

# 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析\*

## ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF FRAMES BY COMPLEMENTARY ENERGY METHOD

山崎 徳也\*\*・太田 俊昭\*\*・石川 信隆\*\*\*  
 By Tokuya Yamasaki, Toshiaki Ōta and Nobutaka Ishikawa

### 1. 緒 言

構造物の弾性解析においてエネルギー法を基礎として Castigliano の定理および最小仕事の原理などが導かれ、これより3連および4連モーメントの定理やたわみ角法あるいはモーメント分配法など構造力学において欠くべからざる理論の大半が導き出されたことは周知のとおりである。他方塑性分野においても補正エネルギーを用いた“Complementary Minimum Principle”が A. Nádai<sup>1)</sup>, H.M. Westergaard<sup>2)</sup>, E.H. Brown<sup>3)</sup>, B. Rawlings<sup>4)</sup>, Langhaor<sup>5)</sup> などによって原理的に証明され、これに基づくエネルギー法がそれぞれ提案されているが、いまだ弾性のごとくこの原理のもつ普遍性と簡易性とを十分に生かして広く実用に供せしめる域までには至っていない。このことは塑性領域における補正エネルギーを厳密に求める場合、式型が複雑な非線型となるうえに断面形状によって関数形が異なるゆえ、その後の演算がきわめて繁雑となり実用上その意義を失うことに由來する。

本論文は上記難点を排除した補正エネルギーの実用式を導き、変分原理を適用して構造物の弾塑性解析に関する理論体系の確立とその実用化とを試みたもので、第1段階として最も代表的な直線材構造物の弾塑性挙動を論じた。

直線材を対象とする弾塑性応力解析に関する既往の研究には、 $M-\phi$  関係の塑性域を忠実に曲線と見做した K.H. Gerstle<sup>6)</sup> や R.J.P. Gerden<sup>7)</sup>, K.E. Knudsen 他<sup>8)</sup> などの精密解析があるが、前述したごとく関数が非線型であるため特殊の問題に限定せざるをえず、また鉄筋コンクリート材を対象とし弾性曲線の微分方程式よりたわみ角式を誘導した山田氏<sup>9)</sup> の研究は、弾塑性境界におけるたわみとたわみ角の連続条件より積分定数を逐次決定すべき繁雑さに加えて、対象が一様断面の直線ばりに限られ、また部材の途中に塑性領域が生ずる場合の取り扱いや荷重項の算出も容易でないなどの難点があげられる。

既往研究とは異なり、著者らははりの断面に生ずる弾塑性応力分布ならびにひずみ分布を用いて単位長さ当りの断面に貯えられる補正エネルギーを厳密に算定し、その非線型要素を除くべく塑性領域における  $M-\phi$  曲線を  $M-\phi$  近似直線で置換したうえで、同近似直線に基づき任意断面、任意荷重に適用しうる普遍的な実用補正エネルギー式を理論的に誘導し、変分原理すなわち Complementary Minimum Principle を適用して静定ばりの弾塑性挙動に対する基本的考察を行ない、精度の吟味を行なって実用性を確認し、さらに弾塑性領域を考慮した直線材たわみ角式を導き、弾性解析におけるたわみ角法と同一手法で不静定構造物の弾塑性解析を可能ならしめ、加えて各係数を数表化して実用に供しうることとした。

### 2. 曲げモーメントと曲率との関係

本論文では弾性解析での慣用にしがたってつぎのごとき仮定を採用した。

- (i) 応力-ひずみ関係は図-1のごとく静的降伏点  $\sigma_y$  に達するまで弾性で、 $\sigma_y$  に達したのちは一定応力  $\sigma_y$  のもとに無制限塑性流れを生ずる。ただし履歴効果はないものとする。
- (ii) 平面保持の法則にしたがって微小曲率を取り扱う。
- (iii) 圧縮側の応力-ひずみ関係

図-1 応力-ひずみ曲線

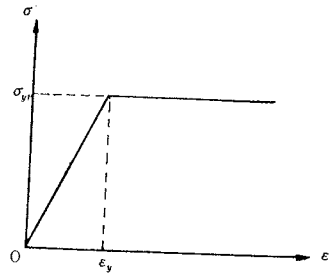
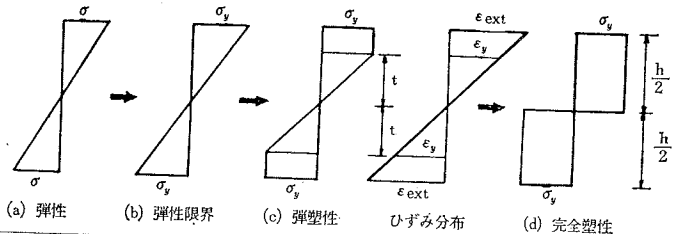


図-2 応力の降伏過程



は引張側と同一と見做す。

いま漸増曲げモーメントを受けた長方形断面ばりの断面に生ずる応力分布を、上記仮定に基づいて弾性より弾塑性状態を経て完全塑性状態に至る全過程について示せ

\* 昭和39年5月第19回土木学会年次学術講演会にて一部発表済

\*\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木教室

\*\*\* 学生会員 工修 九州大学大学院工学研究科土木工学専攻

\*\*\*\* 学生会員 工修 九州大学大学院工学研究科土木工学専攻

ば図-2のごとくなり、弾性ならびに弾塑性状態における曲げモーメントと曲率との関係はそれぞれつぎのごとく求められる。

すなわち図-2(a)の弾性状態では曲げモーメントを  $M$ 、曲げ剛性を  $EI$  とすれば、曲率  $\phi$  は周知のごとく Hooke の法則によって次式となる。

$$\phi = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots(1)$$

つぎに図-2(b)のごとく外縁が降伏応力  $\sigma_y$  に達したとき、式(1)は  $\phi = \phi_y (= M_y/EI)$  なる弾性限界における曲率を与える。ここに  $M_y$  は降伏曲げモーメントで次式で示される。

$$M_y = bh^2 \sigma_y / 6 = 2 I \sigma_y / h$$

ただし、 $b$  および  $h$  は長方形断面の幅および高さを示す。

一方図-2(c)の弾塑性状態では弾性領域の深さを  $2t$  とすれば、曲げモーメント  $M$  はつぎのごとく求められる。

$$M = \int \sigma y dA = 2 \int_t^{h/2} \sigma_y y b dy + 2 \int_0^t \sigma y b dy$$

$$= \left( \frac{h^2}{4} - \frac{t^2}{3} \right) b \sigma_y \dots\dots\dots(2a)$$

しかるに曲率  $\phi$  は  $\phi = \epsilon_y / t = \sigma_y / Et$  となり、上式に代入して  $t$  を消去すれば、結局弾塑性状態における曲げモーメントと曲率との関係がつぎのごとくえられる。

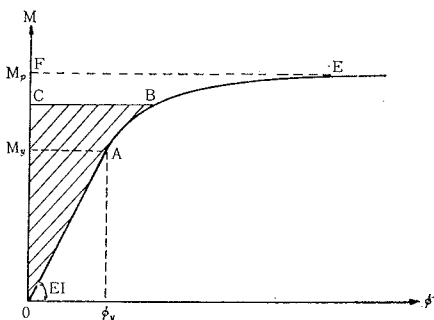
$$M = \frac{3}{2} M_y \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(2b)$$

式(2b)の  $\phi$  を無限大とすれば、曲げモーメントは  $M = 3/2 M_y = M_p$  となり、図-2(d)のごとく全断面の応力が降伏に至ったときのいわゆる塑性曲げモーメントを表わす。

以上の考察より図-3のごとき  $M-\phi$  曲線が求められ、OA 直線が式(1)に、AB 曲線が式(2b)に該当する。なお式(2b)は  $M$  を変数としてつぎのごとく変形される。

$$\phi = \frac{\phi_y}{\sqrt{3 - 2M/M_y}} \dots\dots\dots(2c)$$

図-3  $M-\phi$  曲線



### 3. 補正エネルギーの実用式

一般に、曲げ応力によって生ずる単位長さ当りの断面に貯えられる補正エネルギーは次式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \int_A \int_{\sigma} \epsilon d\sigma dA \dots\dots\dots(3)$$

いま中立軸より距離  $y$  にある微小断面  $dA$  に作用する応力  $\sigma$  によって生ずる微小曲げモーメントは  $dM = \sigma y dA$  となり、これを応力  $\sigma$  で偏微分すれば  $dM$  の変化量  $d(dM)$  がつぎのごとく求められる。

$$d(dM) = \frac{\partial(\sigma y dA)}{\partial \sigma} d\sigma = y dA d\sigma = \frac{\epsilon}{\phi} dA d\sigma$$

上式を全断面について加算したうえで  $dA$  を無限小にすれば、

$$\lim_{dM \rightarrow 0} \sum d(dM) = \lim_{dA \rightarrow 0} \sum \frac{\epsilon}{\phi} dA d\sigma$$

しかるに  $\phi$  は断面において一定で  $y$  に無関係なるゆえ、上式は結局つぎのごとくなる。

$$\phi dM = \int_A \epsilon d\sigma dA$$

よって式(3)より

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \int_A \int_{\sigma} \epsilon d\sigma dA = \int_M \phi dM \dots\dots\dots(4)$$

すなわち式(4)は“単位長さ当りのはりの断面に貯えられる補正エネルギーが図-3のごとく  $M-\phi$  曲線の斜線部の面積 OABC で与えられる”。という一般原理を裏づけるものである。

したがって式(4)に式(1)および式(2c)を代入すれば、長方形断面ばりに対する補正エネルギーがただちに算定され次式となる。

弾性領域においては、

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{M^2}{2EI} \dots\dots\dots(5)$$

弾塑性領域においては、

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \int_0^{M_y} \frac{M}{EI} dM + \int_{M_y}^M \frac{\phi_y dM}{\sqrt{3 - 2M/M_y}}$$

$$= \frac{M_y^2}{2EI} [3 - 2\sqrt{3 - 2M/M_y}] \dots\dots\dots(6)$$

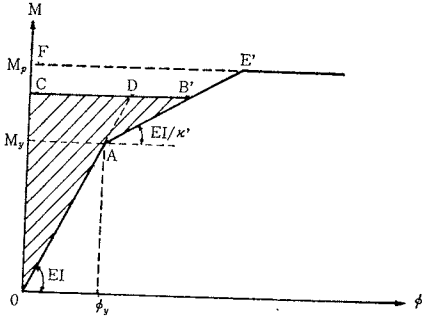
式(5)および式(6)をはりの長さ方向について積分すれば、弾塑性領域を考慮した長方形断面ばりに対する厳密補正エネルギー式がつぎのごとくえられる。

$$U = \int_E \frac{M^2}{2EI} dS + \int_P \frac{M_y^2}{2EI} (3 - 2\sqrt{3 - 2M/M_y}) dS \dots\dots\dots(7)$$

ここに積分記号の添字  $E$  および  $P$  はそれぞれはりの外縁面での弾性領域および塑性領域の長さを示す。

一般に補正エネルギー式は断面形状によって関数形が異なり、しかもきわめて複雑な式型となり、最も簡単な長方形断面の場合でも式(7)のごとくで、その後の取り扱いが相当困難である。 $M-\phi$  曲線は図-3に示すご

