01340  | 0.01268  |
|               | 24 | 0.02900  | 0.03951  | 0.02889  | 0.01268  | 0.01340  |
|               | 33 | 0.02889  | 0.02889  | 0.05017  | 0.02889  | 0.02889  |
|               | 42 | 0.01340  | 0.01268  | 0.02889  | 0.03951  | 0.02900  |
|               | 44 | 0.01268  | 0.01340  | 0.02889  | 0.02900  | 0.03951  |
| $A_{ij}^{kl}$ | 22 | 0.00456  | 0.00450  | -0.02917 | -0.02015 | -0.01779 |
|               | 24 | 0.00450  | 0.00456  | -0.02917 | -0.01779 | -0.02015 |
|               | 33 | 0.03309  | 0.03309  | 0        | -0.03309 | -0.03309 |
|               | 42 | 0.02015  | 0.01779  | 0.02917  | -0.00456 | -0.00450 |
|               | 44 | 0.01779  | 0.02015  | 0.02917  | -0.00450 | -0.00456 |
| $B_{ij}^{kl}$ | 22 | 0.01490  | -0.02316 | -0.00425 | 0.00711  | -0.00794 |
|               | 24 | 0.02316  | -0.01490 | 0.00425  | 0.00794  | -0.00711 |
|               | 33 | 0.01769  | -0.01769 | 0        | 0.01769  | -0.01769 |
|               | 42 | 0.00711  | -0.00794 | -0.00425 | 0.01490  | -0.02316 |
|               | 44 | 0.00794  | -0.00711 | 0.00425  | 0.02316  | -0.01490 |
| $O_{kl}^{ij}$ | 22 | 0.32751  | 0.06031  | -0.00651 | -0.02635 | -0.01917 |
|               | 24 | 0.06031  | 0.32751  | -0.00651 | -0.01917 | -0.02635 |
|               | 33 | -0.00651 | -0.00651 | 0.32208  | -0.00651 | -0.00651 |
|               | 42 | -0.02635 | -0.01917 | -0.00651 | 0.32751  | 0.06031  |
|               | 44 | -0.01917 | -0.02635 | -0.00651 | 0.06031  | 0.32751  |
| $V_{kl}^{ij}$ | 22 | 0.00257  | -0.00265 | -0.01230 | 0.00965  | -0.01228 |
|               | 24 | 0.00265  | -0.00257 | 0.01230  | 0.01228  | -0.00965 |
|               | 33 | -0.02163 | 0.02163  | 0        | 0.02163  | -0.02163 |
|               | 42 | -0.00965 | 0.01228  | 0.01230  | -0.00257 | 0.00265  |
|               | 44 | -0.01228 | 0.00965  | -0.01230 | -0.00265 | 0.00257  |
| $W_{kl}^{ij}$ | 22 | 0.08216  | -0.01295 | 0.00410  | 0.00505  | -0.00408 |
|               | 24 | -0.01295 | 0.08216  | 0.00410  | -0.00408 | 0.00505  |
|               | 33 | 0.00410  | 0.00410  | 0.07921  | 0.00410  | 0.00410  |
|               | 42 | 0.00505  | -0.00408 | 0.00410  | 0.08216  | -0.02195 |
|               | 44 | -0.00408 | 0.00505  | 0.00410  | -0.02195 | 0.08216  |

$$= \frac{ab}{4}
 \begin{pmatrix}
 D^{22} \\
 D^{24} \\
 D^{42} \\
 D^{44} \\
 E_x^{22} - a \pi^3 D \tau_{22}^x \\
 E_x^{24} - a \pi^3 D \tau_{24}^x \\
 E_x^{42} - a \pi^3 D \tau_{42}^x \\
 E_x^{44} - a \pi^3 D \tau_{44}^x \\
 E_y^{22} - b \pi^3 D \tau_{22}^y \\
 E_y^{24} - b \pi^3 D \tau_{24}^y \\
 E_y^{42} - b \pi^3 D \tau_{42}^y \\
 E_y^{44} - b \pi^3 D \tau_{44}^y
 \end{pmatrix}
 \dots\dots\dots (50)$$