図-4  $M-\phi$  第1近似直線



とく弾性領域では直線で、塑性領域では曲線となり、 $M$ が  $M_P$  に近づくにつれ  $M=M_P$  の直線に漸近する。この曲線部を忠実に追跡することが非線型の主要因を形成するゆえ、これを排除するため図-4のごとく近似的に直線で置き換えたうえで、式(4)に基づいて補正エネルギー  $\partial U/\partial S$  を同図の斜線部の面積  $OAB'DC$  で算定する。

すなわち  $M-\phi$  近似直線の勾配を  $EI/\kappa'$  とすれば、弾塑性領域における曲率  $CB'$  は  $\phi = \kappa'(M - M_y)/EI + \phi_y$  となり、斜線部の面積はつぎのごとくなる。

$$\begin{aligned} \text{面積 } OAB'DC &= \triangle ODC + \triangle AB'D \\ &= \frac{M^2}{2EI} + \frac{M - M_y}{2} \left( \phi - \frac{M}{EI} \right) \end{aligned}$$

したがって弾塑性領域における単位長さ当りの補正エネルギーはつぎの式(8)のごとく簡単な  $M$  の2次式で表わされ、部材全体にわたる補正エネルギーの実用式が弾性ならびに弾塑性領域を考慮した式(9)にて求められることになる。

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{1}{2EI} [M^2 + (\kappa' - 1)(M - M_y)^2] \dots (8)$$

$$U = \int_{E+P} \frac{M^2}{2EI} dS + \kappa \int_P \frac{(M - M_y)^2}{2EI} dS \dots (9)$$

ただし、 $\kappa = \kappa' - 1$

ここで、 $M-\phi$  近似直線の勾配を表わす  $\kappa'$  は“ $M$ が  $M_P$  に達したとき、 $M-\phi$  近似直線による補正エネルギーが  $M-\phi$  曲線によるそれと同値でなければならない”。という置換条件より算定される。したがって図-3の面積  $OABEF$  と図-4の面積  $OAB'E'F$  とを等置して  $\kappa'$  を決定する。前者の面積を  $A_C$ 、後者の面積を  $A_S$  とすれば式(6)および式(8)において  $M = M_P = 3M_y/2$  としてそれぞれつぎの値をうる。

$$A_C = \frac{3M_y^2}{2EI}, \quad A_S = \frac{M_y^2}{8EI} (8 + \kappa')$$

よって  $A_C = A_S$  とすれば長方形断面では  $\kappa' = 4$ 、したがって  $\kappa = 3$  と決定される。

さらに他形状の断面について考察すれば、単に式(2b)および式(6)のみが変わり、したがって算出される  $\kappa$  値が表-1のごとくそれぞれ異なった定数とな

表-1

断面形状	定数	断面形状	定数	断面形状	定数
	$f = M_P/M_y = 1.500$		1.140		1.700
	$f = M/M_y = 1.250$		1.066		2.000
	$\kappa' = 4.000$		1.307		1.500
	$\kappa = 3.000$		1.500		1.064
	$\kappa'_1 = 1.376$		1.200		1.338
	$\kappa_1 = 0.376$		1.084		1.338
	$\kappa'_2 = 11.872$		0.200		0.338
	$\kappa_2 = 10.496$		0.084		0.338
			7.753		20.388
			8.766		19.050
			6.553		
			7.682		
			19.050		

るが、補正エネルギーの式表現は不変で、式(9)による一般表示が可能となる。よって本法によれば断面形状による難易も問題とならず、あらかじめ  $\kappa$  を算出しておけばすべての断面形状を含みうる一般性は大きな特色といえ、その実用性を強調しうるものである。

以上1本の近似直線 ( $M-\phi$  第1近似直線と名付ける) による補正エネルギーの実用式を誘導したが、さらに精度をあげるためには塑性領域における  $M-\phi$  曲線を図-5のごとき  $n$  本の折線で近似すればよい。ここで折線は連続条件のほかに、前記エネルギー等置の条件によって決定される。しかし  $n$  を多くすれば精度は増すが、反面実用性が失われ、 $n$  の決定について種々計算例によって検討した結果<sup>10)</sup>、つぎのことが明らかとなった。

いま断面の形状係数を  $f = M_P/M_y$  とすれば、

図-5

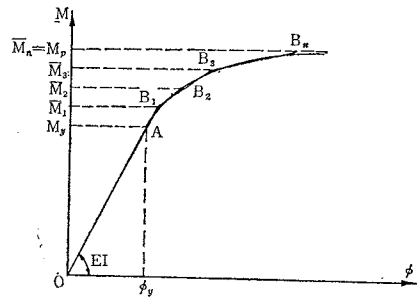
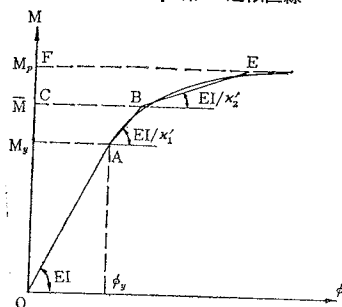


図-6  $M-\phi$  第2近似直線



(1)  $f \leq 1.5$  の薄肉断面 (I 形, 箱形, 長方形) に対しては  $n=1$  で十分である。

(2)  $f \geq 1.5$  の太肉断面 (長方形, 円形, ダイヤモンド形) に対しては  $n=2$  までを考える。

ここで 図-6 のとき  $n=2$  の  $M-\phi$  第 2 近似直線に対する補正エネルギーを式 (9) と同様の手法で算定すれば次式をうる。

$$U = \int_{E+P_1+P_2} \frac{M^2}{2EI} dS + \kappa_1 \int_{P_1+P_2} \frac{(M-M_y)^2}{2EI} dS + \kappa_2 \int_{P_2} \frac{(M-\bar{M})^2}{2EI} dS \dots\dots\dots(10)$$

ここに,  $\kappa_1 = \kappa_1' - 1$ ,  $\kappa_2 = \kappa_2' - \kappa_1'$ , また積分記号の添字  $P_1$  および  $P_2$  はそれぞれはり外縁面での第 1 塑性領域 ( $M_y \leq M \leq \bar{M}$ ) および第 2 塑性領域 ( $\bar{M} \leq M \leq M_P$ ) の長さを示す。 $\bar{M}$  を臨界曲げモーメントと名付け,  $\bar{M} = (M_P + M_y)/2$  を主体として表-1 のとき値を採用した。なお  $M-\phi$  第 2 近似直線の勾配を決定する  $\kappa_1'$ ,  $\kappa_2'$  の値は前記エネルギー等置の条件により, 各断面に対して表-1 のごとく算定される。

4. 補正エネルギー法

Complementary Minimum Principle とは “系が真の平衡状態にあるとき, 全補正ポテンシャルは応力の変化については最小である,” とある<sup>3),4)</sup>。すなわち補正ポテンシャルおよび外力による補正仕事をそれぞれ  $U, W$  とすれば次式が成立する。

$$d(U-W) = 0$$

よって

$$dU - dW = 0 \dots\dots\dots(11)$$

いま理解に便ならしめるため 図-7 のとき単純ばりについて考察を行なえば,  $P_i (i=1, 2, \dots)$  の変化  $dP_i (i=1, 2, \dots)$  による補正エネルギーの変化は

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i \dots\dots\dots(12)$$

一方外力による補正仕事の変化も 図-7 を参照して

$$dW = \sum_i \delta_i dP_i \dots\dots\dots(13)$$

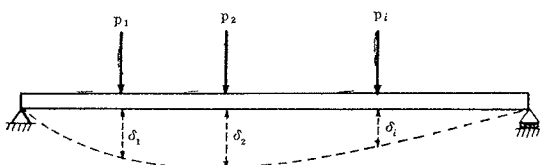
式 (11) に式 (12) および式 (13) を代入すれば

$$\sum_i \left( \frac{\partial U}{\partial P_i} - \delta_i \right) dP_i = 0$$

$dP_1, dP_2, \dots, dP_i, \dots$  はそれぞれ独立であるから

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \dots\dots\dots(14)$$

図-7



もちろん変位に力が対応するごとく回転角に曲げモーメントが対応し次式が成立する。

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \dots\dots\dots(15)$$

式 (14), (15) と式 (9), (10) とを併用することによって, 長方形断面さらには任意の断面について弾塑性領域を考慮した最小仕事の原理などの変分法が成立可能となり, 実際解法としての弾塑性領域を考慮した 3 連および 4 連モーメントの定理や 7. で述べるたわみ角式が誘導でき, しかもその手法は弾性解析の場合と全く同様である。

なお塑性領域を考慮したたわみの算定法には C.H. Yang の  $\phi$ -Area Method<sup>5)</sup> や W.H. Weiskopf<sup>6)</sup> の弾性曲線に基づく厳密解法などがあるが, 中でも  $\phi$ -Area Method は本エネルギー法を用いることにより容易に誘導可能となる。

すなわちモーメント  $M$  は一般に  $M=f(\phi)$  で表わされ,  $dM=f'(\phi)d\phi$  となるゆえ, 式 (4) に代入したうえで  $dS$  で積分すれば, 補正エネルギー  $U$  はつぎのごとくなる。

$$U = \iint \phi f'(\phi) d\phi dS$$

よって式 (14) および式 (15) を上式に適用すれば, 変位  $\delta_i$  および回転角  $\theta_i$  の算定式として次式が導かれる。

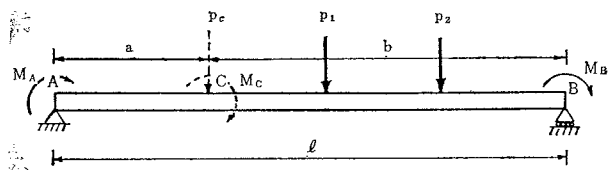
$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \iint \left( \phi f'(\phi) \cdot \frac{1}{f'(\phi)} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_i} \right) dS = \iint \phi \frac{\partial M}{\partial P_i} dS \dots\dots\dots(16)$$

同様に

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} = \iint \phi \frac{\partial M}{\partial M_i} dS \dots\dots\dots(17)$$

いま 図-8 のとき両端 A, B にそれぞれ外力モーメント  $M_A, M_B$  が働く単純ばり AB を想定し, 任意点 C が一般に荷重点でないとするれば仮想荷重および仮想モーメントとしてそれぞれ  $P_C$  および  $M_C$  を作用させて,

図-8



C 点のたわみ  $\delta_C$  およびたわみ角  $\theta_C$  を以下のごとく求めうる。

任意点のモーメント  $M$  は実際外力荷重によるモーメントを  $M_0$  として

A~C 間において,

$$M_1 = -\frac{l-x}{l} M_A - \frac{x}{l} M_B - \frac{x}{l} M_C + \frac{Pcb}{l} x + M_0$$

よって

$$\frac{\partial M_1}{\partial P_C} = \frac{b}{l} x$$

C~B 間において,

$$M_2 = \frac{l-x}{l} M_A - \frac{x}{l} M_B + \frac{l-x}{l} M_C + \frac{Pca}{l} (l-x) + M_0$$

よって

$$\frac{\partial M_2}{\partial P_C} = \frac{a}{l} (l-x)$$

$\delta_C$  は式 (16) において  $i=C$  とおけば

$$\begin{aligned} \delta_C &= \int_0^a \phi \frac{b}{l} x dx + \int_a^l \phi \frac{a}{l} (l-x) dx \\ &= \int_0^l \phi \frac{a}{l} (l-x) dx - \int_0^a \phi (a-x) dx \end{aligned}$$

しかるに式 (17) より

$$\int_0^l \phi (l-x) dx / l = \theta_A$$

で, 上式の第1項に適用し, さらに支点 A のたわみ  $\delta_A$  がある場合にはこれを加味して結局次式がえられる。

$$\delta_C = \delta_A + a\theta_A - \int_0^a \phi (a-x) dx \dots\dots\dots(18)$$

同様にたわみ角  $\theta_C$  は式 (17) において  $i=C$  とおけば,

$$\begin{aligned} \theta_C &= \int_0^a \phi \left(-\frac{x}{l}\right) dx + \int_a^l \phi \left(\frac{l-x}{l}\right) dx \\ &= \theta_A - \int_0^a \phi dx \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

すなわち式 (18) および式 (19) は  $\phi$ -Area Method の公式と完全に合致する。このことは取りも直さず  $\phi$ -Area Method がエネルギー法の特例として包含されうることを意味するものであり, 本法の一般性をここに強調しうるものである。

### 5. せん断の影響について

前記補正エネルギー式の誘導に当っては, せん断力の影響を無視したので, 本節ではせん断力の補正エネルギーにおよぼす効果について理論的考察ならびに数値的吟味を行ない, 前記仮定の妥当性を検討する。

弾塑性状態における曲げ応力  $\sigma$  およびせん断応力  $\tau$  の分布は, 塑性理論<sup>11)</sup>によれば 図-9 のごとくなり, せん断応力  $\tau$  は次式で与えられる。

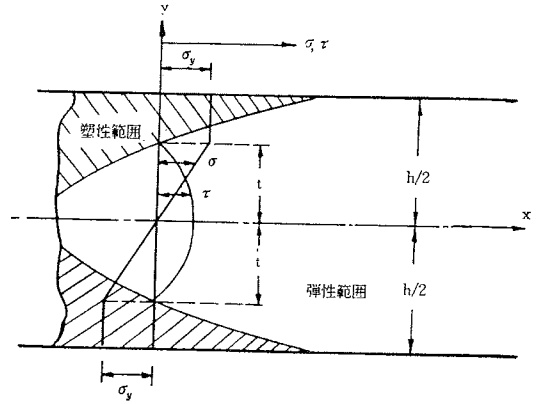
$$\tau = \tau_1 \left(1 - \frac{y^2}{t^2}\right), \quad |y| \leq t \dots\dots\dots(20)$$

ただし,  $\tau_1$ : 定数

よってせん断力  $Q$  は断面を長方形と見なせばつぎのごとくなる。

$$Q = \int \tau dA = \tau_1 \int_{-t}^t b \left(1 - \frac{y^2}{t^2}\right) dy = \frac{4}{3} \tau_1 b t \dots\dots(21)$$

図-9



応力の降伏状態が進行し, 中立軸のせん断応力が Mises の降伏条件により  $\tau = \sigma_y / \sqrt{3}$  に達すると, せん断核が生起していわゆる塑性ヒンジが形成される。

すなわち式 (20) および式 (21) より

$$Q_P = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} b t$$

よって純降伏せん断力  $Q_y = 2\sigma_y b h / 3\sqrt{3}$  で上式の両辺を割れば,

$$\frac{Q_P}{Q_y} = 2 \left(\frac{t}{h}\right) \dots\dots\dots(22)$$

一方このときのモーメントを  $M_{PQ}$  とすれば式 (2a) より,

$$M_{PQ} = \frac{bh^2}{12} \sigma_y \left\{3 - 4 \left(\frac{t}{h}\right)^2\right\}$$

式 (22) を上式に代入し  $M_y$  で両辺を割れば, 結局完全塑性状態における曲げモーメントとせん断力との関係が次式でえられる。

$$\frac{M_{PQ}}{M_y} = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{Q_P}{Q_y}\right)^2\right] \dots\dots\dots(23)$$

つぎに弾塑性状態時のせん断応力によって生ずる単位長さ当りの補正エネルギーを算定すればつぎのごとくである。

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \int_A \int \tau d\tau dA = \int_A \frac{\tau^2}{2G} dA \dots\dots\dots(24)$$

式 (24) に式 (20) を代入して  $y$  について積分すれば,

$$\frac{\partial U}{\partial S} = b \int_{-t}^t \frac{\tau^2}{2G} \left(1 - \frac{y^2}{t^2}\right)^2 dy = \frac{8b}{15G} \tau_1^2 t$$

また式 (21) および式 (2a) を用いて  $\tau_1$  および  $t$  を消去すれば次式となる。

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{3Q^2}{5GA} \frac{1}{\sqrt{3-2M/M_y}} \dots\dots\dots(25)$$

よってやはり全体に貯えられるせん断補正エネルギー  $U_Q$  は, 弾性領域も考慮して結局次式で与えられる。

$$U_Q = \alpha \int_E \frac{Q^2}{2GA} dS + \alpha \int_P \frac{Q^2}{2GA} \frac{dS}{\sqrt{3-2M/M_y}} \dots\dots\dots(26)$$

ただし、 $\alpha=1.2$  (長方形断面の場合)

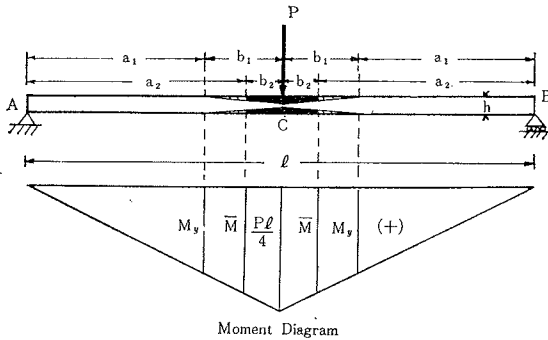
したがって曲げモーメントおよびせん断力の影響を考慮した厳密補正エネルギー  $U_{M+Q}$  は式 (7) および式 (26) より次式でえられる。

$$U_{M+Q} = U_M + U_Q = \int_E \frac{M^2}{2EI} dS + \int_P \frac{M_y^2}{2EI} (3 - 2\sqrt{3-2M/M_y}) dS + \alpha \int_E \frac{Q^2}{2GA} dS + \alpha \int_P \frac{Q^2}{2GA} \cdot \frac{dS}{\sqrt{3-2M/M_y}} \dots\dots(27)$$

以上の考察に基づいてせん断力の影響を数値的に把握するため、単純ばりの中央点に集中荷重  $P$  が作用する場合のたわみの算定を行なっている。

いま図-10のごとく中央に塑性領域が  $2b_1 (=l-2a_1)$  だけ生ずるものとすれば、任意点の曲げモーメントおよびせん断力は  $A \sim C$  間で  $M=Px/2$  および  $Q=P/2$  となり、せん断力のみによるたわみ  $\delta_Q$  および曲げモー

図-10



メントをも考慮したたわみ  $\delta_{M+Q}$  は、それぞれ式 (14) に式 (26) および式 (27) を適用してつぎのごとく求められる。

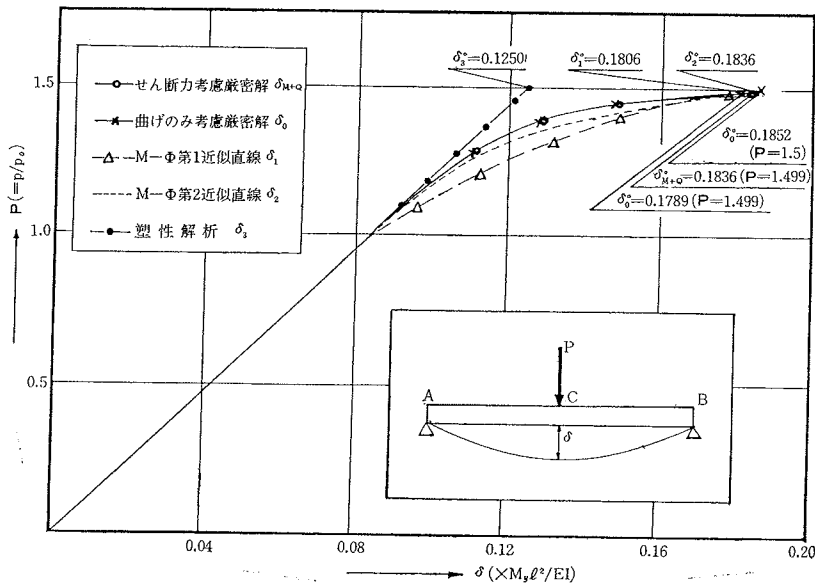
$$\delta_Q = 2 \left[ \alpha \int_0^{a_1} \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial P} dx + \alpha \int_{a_1}^{l/2} \left( \frac{Q}{GA} \frac{1}{\sqrt{3-2M/M_y}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} + \frac{Q^2}{2GA} \frac{1}{\sqrt{(3-2M/M_y)^3}} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \right) dx \right] = \frac{\alpha Pa_1}{2GA} \left[ 2 - \sqrt{3-l/a_1} + \frac{Pa_1}{4M_y} \left( \frac{3-l/2a_1}{\sqrt{3-l/a_1}} - 2 \right) \right]$$

$$\delta_{M+Q} = 2 \left[ \int_0^{a_1} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_{a_1}^{l/2} \frac{M_y}{EI} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-2M/M_y}} \frac{\partial M}{\partial P} dx \right] + \delta_Q = \frac{Pa_1^3}{6EI} + \frac{M_y a_1^2}{2EI} \times \left[ \frac{8}{3} - \left( 2 + \frac{l}{3a_1} \right) \sqrt{3 - \frac{l}{a_1}} \right] + \delta_Q \dots\dots(28)$$

さらに弾塑性境界条件  $M_{x=a_1} = Pa_1/2 = M_y$  より  $a_1 = 2M_y/P$  をえ、また降伏曲げモーメント  $M_y$  を初期降伏荷重  $P_0$  で示せば  $M_y = P_0 l/4$  となるゆえ、これらを式 (28) に代入すれば結局たわみが荷重比  $P = P/P_0$  の関数として表示され次式となる。

$$\delta_Q = \left( \frac{M_y l^2}{12EI} \right) \left( \frac{E}{G} \right) \left( \frac{h}{l} \right)^2 \times \left[ 1 - \sqrt{3-2P} + \frac{1}{2} \left( \frac{3-P}{\sqrt{3-2P}} \right) \right]$$

図-11



$$\delta_{M+Q} = \left( \frac{M_y l^2}{12 EI} \right) \left( \frac{1}{P} \right)^2 \times [5 - (P+3)\sqrt{3-2P}] + \delta_Q \dots\dots\dots(29)$$