式 (50) の係数行列における各要素の値は表-2 に示すとおりである。また式 (50) の右辺に含まれる荷重項は図-6 の荷重状態に対して表-3 の値となる。

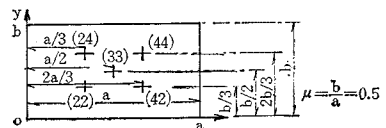
板から柱に伝えられるモーメント  $M_{22}^x, M_{24}^x, M_{42}^x, M_{44}^x, M_{22}^y, M_{24}^y, M_{42}^y, M_{44}^y$  と柱頭部の接線角

表-3 荷重項表 ( $\mu=0.5$ )

( $\times p_0 \alpha^4$ )

| ij | 荷重項 | $D^{ij}$ | $E_x^{ij}$ | $E_y^{ij}$ |
|----|-----|----------|------------|------------|
| 22 |     | 0.03367  | 0.00019    | 0.01860    |
| 24 |     | 0.03367  | 0.00019    | -0.01860   |
| 33 |     | 0.03083  | -0.02612   | 0          |
| 42 |     | 0.01471  | -0.02052   | 0.00844    |
| 44 |     | 0.01471  | -0.02052   | 0.00844    |

備考



$\tau_{22}^x, \tau_{24}^x, \tau_{42}^x, \tau_{44}^x, \tau_{22}^y, \tau_{24}^y, \tau_{42}^y, \tau_{44}^y$  との関係は符号を考慮して既往のたわみ角式よりつぎの式 (51) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{22}^x &= -\frac{4 E_{22}^x I_{22}^x}{h_{22}} \cdot \tau_{22}^x \\ M_{24}^x &= -\frac{4 E_{24}^x I_{24}^x}{h_{24}} \cdot \tau_{24}^x \\ M_{42}^x &= -\frac{4 E_{42}^x I_{42}^x}{h_{42}} \cdot \tau_{42}^x \\ M_{44}^x &= -\frac{4 E_{44}^x I_{44}^x}{h_{44}} \cdot \tau_{44}^x \\ M_{22}^y &= -\frac{4 E_{22}^y I_{22}^y}{h_{22}} \cdot \tau_{22}^y \\ M_{24}^y &= -\frac{4 E_{24}^y I_{24}^y}{h_{24}} \cdot \tau_{24}^y \\ M_{42}^y &= -\frac{4 E_{42}^y I_{42}^y}{h_{42}} \cdot \tau_{42}^y \\ M_{44}^y &= -\frac{4 E_{44}^y I_{44}^y}{h_{44}} \cdot \tau_{44}^y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

ただし,  $h_{ij}$  = 中間支柱  $ij$  の全長  
 $I_{ij}^x$  = 中間支柱  $ij$  の  $x$  軸まわりの断面二次モーメント  
 $I_{ij}^y$  = 中間支柱  $ij$  の  $y$  軸まわりの断面二次モーメント  
 $E_{ij}^x$  = 中間支柱  $ij$  の  $x$  方向の弾性係数  
 $E_{ij}^y$  = 中間支柱  $ij$  の  $y$  方向の弾性係数

いま, 柱断面を図-6 に示すごとく 1 辺が  $a/24$  なる正方形とすれば, 柱の断面二次モーメントはそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} I_{22}^x = I_{24}^x = I_{42}^x = I_{44}^x &= \frac{1}{12} \times \left(\frac{a}{24}\right)^4 \\ I_{22}^y = I_{24}^y = I_{42}^y = I_{44}^y &= \frac{1}{12} \times \left(\frac{a}{24}\right)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(52)$$