一方崩壊荷重  $P_P$  は式 (23) より次値となる。

$$P_P = \frac{3}{\sqrt{1+K}+1} P_0 \dots\dots\dots(30)$$

ただし,  $K = \frac{9}{4} \left( \frac{h}{l} \right)^2$ ,  $P_0 = 4 \frac{M_y}{l}$

したがって弾塑性時の  $P$  値の範囲は上限が崩壊荷重  $P_P$  で、下限が初期降伏荷重  $P_0$  と規定される。すなわち、

$$P_0 \leq P \leq P_P$$

$P$  を上記範囲にとり、式 (29) の  $\delta_{M+Q}$  を  $h/l=0.03$  に対して算定すれば 図-11 のごとくなり、また誤差が最大となる崩壊荷重  $P_P$  における  $\delta_Q^\circ$  および  $\delta_{M+Q}^\circ$  を、通常使用される部材として  $h/l=0.02\sim 0.05$  について算出した結果は表-2 に示したごとくで、 $\delta_Q^\circ/\delta_{M+Q}^\circ \times 100\%$  は高々 2~5% に止り、さらに片持ばりに対しても同様の結果をえ、以上より  $h/l=0.05$  より細長い部材(細長比  $i \geq 70$ ) ではせん断力を無視した補正エネルギー式の使用が十分容認される。

表-2

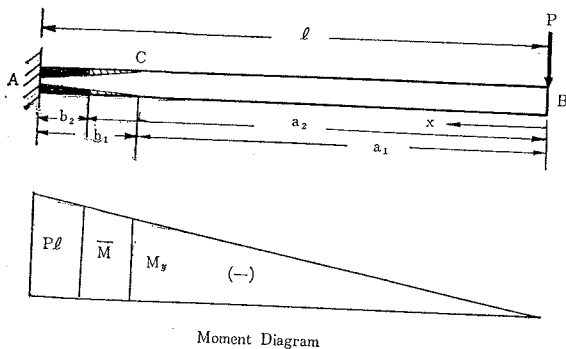
$h/l$ 細長比	0.02	0.03	0.04	0.05
	$\delta$ ( $\times M_y l^2/EI$ )	173.2	115.5	86.6
$P_P$	1.4997	1.4992	1.4987	1.4979
$\delta_Q^\circ$	$0.3105 \times 10^{-2}$	$0.4733 \times 10^{-2}$	$0.6409 \times 10^{-2}$	$0.8134 \times 10^{-2}$
$\delta_{M+Q}^\circ$	0.1840	0.1836	0.1833	0.1830
$\frac{\delta_Q^\circ}{\delta_{M+Q}^\circ} \times 100\%$	1.7%	2.5%	3.5%	4.4%

6. 誤差の検討

以下は各種荷重に対する片持ばりおよび単純ばりのたわみならびにたわみ角を求め、本法と  $M-\phi$  曲線を忠実に追跡した厳密解および在来の塑性解析との比較検討を取り扱う。

(1) 図-12 のごとき片持ばりの自由端 B に集中荷

図-12



重  $P$  が働くとき、同点のたわみおよびたわみ角を算定すればそれぞれ以下のごとくである。

任意点の曲げモーメントは  $M = -Px$  であるゆえ、塑性領域を  $b_1, b_2$  とすれば  $M-\phi$  第1および  $M-\phi$  第2近似直線による B 点のたわみ  $\delta_1$  および  $\delta_2$  は、式 (9) および式 (10) と式 (14) とよりそれぞれ次式となる。

$$\delta_1 = \int_0^l \frac{Px^2}{EI} dx + \kappa \int_{a_1}^l \frac{(Px+M_{yc})x}{EI} dx = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{\kappa}{EI} \left[ \frac{P}{3}(l^3-a_1^3) + \frac{M_{yc}}{2}(l^2-a_1^2) \right]$$

$$\delta_2 = \int_0^l \frac{Px^2}{EI} dx + \kappa_1 \int_{a_1}^l \frac{(Px+M_{yc})x}{EI} dx + \kappa_2 \int_{a_2}^l \frac{(Px+\bar{M}c)x}{EI} dx = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{\kappa_1}{EI} \left[ \frac{P}{3}(l^3-a_1^3) + \frac{M_{yc}}{2}(l^2-a_1^2) \right] + \frac{\kappa_2}{EI} \left[ \frac{P}{3}(l^3-a_2^3) + \frac{\bar{M}c}{2}(l^2-a_2^2) \right] \dots\dots\dots(31)$$

ここに、塑性領域を指定する  $a_1$  および  $a_2$  は、弾塑性境界の適合条件より  $M_{x=a_1} = M_{yc} = -M_y = -Pa_1$ ,  $M_{x=a_2} = \bar{M}c = -\bar{M} = -Pa_2$  となるゆえ、 $a_1 = M_y/P$ ,  $a_2 = \bar{M}/P$  となる。また  $M_y = P_0 l$ ,  $\bar{M} = \bar{f} M_y$  において式 (31) に代入して  $a_1$  および  $a_2$  を消去すれば、結局 B 点のたわみが荷重比  $P = P/P_0$  の関数として求められ次式となる。

$$\delta_1 = \left[ \frac{P}{3} + \kappa \left\{ \frac{P}{3} \left( 1 - \frac{1}{P^3} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{P^2} \right) \right\} \right] \times \frac{M_y l^2}{EI}$$

$$\delta_2 = \left[ \frac{P}{3} + \kappa_1 \left\{ \frac{P}{3} \left( 1 - \frac{1}{P^3} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{P^2} \right) \right\} + \kappa_2 \left\{ \frac{P}{3} \left( 1 - \frac{\bar{f}^3}{P^3} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{f}^2}{P^2} \right) \right\} \right] \frac{M_y l^2}{EI} \dots\dots\dots(32)$$

すなわち、式 (32) の  $\delta_1$  および  $\delta_2$  の右辺の第 1 項  $PM_y l^2/3EI$  は、A 端が弾性限界に達する初期降伏荷重  $P_0 = M_y/l$  以下のときの弾性たわみを示し、第 2 項以下を含めたものが A 端に塑性領域を発生した状態より崩壊に至るまでの弾塑性たわみを与えるものである。

(a) いま断面を長方形と仮定し、式 (32) に  $\kappa = 3, \kappa_1 = 0.376, \kappa_2 = 10.50, \bar{f} = 1.25$  を代入すれば、たわみ  $\delta_1$  および  $\delta_2$  と荷重比  $P$  との関係が 図-13 のごとく求められる。この場合崩壊荷重は

$$M_A = -M_P = -1.5 M_y = -Pl$$

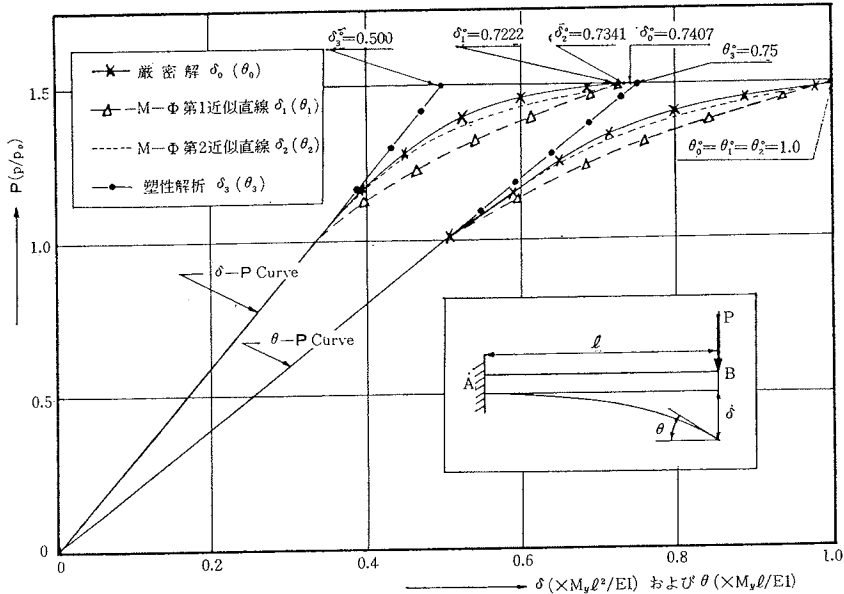
より、

$$P_P = 1.5 M_y/l$$

とえられるゆえ、崩壊時のたわみ  $\delta_1^\circ$  および  $\delta_2^\circ$  はそれぞれ次値となる。

$$\delta_1^\circ = 0.7222 \frac{M_y l^2}{EI}$$

図-13



$$\delta_2^{\circ} = 0.7341 \frac{M_y l^2}{EI}$$

同様にたわみ角  $\theta_1$  および  $\theta_2$  は式 (9), (10) および式 (15) より,

$$\theta_{1(M_B=0)} = \int_0^l \frac{Px + M_B}{EI} dx + \kappa \int_{a_1}^l \frac{(Px + M_B - M_y)}{EI} dx$$

$$= \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{\kappa}{EI} \left[ \frac{P}{2} (l^2 - a_1^2) - M_y (l - a_1) \right]$$

$$\theta_{2(M_B=0)} = \int_0^l \frac{Px + M_B}{EI} dx + \kappa_1 \int_{a_1}^l \frac{(Px + M_B - M_y)}{EI} dx$$

$$+ \kappa_2 \int_{a_2}^l \frac{(Px + M_B - \bar{M})}{EI} dx$$

$$= \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{\kappa_1}{EI} \left[ \frac{P}{2} (l^2 - a_1^2) - M_y (l - a_1) \right]$$

$$+ \frac{\kappa_2}{EI} \left[ \frac{P}{2} (l^2 - a_2^2) - \bar{M} (l - a_2) \right]$$

上式に  $a_1 = l/P$ ,  $a_2 = l\bar{f}/P$  を代入して

$$\theta_1 = \left[ \frac{P}{2} + \frac{\kappa}{2P} (P-1) \right] \frac{M_y l}{EI}$$

$$\theta_2 = \left[ \frac{P}{2} + \frac{\kappa_1}{2P} (P-1)^2 + \frac{\kappa_2}{2P} (P-\bar{f})^2 \right] \frac{M_y l}{EI}$$

式 (34) のたわみ角と荷重比  $P$  との関係は 図-13 に併記するごとくなり, 崩壊時におけるたわみ角  $\theta_1^{\circ}$  および  $\theta_2^{\circ}$  はそれぞれ次値となる。

$$\theta_1^{\circ} = \frac{M_y l}{EI}$$

$$\theta_2^{\circ} = \frac{M_y l}{EI}$$

つぎに在来の塑性解析<sup>12)</sup>よりたわみ  $\delta_3^{\circ}$  およびたわみ角  $\theta_3^{\circ}$  を求めると, A 端が塑性ヒンジになる瞬間まで曲げモーメントと曲率との関係を弾性と仮定しており, 結果は次式のごとくである。

$$\delta_3^{\circ} = \frac{Pl^3}{3EI} = 0.5 \frac{M_y l^2}{EI}$$

$$\theta_3^{\circ} = \frac{Pl^2}{2EI} = 0.75 \frac{M_y l}{EI}$$

さらに  $M-\phi$  曲線を忠実に追跡した厳密解によるたわみ  $\delta_0$  およびたわみ角  $\theta_0$  を求めればつぎのごとくえられる。すなわち式 (14) に式 (1) および式 (2c) を代入して,

$$\delta_0 = \int_0^{a_1} \frac{Px^2}{EI} dx + \int_{a_1}^l \frac{M_y x dx}{EI \sqrt{3-2Px/M_y}}$$