また, 各中間支柱の長さを一定かつ板の長辺 AB の  $1/4$  の長さをもつものとする。すなわち,

$$h_{22} = h_{24} = h_{42} = h_{44} = \frac{a}{4} \dots\dots\dots(53)$$

つぎに柱の  $x, y$  方向の弾性係数  $E_{22}^x, E_{24}^x, E_{42}^x, E_{44}^x, E_{22}^y, E_{24}^y, E_{42}^y, E_{44}^y$  に関してはいずれも板の弾性係数  $E$  に等しいものとし, 板の板厚  $h_p$  と AB 辺長  $a$  との関係は次式のごとく仮定する。

$$h_p = a/100 \dots\dots\dots(54)$$

式 (52), (53) を式 (51) に代入し, その結果および式 (54), 表-2, 3 の諸数値を式 (50) に用いれば, 本題の無梁板に関する基本連立方程式がえられ式(55)となる。

式 (55) の連立方程式を解けば, 各中間支柱の反力  $R_{22}, R_{24}, R_{42}, R_{44}$ ,  $x$  方向の反力モーメント  $M_{22}^x, M_{24}^x, M_{42}^x, M_{44}^x$  および  $y$  方向の反力モーメント  $M_{22}^y, M_{24}^y, M_{42}^y, M_{44}^y$  がつぎのごとくえられる。

$$\begin{matrix} \begin{matrix} R_{22} \\ R_{24} \\ R_{42} \\ R_{44} \\ \frac{\pi}{a} M_{22}^x \\ \frac{\pi}{a} M_{24}^x \\ \frac{\pi}{a} M_{42}^x \\ \frac{\pi}{a} M_{44}^x \end{matrix} & \times & \begin{matrix} \frac{\pi}{b} M_{22}^y \\ \frac{\pi}{b} M_{24}^y \\ \frac{\pi}{b} M_{42}^y \\ \frac{\pi}{b} M_{44}^y \end{matrix} & = & \frac{P_0 a^2}{8} & \dots\dots\dots(55) \\ \begin{matrix} 0.0367 \\ 0.0367 \\ 0.01471 \\ 0.01471 \\ 0.00019 \\ 0.00019 \\ -0.02052 \\ -0.02052 \\ 0.01860 \\ -0.01860 \\ 0.00844 \\ -0.00844 \end{matrix} & & & & & \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
 R_{22} &= R_{24} = 0.4756 \times p_0 a^2 / 8 \\
 M_{22}^x &= M_{24}^x = 0.00373 \times p_0 a^3 / 8 \\
 M_{22}^y &= 0.000202 \times p_0 a^3 / 8 \\
 M_{42}^y &= -0.000017 \times p_0 a^3 / 8 \\
 R_{42} &= R_{44} = 0.0397 \times p_0 a^2 / 8 \\
 M_{42}^x &= M_{44}^x = 0.00170 \times p_0 a^3 / 8 \\
 M_{24}^y &= -0.000202 \times p_0 a^3 / 8 \\
 M_{44}^y &= 0.000017 \times p_0 a^3 / 8
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

式 (56) を式 (22) に代入し、その結果を式 (23) に用いれば、図-6 に示す無梁板の弾性曲面が求まり次式となる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 a^4}{\pi^4 D (m^2 + 4n^2)^2} \cdot T_{mn}' \times \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots (57)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 T_{mn}' &= \frac{16}{\pi^2 mn} \sin^2 \frac{m\pi}{4} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \\
 &\quad - \left( 0.4756 \sin \frac{m\pi}{3} + 0.0397 \sin \frac{2m\pi}{3} \right) \\
 &\quad \times \left( \sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \\
 &\quad + m \left( 0.0117 \cos \frac{m\pi}{3} + 0.00535 \cos \frac{2m\pi}{3} \right) \\
 &\quad \times \left( \sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \\
 &\quad + n \left( 0.00127 \sin \frac{m\pi}{3} + 0.00011 \sin \frac{2m\pi}{3} \right) \\
 &\quad \times \left( \cos \frac{n\pi}{3} - \cos \frac{2n\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

$x, y$  の各値について式 (57) を算出し、表にまとめたものが表-4 であり、これをグラフ化したものが図-7 である。なお、図-7 には中間支柱の反力モーメント

図-7  $w$ -図 (等分布半載  $\mu=0.5$ )