上式を積分し, かつ  $a_1 = l/P$  を代入して  $a_1$  を消去すれば,

$$\delta_0 = \frac{M_y l^2}{3EI} \left[ \frac{5}{P^2} - \left( \frac{1}{P} + \frac{3}{P^3} \right) \sqrt{3-2P} \right] \quad \dots\dots\dots(35)$$

特に崩壊時のたわみ  $\delta_0^{\circ}$  は式 (35) に  $P_P = 1.5$  を代入して次値となる。

$$\delta_0^{\circ} = 0.7407 \frac{M_y l^2}{EI}$$

たわみ角  $\theta_0$  も同様に式 (15) に式 (1) および式 (2c) を代入して計算すれば,

$$\theta_0 = \frac{M_y l}{PEI} \left[ \frac{3}{2} - \sqrt{3-2P} \right]$$

したがって崩壊時のたわみ角は同じく  $P_P = 1.5$  を代入して,  $\theta_0^{\circ} = M_y l / EI$  となる。

以上より本法を厳密解と比較すれば, 崩壊時におけるたわみの誤差は  $\delta_1^{\circ}$  で 2.5%,  $\delta_2^{\circ}$  で 0.94%, また, たわみ角は全く一致しており, これに対して塑性解析によるたわみ  $\delta_3^{\circ}$  およびたわみ角  $\theta_3^{\circ}$  の誤差はそれぞれ 32.5% および 25% の過小評価となっていることがわかる。

さらに本例の片持ばりに等分布荷重が作用した場合の



B点のたわみを同一手法で算定すれば、崩壊時におけるたわみは本法と厳密解とは一致し、

$$\delta_1^\circ = \delta_2^\circ = \delta_0^\circ = M_y l^2 / 2 EI$$

となる。

(2) 図-10の単純ばりの中央載荷点のたわみを6.(1)の場合と同様に本法で解けば次式の結果となる。

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{\kappa}{6EI} \left[ P \left( \frac{l^3}{8} - a_1^3 \right) - 3M_y \left( \frac{l^2}{4} - a_1^2 \right) \right] \\ &= \frac{M_y l^2}{12EI} \left[ P + \frac{\kappa}{P^2} \left\{ (P^3 - 1) - \frac{3}{2}(P^2 - 1) \right\} \right] \dots (36) \\ \delta_2 &= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{\kappa_1}{6EI} \left[ P \left( \frac{l^3}{8} - a_1^3 \right) - 3M_y \left( \frac{l^2}{4} - a_1^2 \right) \right] \\ &\quad + \frac{\kappa_2}{6EI} \left[ P \left( \frac{l^3}{8} - a_2^3 \right) - 3\bar{M} \left( \frac{l^2}{4} - a_2^2 \right) \right] \\ &= \frac{M_y l^2}{12EI} \left[ P + \frac{\kappa_1}{P^2} \left\{ (P^3 - 1) - \frac{3}{2}(P^2 - 1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa_2}{P^2} \left\{ (P^3 - \bar{f}^3) - \frac{3}{2}(P^2 - \bar{f}^2) \right\} \right] \dots (37) \end{aligned}$$

ただし、

$$P = P/P_0, \quad P_0 = 4M_y/l, \quad a_1/l = 1/2 P, \quad a_2/l = \bar{f}/2 P$$

式(36)および式(37)を図示すれば図-11のごとき結果となる。特に崩壊荷重  $P_P$  は

$$M_C = Pl/4 = M_P = 1.5 M_y$$

より

$$P_P = 6 M_y/l$$

となり、したがって、 $P_P = 1.5$  となる。これを式(36)および式(37)に代入すれば、崩壊時のたわみ  $\delta_1^\circ$  および  $\delta_2^\circ$  がただちに求められ次値となる。

$$\delta_1^\circ = 0.1806 \frac{M_y l^2}{EI}$$

$$\delta_2^\circ = 0.1836 \frac{M_y l^2}{EI}$$

また厳密解によるたわみ  $\delta_0$  は式(29)の  $\delta_{M+Q}$  より  $\delta_Q$  だけ差し引いた値に等しいゆえ、 $P_P = 1.5$  を代入すれば崩壊時のたわみ  $\delta_0^\circ$  として次値をうる。

$$\delta_0^\circ = 0.1852 \frac{M_y l^2}{EI}$$

したがって、本法における崩壊時のたわみの誤差は  $\delta_1^\circ$  で 2.5%、 $\delta_2^\circ$  で 0.86% となり、一方の塑性解析によるたわみ  $\delta_3^\circ = 0.125 M_y l^2 / EI$  が 32.5% の誤差を有するのに比較してきわめて高精度であることが確認される。

以上の二例を顧みて本法で用いた近似が在来の塑性解析にくらべはるかにすぐれ、しかも演算面において厳密解とは比較にならぬほどの簡易さを有することが了解される。

### 7. 弾塑性たわみ角式の誘導

弾塑性領域を考慮したたわみ角式を  $M-\phi$  第2近似直線に基づく補正エネルギー式より以下に誘導し、塑性領

域および塑性ヒンジの各種発生状態をあらかじめ想定して、使用に便なるごとく個々に提示せんとするものである。なお誘導諸式において  $\kappa_1 = \kappa$ 、 $\kappa_2 = 0$  とおけば当然  $M-\phi$  第1近似直線に基づく実用たわみ角式がえられる。

(1) 両端に塑性領域が生ずる場合

図-14に示すごとく A, B 両端よりそれぞれ  $A\bar{C}$ ,  $B\bar{D}$  および  $\bar{C}\bar{C}$ ,  $\bar{D}\bar{D}$  の範囲に 3. で定義した第2および第1塑性領域をもつ弾塑性部材 AB を考えれば、部材全体に貯えられる補正エネルギー式は式(10)より次式となる。

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + \kappa_1 \int_0^{a_1} \frac{(M - M_{ya})^2}{2EI} \\ &\quad + \kappa_2 \int_0^{a_2} \frac{(M - \bar{M}_a)^2}{2EI} dx + \kappa_1 \int_{l-b_1}^l \frac{(M - M_{yb})^2}{2EI} dx \\ &\quad + \kappa_2 \int_{l-b_2}^l \frac{(M - \bar{M}_b)^2}{2EI} dx \dots (38) \end{aligned}$$

ここに、 $M_{ya}$ ,  $M_{yb}$  はそれぞれ C, D 点の降伏曲げモーメント  $M_y$  を表わし、 $\bar{M}_a$ ,  $\bar{M}_b$  はそれぞれ  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$  点の臨界曲げモーメント  $\bar{M}$  を表わす。

図-14

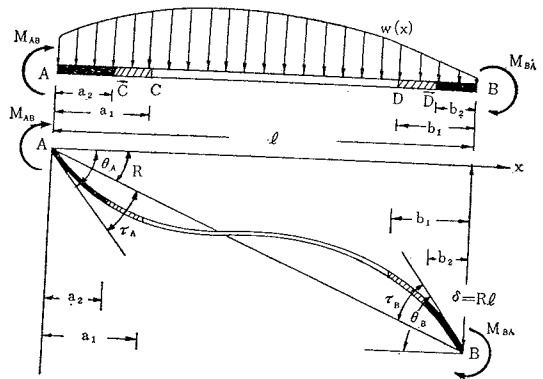


図-14より任意点の曲げモーメントはつぎのごとく表わされる。

$$M = \frac{l-x}{l} M_{AB} - \frac{x}{l} M_{BA} + M_0 \dots (39)$$

ただし、 $M_0$  は AB 材を単純ばりと見做したときの荷重による任意点の曲げモーメントを示す。

式(38)に式(39)を代入して式(15)を適用すれば、両端 A, B における切線角  $\tau_A$ ,  $\tau_B$  がそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \left( \frac{EI}{l} \right) \tau_A &= M_{AB} \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\sum_{i=1}^n \kappa_i} \frac{l^3 - (l-a_i)^3 + b_i^3}{3l^3} \right] \\ &\quad + M_{BA} \left[ -\frac{1}{6} + \frac{2}{\sum_{i=1}^n \kappa_i} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2(a_i^3 + b_i^3) - 3l(a_i^2 + b_i^2)}{6l^3} \right] \\ &\quad - M_{ya} \frac{2la_1 - a_1^2}{2l^2} \kappa_1 - M_{yb} \frac{b_2^2}{2l^2} \kappa_2 \end{aligned}$$

$$-\bar{M}_a \frac{2la_2 - a_2^2}{2l^2} \kappa_2 - \bar{M}_b \frac{b_2^2}{2l^2} \kappa_2 + C_1 \dots\dots\dots(40)$$

$$\left(\frac{EI}{l}\right)\tau_B = M_{AB} \left[ -\frac{1}{6} + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \times \frac{2(a_i^3 + b_i^3) - 3l(a_i^2 + b_i^2)}{6l^3} \right] + M_{BA} \left[ \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \frac{l^3 - (l-b_i)^3 + a_i^3}{3l^3} \right] + M_{ya} \frac{a_1^2}{2l^2} \kappa_1 + M_{yb} \frac{2lb_1 - b_1^2}{2l^2} \kappa_1 + \bar{M}_a \frac{a_2^2}{2l^2} \kappa_2 + \bar{M}_b \frac{2lb_2 - b_2^2}{2l^2} \kappa_2 - C_2 \dots\dots\dots(41)$$

ここに、 $C_1$  および  $C_2$  は外的荷重によって決まり、つぎのごとき内容をもつ。

$$C_1 = \int_0^l M_0 \frac{l-x}{l^2} dx + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_0^{a_i} M_0 \frac{l-x}{l^2} dx + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l-b_i}^l M_0 \frac{l-x}{l^2} dx$$

$$C_2 = \int_0^l M_0 \frac{x}{l^2} dx + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_0^{a_i} M_0 \frac{x}{l^2} dx + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l-b_i}^l M_0 \frac{x}{l^2} dx$$

さて、式 (40)、(41) に  $\tau_A = \theta_A - R$ 、 $\tau_B = \theta_B - R$  および  $\phi_A = 2EK_0\theta_A$ 、 $\phi_B = 2EK_0\theta_B$ 、 $\psi_{AB} = -6EK_0R$  の慣用置換を行なったのち、連立に解いて  $M_{AB}$ 、 $M_{BA}$

を求めれば、結局所要の弾塑性たわみ角式がえられ下記  
の式 (42 a) となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB}(\alpha_{AB}\phi_A + \beta_{AB}\phi_B + \gamma_{AB}\psi_{AB}) \\ &\quad + \xi_a M_{ya} + \xi_b M_{yb} + C_{AB} \\ M_{BA} &= k_{AB}(\alpha_{BA}\phi_B + \beta_{BA}\phi_A + \gamma_{BA}\psi_{AB}) \\ &\quad + \eta_a M_{ya} + \eta_b M_{yb} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42 a)$$