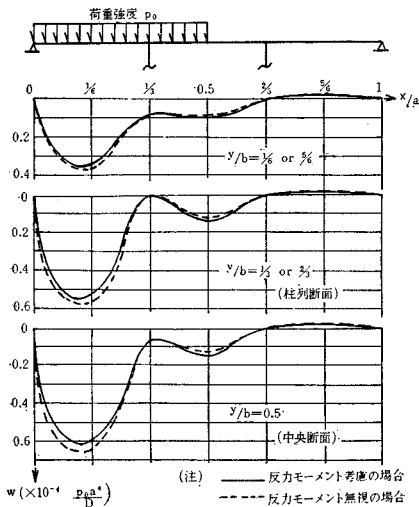


表-4  $w$  の値 (等分布荷重  $\mu=0.5$ ) ( $\times 10^{-4} p_0 a^4 / D$ )

| $x/a \backslash y/b$ | 0 or 1 | 1/6 or 5/6 | 1/3 or 2/3 | 0.5    |
|----------------------|--------|------------|------------|--------|
| 0                    | 0.000  | 0.000      | 0.000      | 0.000  |
| 1/6                  | 0.000  | 0.341      | 0.533      | 0.594  |
| 1/3                  | 0.000  | 0.076      | 0.000      | 0.063  |
| 0.5                  | 0.000  | 0.102      | 0.146      | 0.156  |
| 2/3                  | 0.000  | 0.006      | 0.000      | 0.006  |
| 5/6                  | 0.000  | -0.008     | -0.015     | -0.018 |
| 1                    | 0.000  | 0.000      | 0.000      | 0.000  |

表-5  $x=a/b$  断面における  $w$  の比較

| $y/b$      | (1) 反力モーメント無視の場合 | (2) 反力モーメント考慮の場合 | (1)-(2) / (1) $\times 100\%$ |
|------------|------------------|------------------|------------------------------|
| 1/6 or 5/6 | 0.364            | 0.341            | 6.3                          |
| 1/3 or 2/3 | 0.572            | 0.533            | 6.8                          |
| 0.5        | 0.640            | 0.594            | 7.2                          |

( $\times 10^{-4} p_0 a^4 / D$ )

を無視した場合の演算結果をも併記して比較対称した。すなわち、無梁板の最大たわみは反力モーメントを考慮した場合の方がこれを無視した場合より当然ながら小さく、特に  $x=a/3$  断面における無梁板のたわみについて両者を比較すれば表-5 のごとくなり、その差は約 6~7% 程度である。

式 (57) を用いて無梁板上の任意点における  $x, y$  方向のモーメント  $M_x, M_y$  を求めればそれぞれ次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 a^2}{\pi^2} \\
 &\quad \times \frac{(m^2 + 4\nu n^2)}{(m^2 + 4n^2)^2} \cdot T_{mn}' \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 a^2}{\pi^2} \\
 &\quad \times \frac{(\nu m^2 + 4n^2)}{(m^2 + 4n^2)^2} \cdot T_{mn}' \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

ポアソン比  $\nu=0.3$  とし、 $x, y$  の各値について式 (58) を算出すれば、図-8, 9 の結果となる。なお、図中には中間支柱の反力モーメントを無視した場合の演算結果をも併記して両者を比較対照した。図より明らかごとく、中間支柱 (22), (24) において  $x, y$  いずれの方向の曲げモーメントも絶対最大となり、これらの値について反力モーメントを考慮した場合と無視した場合の比較は表-6 のごとくなり、 $M_x$  は約 31%,  $M_y$  は約 37% 前者に比して後者の方が大きいことがわかる。

表-6

|       | (1) 反力モーメント無視の場合 | (2) 反力モーメント考慮の場合 | (1)-(2) / (1) $\times 100\%$ |
|-------|------------------|------------------|------------------------------|
| $M_x$ | -2.612           | -1.800           | 31                           |
| $M_y$ | -2.324           | -1.469           | 37                           |

図-8  $M_x$ -図 ( $\mu=0.5$ )