ただし、 $k=K/K_0$  は剛比、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  および  $\xi$ 、 $\eta$  は形状項で表-3 において  $c_{i=1,2} = d_{i=1,2} = 0$  としたものに合致する。ここで設計に多用される薄肉断面に高精度を示す  $M-\phi$  第1近似直線の場合 ( $\kappa_1 = \kappa$ 、 $\kappa_2 = 0$ ) について、上記形状項を数表化して実用に供しめるとくした。紙面の都合上本研究では計算結果のごく一部を長方形断面 ( $\kappa=3$ ) を例にとり、無次元化した塑性領域  $a_i/l$ 、 $b_i/l$  をそれぞれ横軸とパラメーターにして、図表-1~5 にかかげた。一般に塑性領域の増加とともに、図表-1 の  $\alpha$  値は減少し部材の曲げ剛性の低下が判読され、さらに図表-4、5 の  $|\xi|$ 、 $|\eta|$  はともに増大し、固定端モーメントが降伏応力に起因する降伏曲げモーメントにいちじるしく影響されることが確認された。なお各図表において併記したカッコ内の形状項に対しては、横軸とパラメーターとをそれぞれ同じくカッコした  $b_i/l$ 、 $a_i/l$  を用いて読みとればよい。

また荷重項  $C_{AB}$ 、 $C_{BA}$  の基礎をなす  $C_1$  および  $C_2$  について、主たる荷重状態3種に対する一般算式を算出す

表-3

$\alpha_{AB}$	$\frac{\nu_1}{2\nu}$	$\xi_a$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left( \frac{a_1}{l} \nu_1 - \frac{a_1^2}{2l^2} \nu_2 \right) + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left( \frac{a_2}{l} \nu_1 - \frac{a_2^2}{2l^2} \nu_2 \right)$
$\beta_{AB}$	$\frac{\nu_2 - \nu_1}{2\nu}$	$\xi_b$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left\{ \frac{b_1}{l} \nu_1 - \frac{l^2 - (l-b_1)^2}{2l^2} \nu_2 \right\} + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left\{ \frac{b_2}{l} \nu_1 - \frac{l^2 - (l-b_2)^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
$\gamma_{AB}$	$\frac{\nu_2}{6\nu}$	$\xi_c$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left\{ \frac{c_1}{l^2} (\nu_1 l - \nu_2 l_1) + \frac{c_1^2}{2l^2} \nu_2 \right\} + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left\{ \frac{c_2}{l^2} (\nu_1 l - \nu_2 l_1) + \frac{c_2^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
$\alpha_{BA}$	$\frac{\nu_1 - \nu_2 + \nu_3}{2\nu}$	$\xi_d$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left\{ \frac{d_1}{l^2} (\nu_1 l - \nu_2 l_1) - \frac{d_1^2}{2l^2} \nu_2 \right\} + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left\{ \frac{d_2}{l^2} (\nu_1 l - \nu_2 l_1) - \frac{d_2^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
$\beta_{BA}$	$\frac{\nu_2 - \nu_1}{2\nu}$	$\eta_a$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left\{ \frac{a_1}{l^2} (\nu_2 - \nu_1) - \frac{a_1^2}{l^2} \nu_3 \right\} + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left\{ \frac{a_2}{l} (\nu_2 - \nu_1) - \frac{\alpha_2^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
$\gamma_{BA}$	$\frac{\nu_3}{6\nu}$	$\eta_b$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left\{ \frac{b_1}{l} (\nu_2 - \nu_1) - \frac{l^2 - (l-b_1)^2}{2l^2} \nu_3 \right\} + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left\{ \frac{b_2}{l} (\nu_2 - \nu_1) - \frac{l^2 - (l-b_2)^2}{2l^2} \nu_3 \right\}$
$C_{AB}$	$\frac{1}{\nu} \{ C_2(\nu_2 - \nu_1) - C_1 \nu_1 \}$	$\eta_c$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left\{ \frac{c_1}{l^2} (\nu_2 l - \nu_1 l - \nu_3 l_1) + \frac{c_1^2}{2l^2} \nu_3 \right\} + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left\{ \frac{c_2}{l^2} (\nu_2 l - \nu_1 l - \nu_3 l_1) + \frac{c_2^2}{2l^2} \nu_3 \right\}$
$C_{BA}$	$\frac{1}{\nu} \{ C_1(\nu_1 - \nu_2 + \nu_3) - C_2(\nu_2 - \nu_1) \}$	$\eta_d$	$\frac{\kappa_1}{\nu} \left\{ \frac{d_1}{l^2} (\nu_2 l - \nu_1 l - \nu_3 l_1) - \frac{d_1^2}{2l^2} \nu_3 \right\} + \frac{\kappa_2 \bar{f}}{\nu} \left\{ \frac{d_2}{l^2} (\nu_2 l - \nu_1 l - \nu_3 l_1) - \frac{d_2^2}{2l^2} \nu_3 \right\}$
$\nu$	$\nu_1(\nu_2 + \nu_3) - \nu_2^2$	$\nu_1$	$\frac{1}{3} + \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa_i}{3l^3} \{ l^3 - (l-b_i)^3 + a_i^3 + 3(c_i + d_i)l_1^2 - 3(c_i^2 - d_i^2)l_1 + (c_i^3 + d_i^3) \}$
[注] $M-\phi$ 第1近似直線の場合 $\kappa_1 = \kappa$ 、 $\kappa_2 = 0$ とおく。		$\nu_2$	$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa_i}{2l^2} \{ l^2 - (l-b_i)^2 + a_i^2 + 2(c_i + d_i)l_1 - (c_i^2 - d_i^2) \}$
		$\nu_3$	$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa_i}{2l^2} \{ l^2 - (l-a_i)^2 + b_i^2 + 2(c_i + d_i)l_2 + (c_i^2 - d_i^2) \}$

れば、結果は表-4の各式において  $c_{i=1,2}=d_{i=1,2}=0$  としたもの一致するゆえ、同表に包含することにする。

a) 一端に塑性ヒンジが生ずる場合 図-15(a)に示すごとく B 端に塑性ヒンジが形成された場合は、式(42a)で  $M_{BA}=M_{PB}$  (B 点の塑性曲げモーメント) において次式をうる。

$$M_{AB} = k_{AB}(\alpha_{AB}'\phi_A + \gamma_{AB}'\psi_{AB}) + \xi_a' M_{ya} + \xi_b' M_{yb} + \beta_{AB}' M_{PB} + H_{AB}' \dots (42b)$$

ここに、

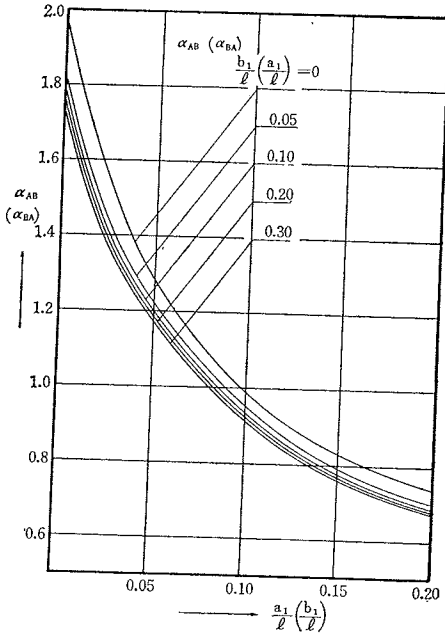
$$\alpha_{AB}' = \frac{1}{2(\nu_1 - \nu_2 + \nu_3)}$$

$$\beta_{AB}' = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1 - \nu_2 + \nu_3}$$

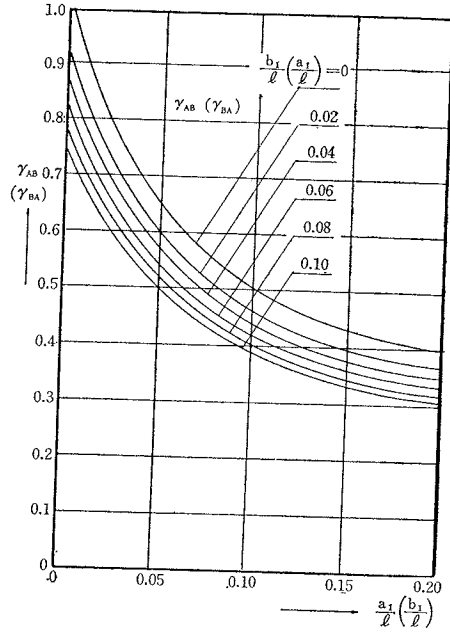
$$\gamma_{AB}' = \frac{1}{6(\nu_1 - \nu_2 + \nu_3)}$$

$$\xi_a' = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2 + \nu_3} \left\{ \kappa_1 \left( \frac{a_1}{l} - \frac{a_1^2}{2l^2} \right) + \kappa_2 \bar{f} \left( \frac{a_2}{l} - \frac{a_2^2}{2l^2} \right) \right\}$$