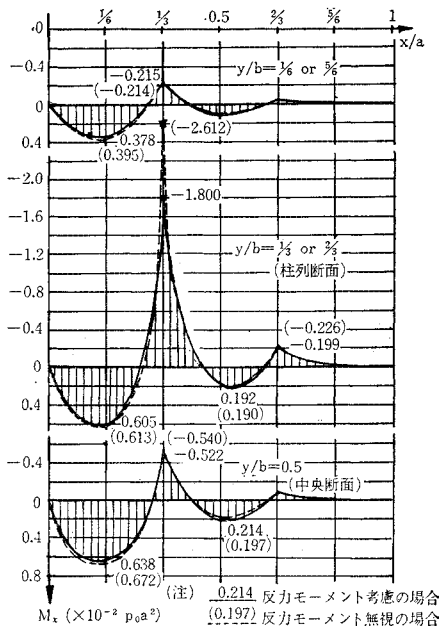
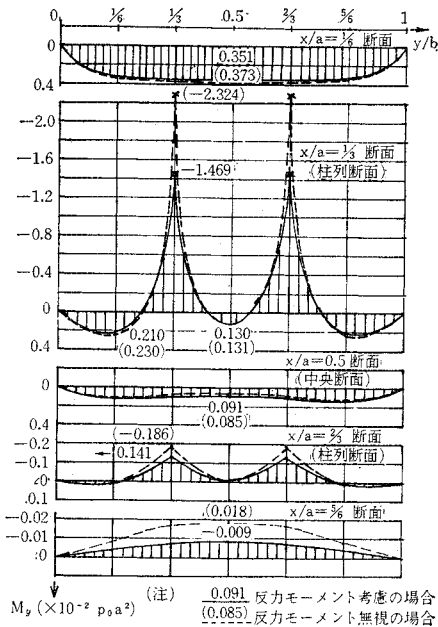


図-9  $M_y$ -図 ( $\mu=0.5$ )



4. 無梁板上の特定点におけるたわみおよび接線角を求める方法

無梁板上のある特定点のたわみおよび  $x, y$  方向の接線角を特に必要とする場合には、式 (23) に示す弾性曲面式  $w$  および その  $x, y$  に関する一次偏導関数に特定点の座標値を代入して求めることができるが、式 (28) の連立方程式を用いればさらに簡単につきのごとく求められる。

いま、無梁板上の点  $(u, v)$  のたわみ  $d_{uv}$  および  $x, y$  方向の接線角  $\tau_{uv}^x, \tau_{uv}^y$  を求めるには、この点に仮想の中間支柱  $uv$  を導入し、その支柱反力を  $R_{uv}$ ,  $x$  方向の反力モーメントを  $M_{uv}^x$ , さらに  $y$  方向の反力モーメントを  $M_{uv}^y$  として他の中間支柱と同様に取り扱って式 (28) をえたのち、 $R_{uv}=M_{uv}^x=M_{uv}^y=0$  とすれば、式 (28) の中には各中間支柱のたわみおよび  $x, y$  方向における接線角とともに、点  $(u, v)$  のたわみ  $d_{uv}$ ,  $x$  方向の接線角  $\tau_{uv}^x$  および  $y$  方向の接線角  $\tau_{uv}^y$  が未知数として含まれる結果となるゆえ、式 (28) の諸式を連立に解くことにより必然的に  $d_{uv}, \tau_{uv}^x, \tau_{uv}^y$  が求まる。

以上の手法を図-6 の無梁板について示せばつぎのとおりである。すなわち、中間支点反力および反力モーメントの他に特に板中央点  $(a/2, b/2)$  におけるたわみ  $d_{33}$  および  $x, y$  方向の接線角  $\tau_{33}^x, \tau_{33}^y$  を算出する必要があるものとする。しかるとき、式 (28) は式 (50) の諸式とつぎの3式とからなる 15 元連立方程式となる。

$$\begin{aligned}
 & D_{22}{}^{33}R_{22} + D_{24}{}^{33}R_{24} + D_{42}{}^{33}R_{42} + D_{44}{}^{33}R_{44} \\
 & - X_{22}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{22}^x - X_{24}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{24}^x - X_{42}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{42}^x \\
 & - X_{44}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{44}^x - Y_{22}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{22}^y - Y_{24}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{24}^y \\
 & - Y_{42}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{42}^y - Y_{44}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{44}^y \\
 & = \frac{ab}{4} (D^{33} + \pi^2 D \cdot d_{33}) \\
 & A_{22}{}^{33}R_{22} + A_{24}{}^{33}R_{24} + A_{42}{}^{33}R_{42} + A_{44}{}^{33}R_{44} \\
 & - O_{22}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{22}^x - O_{24}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{24}^x - O_{42}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{42}^x \\
 & - O_{44}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{44}^x - V_{22}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{22}^y - V_{24}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{24}^y \\
 & - V_{42}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{42}^y - V_{44}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{44}^y \\
 & = \frac{ab}{4} (E_x{}^{33} - a \pi^2 D \tau_{33}^x) \\
 & B_{22}{}^{33}R_{22} + B_{24}{}^{33}R_{24} + B_{42}{}^{33}R_{42} + B_{44}{}^{33}R_{44} \\
 & - Q_{22}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{22}^x - Q_{24}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{24}^x - Q_{42}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{42}^x \\
 & - Q_{44}{}^{33} \frac{\pi}{a} M_{44}^x - W_{22}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{22}^y - W_{24}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{24}^y \\
 & - W_{42}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{42}^y - W_{44}{}^{33} \frac{\pi}{b} M_{44}^y \\
 & = \frac{ab}{4} (E_y{}^{33} - b \pi^2 D \tau_{33}^y) \\
 & \dots\dots\dots(59)
 \end{aligned}$$

ただし、式に含まれる形状定数および荷重項は表-2, 3 に示すとおりである。

すでにえられた式 (56) の諸値を式 (59) に代入し、 $d_{33}, \tau_{33}^x, \tau_{33}^y$  を求めればつぎの結果となり、当然ながら式 (57) およびその一次偏導関数からえられる結果と

一致する。

$$d_{33} = -0.156 \times 10^{-4} \frac{p_0 a^4}{D}$$

( $d_{33}$  は上向きを正としたため、中央点が下向きにわたむ場合には負の符号をもつ)

$$\tau_{33}^x = -0.326 \times 10^{-4} \frac{p_0 a^3}{D}$$

$$\tau_{33}^y = 0$$

$$\begin{pmatrix} D_{22}^{22} & \dots & \dots & \dots & -Y_{44}^{22} \\ D_{22}^{24} & \dots & \dots & \dots & -Y_{44}^{24} \\ D_{22}^{42} & \dots & \dots & \dots & -Y_{44}^{42} \\ D_{22}^{44} & \dots & \dots & \dots & -Y_{44}^{44} \\ A_{22}^{22} & \dots & \dots & \dots & -V_{44}^{22} \\ A_{22}^{24} & \dots & \dots & \dots & -V_{44}^{24} \\ A_{22}^{42} & \dots & \dots & \dots & -V_{44}^{42} \\ A_{22}^{44} & \dots & \dots & \dots & -V_{44}^{44} \\ B_{22}^{22} & \dots & \dots & \dots & -W_{44}^{22} \\ B_{22}^{24} & \dots & \dots & \dots & -W_{44}^{24} \\ B_{22}^{42} & \dots & \dots & \dots & -W_{44}^{42} \\ B_{22}^{44} & \dots & \dots & \dots & -W_{44}^{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{22} \\ R_{24} \\ R_{42} \\ R_{44} \\ \frac{\pi}{a} M_{22}^x \\ \frac{\pi}{a} M_{24}^x \\ \frac{\pi}{a} M_{42}^x \\ \frac{\pi}{a} M_{44}^x \\ \frac{\pi}{b} M_{22}^y \\ \frac{\pi}{b} M_{24}^y \\ \frac{\pi}{b} M_{42}^y \\ \frac{\pi}{b} M_{44}^y \end{pmatrix} = \frac{ab}{4} \begin{pmatrix} \pi^4 D d \\ \pi^4 D d \\ 0 \\ 0 \\ -a \pi^3 D \tau_{22}^x \\ -a \pi^3 D \tau_{24}^x \\ -a \pi^3 D \tau_{42}^x \\ -a \pi^3 D \tau_{44}^x \\ -b \pi^3 D \tau_{22}^y \\ -b \pi^3 D \tau_{24}^y \\ -b \pi^3 D \tau_{42}^y \\ -b \pi^3 D \tau_{44}^y \end{pmatrix} \dots \dots \dots (60)$$