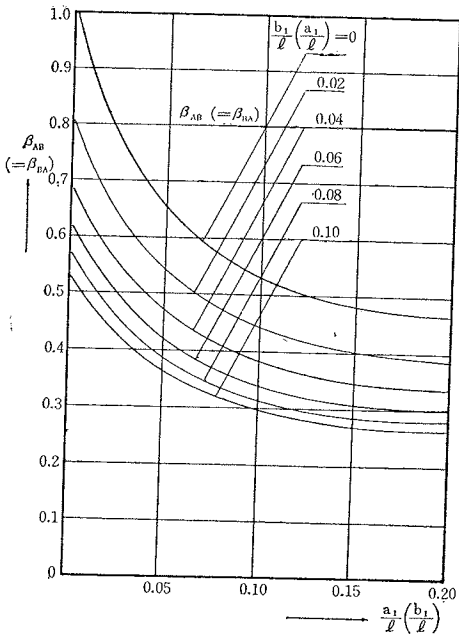
図表-1



図表-3



図表-2



図表-4

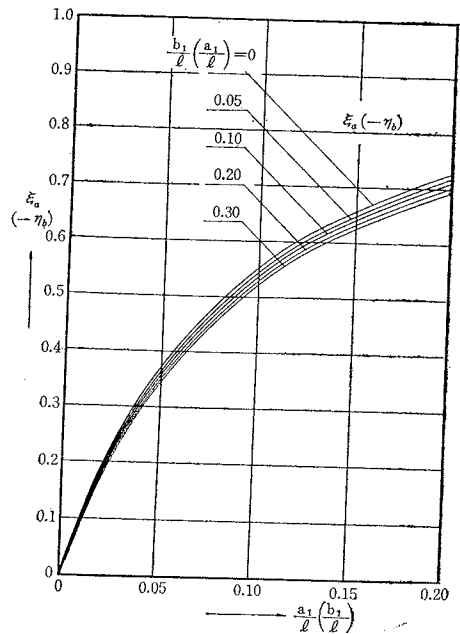


表-4

荷重図	$C_1$	$C_2$
	$\frac{Pl}{48} \left[ 3 + 4 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ 3la_i^2 - 2(a_i^3 - b_i^3) \} / l^3 \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ 3l^2(c_i + d_i) + 4(d_i^3 - c_i^3) - 6ld_i^2 \} / l^3 \right]$	$\frac{Pl}{48} \left[ 3 + 4 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ 3lb_i^2 - 2(b_i^3 - a_i^3) \} / l^3 \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ 3l^2(c_i + d_i) + 4(c_i^3 - d_i^3) - 6lc_i^2 \} / l^3 \right]$
	$\frac{P}{6l^3} \left[ l_2^3 - l_2l + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ l_2(3la_i^2 - 2a_i^3) \right. \\ \left. + 2l_1b_i^3 + 6l_1l_2^2(c_i + d_i) + 2(l_1d_i^3 - l_2c_i^3) \right. \\ \left. - 3l_2lc_i^2 + 6l_1l_2(c_i^2 - d_i^2) \right]$	$\frac{P}{6l^3} \left[ l_1l^3 - l_1l + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ l_1(3lb_i^2 - 2b_i^3) \right. \\ \left. + 2l_2a_i^3 + 6l_2l_1^2(c_i + d_i) + 2(l_2c_i^3 - l_1d_i^3) \right. \\ \left. - 3l_1ld_i^2 + 6l_1l_2(d_i^2 - c_i^2) \right]$
	$\frac{wl^2}{24} \left[ 1 + 4 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ l^3 + b_i^3 - (l - a_i)^3 \right. \\ \left. + (l_2 + c_i)^3 - (l_2 - d_i)^3 \} / l^3 - 3 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ l^4 + b_i^4 \right. \\ \left. - (1 - a_i)^4 + (l_2 + c_i)^4 - (l_2 - d_i)^4 \} / l^4 \right]$	$\frac{wl^2}{24} \left[ 1 + 4 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ l^3 + a_i^3 - (l - b_i)^3 \right. \\ \left. + (l_1 + d_i)^3 - (l_1 - c_i)^3 \} / l^3 - 3 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \{ l^4 + a_i^4 \right. \\ \left. - (1 - b_i)^4 + (l_1 + d_i)^4 - (l_1 - c_i)^4 \} / l^4 \right]$

図表-5

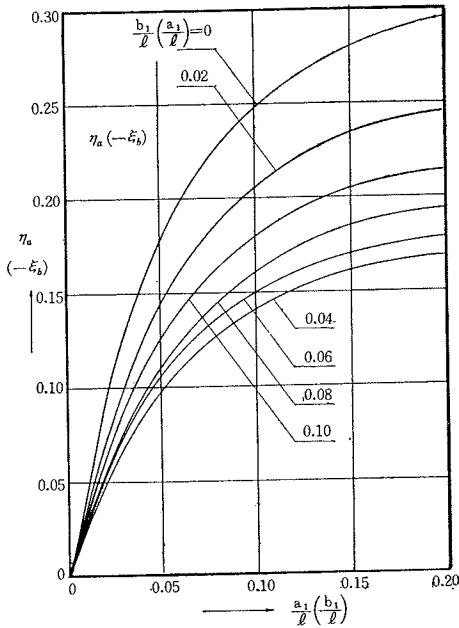
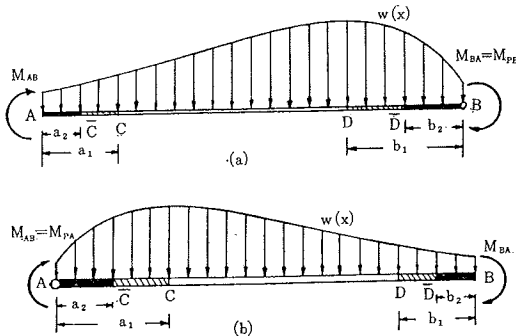


図-15



$$\xi_b' = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2 + \nu_3} \left\{ \kappa_1 \left( \frac{b_1}{l} + \frac{b_1^2 - 2lb_1}{2l^2} \right) + \kappa_2 \bar{f} \left( \frac{b_2}{l} + \frac{b_2^2 - 2lb_2}{2l^2} \right) \right\}$$

$$H_{AB} = - \frac{C_1}{\nu_1 - \nu_2 + \nu_3}$$

なお  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  は表-3 において  $c_{i=1,2} = d_{i=1,2} = 0$  としたものに合致し、また  $C_1$  は式 (40) のそれと同じく、次記する  $C_2$  も式 (41) の内容と同様である。

つぎに 図-15 (b) のごとく A 端に塑性ヒンジが形成された場合が考えられるが、いまと全く同様に  $M_{AB} = M_{PA}$  において

$$M_{BA} = k_{AB} (\alpha_{BA}' \phi_B + \gamma_{BA}' \psi_{AB}) + \eta_a' M_{ya} + \eta_b' M_{yb} + \beta_{BA}' M_y + H_{BA} \dots (42c)$$

ここに、 $M_{PA}$  は A 点の塑性曲げモーメントを表わし、

$$\alpha_{BA}' = \frac{1}{2\nu_1}, \quad \beta_{BA}' = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1}$$

$$\gamma_{BA}' = \frac{1}{6\nu_1}, \quad H_{BA} = \frac{C_2}{\nu_1}$$

$$\eta_a' = - \frac{1}{\nu_1} \left\{ \kappa_1 \frac{a_1^2}{2l^2} + \kappa_2 \bar{f} \frac{a_2^2}{2l^2} \right\}$$

$$\eta_b' = - \frac{1}{\nu_1} \left\{ \kappa_1 \frac{b_1^2 - 2lb_1}{2l^2} + \kappa_2 \bar{f} \frac{b_2^2 - 2lb_2}{2l^2} \right\}$$

$\nu_1, \nu_2$  は式 (42b) の場合と一致する。

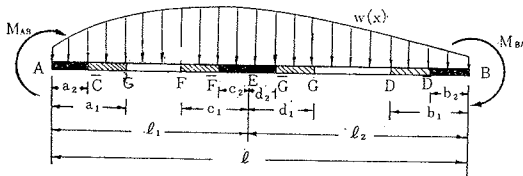
**b) 塑性領域が生じない場合** B端に塑性領域が生じない場合は、式 (42a) で  $b_1 = b_2 = 0$  とおけばよく、また、A, B 両端に塑性領域が生じない場合は、式 (42a) で  $a_{i=1,2} = b_{i=1,2} = 0$  とおけばつぎの弾性慣用式がえられるのは当然であり、ここでの  $C_{AB}, C_{BA}$  はもちろん弾性時の荷重項の内容に帰せられている。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB} (2\phi_A + \phi_B + \psi_{AB}) + C_{AB} \\ M_{BA} &= k_{AB} (2\phi_B + \phi_A + \psi_{AB}) + C_{BA} \end{aligned} \right\} (42d)$$

(2) 両端および途中に塑性領域が生ずる場合

構造形式および荷重状態によっては、図-16 に示すごとく塑性領域が部材の両端および途中に生ずる場合がある。この場合も 7. (1) と同様に両端および途中の塑性領域をも入れて誘導すれば次式の結果をうる。

図-16



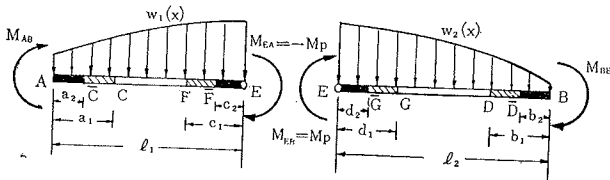
$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB}(\alpha_{AB}\phi_A + \beta_{AB}\phi_B + \gamma_{AB}\psi_{AB}) \\ &\quad + \xi_a M_{ya} + \xi_b M_{yb} + \xi_c M_{yc} + \xi_d M_{yd} + C_{AB} \\ M_{BA} &= k_{BA}(\alpha_{BA}\phi_B + \beta_{BA}\phi_A + \gamma_{BA}\psi_{AB}) \\ &\quad + \eta_a M_{ya} + \eta_b M_{yb} + \eta_c M_{yc} + \eta_d M_{yd} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

ここに、形状項  $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta$  および荷重項  $C_{AB}, C_{BA}$  は表-3 に示すごとく内容をもつ。すなわち表-3 の係数は  $c_{i=1,2} = d_{i=1,2} = 0$  とした式 (42 a) および  $a_{i=1,2} = b_{i=1,2} = 0$  とした途中のみ塑性領域が生ずる場合をもその特例として包含している。また  $C_{AB}, C_{BA}$  の基礎をなす  $C_1$  および  $C_2$  はつぎのごとく示される。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \int_0^l M_0 \frac{l-x}{l^2} dx + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_0^{a_i} M_0 \frac{l-x}{l^2} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l-b_i}^l M_0 \frac{l-x}{l^2} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l_1-c_i}^{l_1} M_0 \frac{l-x}{l^2} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l_1}^{l_1+d_i} M_0 \frac{l-x}{l^2} dx \\ C_2 &= \int_0^l M_0 \frac{x}{l^2} dx + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_0^{a_i} M_0 \frac{x}{l^2} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l-b_i}^l M_0 \frac{x}{l^2} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l_1-c_i}^{l_1} M_0 \frac{x}{l^2} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \kappa_i \int_{l_1}^{l_1+d_i} M_0 \frac{x}{l^2} dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

主たる荷重状態 3 種に対する  $C_1, C_2$  の値を式 (44) より算定すれば表-4 をうる。すなわち表-4 の各式は 7. (1) における  $C_1, C_2$  の値および途中のみ塑性領域が生ずる  $a_{i=1,2} = b_{i=1,2} = 0$  とした場合のそれらをもその

図-17



特例としてすべて包含しており、塑性領域  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i=1, 2$ ) などの発生状況に応じてその都度適宜取捨選択し、それぞれに対応するたわみ角式である式 (42) および式 (43) とともに使用するものである。

(3) 途中に塑性ヒンジが生ずる場合

部材の途中に塑性ヒンジが形成された場合は、図-17のごとく塑性ヒンジ点 E で部材を 2 分し AE と EB の両材に分け、それぞれに式 (42 b) および式 (42 c) を適用してこれを解決する手法をとる。

8. 不静定構造物の弾塑性解析法

本たわみ角式を用いることにより、多層多スパンの長方形ラーメンや連続ばりなど各種不静定構造物の弾塑性解析が可能となるが、その解法骨子は慣用の弾性たわみ角法と類似であり、弾塑性境界条件式としての曲げモーメントの適合条件式が加わるのみといえる。

すなわち構造物の各節点における節点方程式および必要に応じて層方程式たるせん断力のつりあい式を用いて未知たわみ角および未知部材角と同数の方程式をうるとともに、さらに塑性領域範囲を示す  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i=1, 2$ ) などの未知数に対してはつぎの弾塑性境界条件が成立する。たとえば図-14 における第 1 および第 2 塑性領域の先端 C および C' 点の算出曲げモーメントが、それぞれ降伏曲げモーメント  $M_{ya}$  および臨界曲げモーメント  $\bar{M}_a$  に等しかるべき条件を用いて式 (39) より次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} M_{x=a_1} = M_{ya} &= \frac{l-a_1}{l} M_{AB} - \frac{a_1}{l} M_{BA} + M_0(a_1) \\ M_{y=a_2} = \bar{M}_a &= \frac{l-a_2}{l} M_{BA} - \frac{a_2}{l} M_{AB} + M_0(a_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