式 (60) 左辺の係数行列に含まれる形状定数は表-2 に示すとおりであり、また中間支柱の諸寸法および弾性係数は 3. 計算例において用いた諸値を使用することとする。しかるとき、式 (60) を連立に解けば各中間支柱の反力および  $x, y$  両方向の反力モーメントが求まり次式の結果となる。

$$\left. \begin{aligned} R_{22} &= R_{24} = -253.40 Dd/a^2 \\ R_{42} &= R_{44} = 81.572 Dd/a^2 \\ M_{22}^x &= M_{24}^x = 1.179 Dd/a \\ M_{42}^x &= M_{44}^x = 4.834 Dd/a \\ M_{22}^y &= -10.455 Dd/a \\ M_{24}^y &= 10.455 Dd/a \\ M_{42}^y &= -0.144 Dd/a \\ M_{44}^y &= 0.144 Dd/a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

式 (61) を式 (22) に代入し、さらにその結果を式 (23) に代入すれば無梁板の弾性曲面がつぎのごとく求まる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8d}{\pi^3(m^2+4n^2)^2} \cdot T_{mn}' \times \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \dots \dots \dots (62)$$

ただし

5. 無梁板の支柱沈下

本論文に示した無梁板の解法にしたがえば、無梁板の支柱沈下についてもきわめて簡単に厳密な理論解析を行なうことができる。

図-6 に示す無梁板において、中間支柱 22, 24 が何らかの原因によりそれぞれ  $d$  なる沈下を起し、他の中間支柱の沈下がないものとすれば、式 (28) はつぎの内容となる。

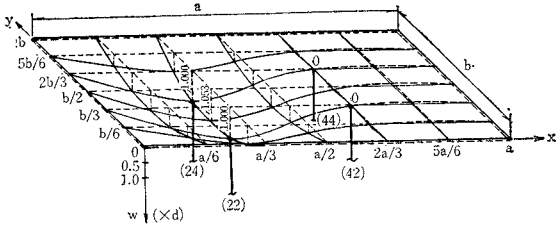
$$T_{mn}' = \left( 253.40 \sin \frac{m\pi}{3} - 81.572 \sin \frac{2m\pi}{3} \right) \times \left( \sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) + m\pi \left( 1.179 \cos \frac{m\pi}{3} + 4.834 \cos \frac{2m\pi}{3} \right) \times \left( \sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) - 2n\pi \left( 10.455 \sin \frac{m\pi}{3} + 0.144 \sin \frac{2m\pi}{3} \right) \times \left( \cos \frac{n\pi}{3} - \cos \frac{2n\pi}{3} \right)$$

$x, y$  の各値について式 (62) を計算し、その結果を表-7 および図-10 に示した。

表-7  $w$  の値 (不等沈下  $\mu=0.5$ ) ( $\times d$ )

| $x/a$ \ $y/b$ | 0 or 1 | 1/6 or 5/6 | 1/3 or 2/3 | 0.5    |
|---------------|--------|------------|------------|--------|
| 0             | 0.000  | 0.000      | 0.000      | 0.000  |
| 1/6           | 0.000  | 0.358      | 0.602      | 0.683  |
| 1/3           | 0.000  | 0.611      | 1.000      | 1.053  |
| 0.5           | 0.000  | 0.295      | 0.495      | 0.559  |
| 2/3           | 0.000  | 0.007      | 0.000      | 0.011  |
| 5/6           | 0.000  | -0.619     | -0.036     | -0.041 |
| 1             | 0.000  | 0.000      | 0.000      | 0.000  |

図-10 w面(支柱沈下  $\mu=0.5$ )



6. む す び

1. で述べたごとく、無梁板の厳密な理論解析に関する既往の諸研究はきわめて特殊な構造形式および荷重状態の解法を示しているにすぎず、しかもその大半は柱の反力モーメントを無視し、中間支柱を点支承とみなした場合のものである上に、その解法ならびに解式が複雑であるため実用上種々の困難がある。この難点は柱の反力モーメントを考慮した場合の無梁板解析については当然倍加され、特に数値計算にいたっては、満足な結果はほとんど見受けられない。すなわち、柱の反力モーメントを取り扱ったものとして、Grein<sup>3)</sup>、坪井・宮崎<sup>8)</sup>、棚橋<sup>9)</sup>らの研究があるが、これらはいずれも柱が一定間隔で基盤目状に規則正しく配列された無限無梁板に関するもので、しかも柱からの反力モーメントはいずれも同じ値をとるものと仮定しうるとき荷重状態の場合の研究に過ぎない上に、その理論式の誘導が複雑であるため、中間支柱に生ずる未知不静定力を単位として包含した無梁板の変位ならびに断面力が算出されているにすぎず、肝心のこれら未知不静定力を求めたものはまだ見当らず、すべて満足な解法とはいえない。

以上の既往諸研究に対し、本論文に示した無梁板解法はつぎのごとき利点ならびに特色をもつ。

(1) 本法は柱の反力モーメントを考慮する場合もしない場合も同一手法によって無梁板構造を厳密に解析する完全解法である。また板がいずれの方向においても有限でありかつ柱が全く任意の間隔ならびに配列をなす無梁板構造物に任意垂直荷重が作用するとき広汎な種類の無梁板構造物に適用しうる点既往の諸研究<sup>1)~9)</sup>にくらべてきわめて一般的である。

(2) 本法にしたがえば、無梁板を解くことは式(28)の多元一次連立方程式を解くだけの簡単な内容となり、かつ連立方程式を解くことにより直接各中間支柱の不静定力を算出することができる。また式(28)中に含まれる形状定数ならびに荷重項は、2. (2) c) ① および ② に示すごとき内容をもつが、結局これらは板構造として最も簡単な四辺単純支持長方形板に関する諸値であり、あらかじめ算出し図表化しておけば、連立方程式を解くことは連続ばりやラーメン等の骨組構造物を解くのと何ら変わらない労力ですむ。

(3) 4. で述べたごとく、特に必要とする無梁板上の特定点の変位量を他の不静定力と同時にかつ簡単に求めること、ならびに 5. で述べたごとく、支柱沈下の問題をもきわめて簡単に解きうる点など既往の諸研究で論じられなかった面にも適用でききわめて便利である。

以上のごとく、本法は既往の諸研究に比較してきわめてすぐれた方法であり、無梁板の解析ならびに設計に大いに威力を発揮するものと確信する。

参 考 文 献

- 1) Marcus : Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin, 1924, Jul. Springer.
- 2) Nádai : Die elastischen Platten, Berlin, 1925. Jul. Springer.
- 3) Lewe : Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten. 2. Aufl., Berlin. 1926. Wilherm Ernst & Sohn.
- 4) Krieger, W. : Über die Biegung dünner rechteckiger Platten durch Kreislasten, Ing. Archiv. Bd 3, 1932.
- 5) Karl Grein : Pilzdecken-Theorie und Berechnung. Berlin 1948, Wilherm Ernst & Sohn.
- 6) 売天義久 : たとえば建築学会研究報告, 第14, 18, 20号など.
- 7) 宮崎俊二 : たとえば建築学会研究報告, 第7, 14, 18, 24, 29, 31号など.
- 8) 坪井・宮崎 : 水平力を受ける無梁板構造, 建築学会論文集第38号, 昭24.4.
- 9) 棚橋 諒 : Moment を受ける板の撓曲及び応力状態の考究, 建築学会誌 45 輯 543 号, 昭 6.3.
- 10) 山崎・橋本 : フーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法, 九州大学工学集報, 第39巻第3号.

(1965.12.1  
1966.1.31・受付)