ここに、 $M_{ya}$  および  $\bar{M}_a$  の符号はそれぞれ C 点および C' 点の算出曲げモーメントの符号と一致する。

また、 $b_i, c_i, d_i$  ( $i=1, 2$ ) に対しても式 (45) と同様な条件式が対応するゆえ、結局塑性領域の未知数と同数の方程式がえられることになる。

なお、図-17のごとく材の途中に塑性ヒンジが形成される場合には、部材を 2 つないし 3 つに分ける関係上、その分岐点を節点と見做して取り扱うゆえ、未知たわみ角と未知部材角とが結局増えることになり、前述の塑性領域範囲が未知数であることを考慮すれば、一般に弾性たわみ角法よりも未知数の数がかかなり多くなり、さらに上記方程式の性質からいって 1 回の連立解法で処置できず、くり返し試算を要する点などが原因となって、計算手法は多少繁雑となる。しかし電子計算機の利用によりこれらの難点も克服する今日においては、かなり複雑な構造物も取り扱うことが可能となったが、本論文では簡単な例を

用いて 9. に計算手法の詳細を紹介することとし、その大要のみを述べれば以下のごとくである。

(1) 与えられた荷重により曲げモーメントを算出する場合

(i) 与荷重により構造物の弾性解析を行ない、曲げモーメント図を算定し、弾性限すなわち降伏曲げモーメント  $M_y$  を越えている断面があれば、その塑性領域を式 (45) などより上記算出弾性曲げモーメント値をまず使用して第 1 次近似値を決定する。

(ii) この塑性領域を式 (42 a)~式 (43) のうち必要な式を選んで代入し、節点方程式たる曲げモーメントのつりあい式および層方程式たるせん断力のつりあい式を連立に解いて弾塑性曲げモーメント図を算定する。

(iii) (ii) で算出した弾塑性曲げモーメント値を (i) で使用した式 (45) などに代入して塑性領域を改めて算出し、再び (ii) の算定を行ない、曲げモーメントが収斂に至るまでこれをくり返す。したがって与荷重に対する弾塑性たわみも、ただちに  $\delta = R \cdot l$  としてえられる。

(2) 与えられた塑性領域により荷重値を算出する場合

式 (42 a)~式 (43) より与えられた塑性領域に対応するたわみ角式をえらび、各形状項  $\alpha, \beta, \tau, \xi, \eta$  および荷重項  $C_{AB}, C_{BA}$  などをそれぞれ表-3 および表-4 より算定する。節点方程式および層方程式と式 (45) などの弾塑性境界条件式とを連立に解けば所要の荷重値がえられる。

この解法は一端に塑性領域が生ずる場合か、両端において対称あるいは途中において対称に塑性領域が生ずる場合にのみ適用可能で、しからざる場合は本質的にかかる問題が起こらない。

(3) 崩壊荷重時まで追跡する場合

(i) まず荷重を  $P$  で一般表示のうえ弾性解析を行ない、曲げモーメント図を算出する。

(ii) つぎに  $M_{max}$  の断面で上下縁の応力がちょうど弾性限界に達した状態 (図-2 (b) 参照) を考え、これに対応する初期降伏荷重  $P_0$  および初期降伏の起こる位置を弾性的に算定する。

(iii) 荷重が  $P_0$  より大きい  $P_1$  に増加した状態に移行する。当然塑性領域が発生し、これを式 (45) などより算出するが、右辺の端モーメントが未知数ゆえ、まず第 1 次近似値として (3) (i) で弾性的に算出した端モーメント値に含まれる  $P$  に  $P_1$  を使用する。

(iv) 8. (1) の (ii), (iii) の操作をくり返すことにより、塑性領域ならびに曲げモーメントを収斂させる。

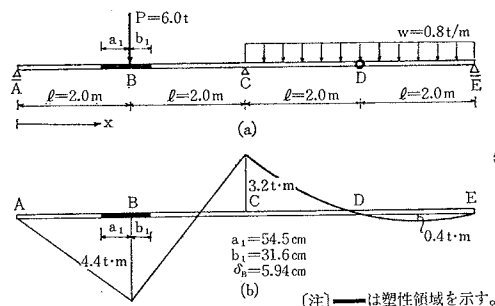
(v) つぎに荷重を逐次漸増させ ( $P_2, P_3, \dots$ )、上記 (iii)~(iv) の操作をくり返して逐次発生して行く塑性領域および塑性ヒンジを追跡しながら崩壊荷重  $P_P$  まで算定すればよい。

## 9. 計算例

計算手法を紹介する目的で、以下に実用解法としての  $M-\phi$  第 1 近似直線を用いて静定および不静定ばりについての弾塑性解析を行なう。

(1) 図-18 のごとき長方形断面ゲルバーばりに集中荷重  $P=6t$  および等分布荷重  $w=0.8t/m$  が作用するとき、塑性領域ならびに B 点のたわみを算定すればつぎのごとくである。ただし鋼材として SS 41 (降伏点応力  $\sigma_y=3200 \text{ kg/cm}^2$ , 断面  $6.0 \times 10.0 \text{ cm}$ ) を使用するものとする。

図-18



任意点の曲げモーメントは  
A~B 間 ( $0 \leq x \leq l$ ) で

$$M = \frac{P-wl}{2}x \dots\dots\dots(46 a)$$

B~C 間 ( $l \leq x \leq 2l$ ) で

$$M = P\left(l - \frac{x}{2}\right) - \frac{wl}{2}x \dots\dots\dots(46 b)$$

C~E 間 ( $2l \leq x \leq 4l$ ) で

$$M = -\frac{w}{2}(x^2 - 7lx + 12l^2) \dots\dots\dots(46 c)$$

したがって曲げモーメント図は 図-18 (b) のごときなり、降伏曲げモーメント値が  $M_y = bh^2 \sigma_y / 6 = 3.2 \text{ t}\cdot\text{m}$  であるゆえ、これを上回る B 点近傍に塑性領域が発生していることがわかる。いま B 点より A 方向および C 方向の塑性領域をそれぞれ  $a_1$  および  $b_1$  とすれば、式 (46 a) および式 (46 b) より弾塑性境界の適合条件はそれぞれ次式となる。

$$M_y = \frac{P-wl}{2}(l-a_1)$$

$$M_y = P\left(l - \frac{l+b_1}{2}\right) - \frac{wl}{2}(l+b_1)$$

上式に  $M_y = 3.2 \text{ t}\cdot\text{m}$ ,  $P = 6 \text{ t}$ ,  $w = 0.8 \text{ t/m}$ ,  $l = 2 \text{ m}$  を代入して  $a_1$  および  $b_1$  を求めれば次値をうる。

$$a_1 = 0.545 \text{ m}, \quad b_1 = 0.316 \text{ m} \dots\dots\dots(47)$$

さらに B 点のたわみ  $\delta_B$  は式 (9) と式 (14) よりつぎのごとくえられる。

$$\delta_B = \int_0^l \frac{(P-wl)}{4EI} x^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{EI} \int_1^{2l} \left\{ P \left( l - \frac{x}{2} \right)^2 - \frac{wl}{2} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \right\} dx \\
 & + \frac{\kappa}{EI} \int_{l-a_1}^l \left\{ \frac{(P-wl)}{4} x^2 - \frac{M_y}{2} x \right\} dx \\
 & + \frac{\kappa}{EI} \int_1^{l+a_2} \left\{ P \left( l - \frac{x}{2} \right)^2 - \frac{wl}{2} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \right. \\
 & \left. - M_y \left( l - \frac{x}{2} \right) \right\} dx \\
 & = \frac{(2P-3wl)l^3}{12EI} + \frac{\kappa}{EI} \left[ -\frac{P-wl}{2} \{ l^3 - (l-a_1)^3 \} \right. \\
 & \left. - \frac{M_y}{4} \{ l^2 - (l-a_1)^2 \} \right. \\
 & \left. + P \left\{ l^2 b_1 - \frac{l(l+b_1)^2 - l^3}{2} - \frac{(l+b_1)^3 - l^3}{12} \right\} \right. \\
 & \left. - \frac{wl}{2} \left\{ \frac{l(l+b_1)^2 - l^3}{2} - \frac{(l+b_1)^3 - l^3}{6} \right\} \right. \\
 & \left. - M_y \left\{ l b_1 - \frac{(l+b_1)^2 - l^2}{4} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

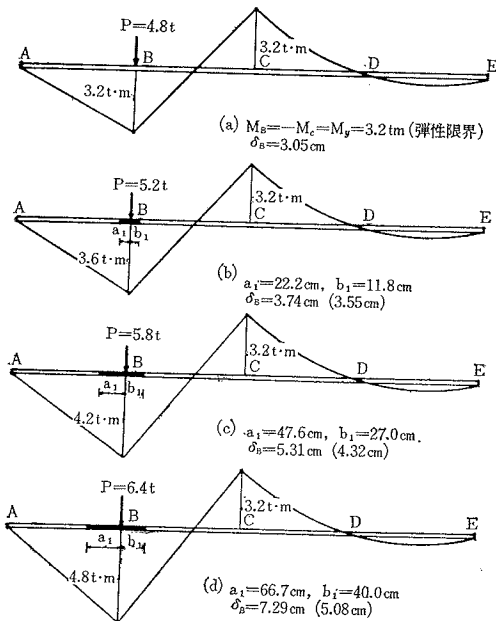
ここで上式の第1項は弾性たわみを表わし  $\delta = 4.57$  cm となり、第2項以下を含めた弾塑性たわみは式(47) および諸値を代入して  $\delta = 5.94$  cm をうる。

なお、等分布荷重  $w = 0.8$  t/m で一定値に止め、集中荷重  $P$  を漸増させたとき、その崩壊過程は図-19 に示すごとくなる。

(2) 図-20 のごとき連続ばりが等分布荷重  $w = 4 M_y/l^2$  と集中荷重  $P$  とを受けて、中央に  $0.1l$  だけ塑性領域を生じた状態における集中荷重  $P$  とそのときの曲げモーメント図を求める。

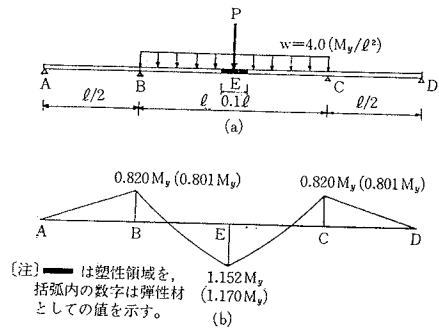
はり AB 材に式(42d)を、BC 材に  $a_{i=1,2} = b_{i=1,2} =$

図-19 崩壊過程



(注) — は塑性領域を、括弧内の数字は弾性材としての値を示す。

図-20



$c_2 = d_2 = 0$  として式(43)を適用し、剛比をそれぞれ  $k_{AB} = 2, k_{BC} = 1$  とすれば、対称性より左半分に着目して次式をうる。

$$M_{AB} = 2 \times 1.5 \phi_B = 3 \phi_B$$

$$M_{BC} = (\alpha_{BC} - \beta_{BC}) \phi_B + \xi_c M_{yc} + \xi_d M_{yd} + C_{BC}$$

ここで諸係数を  $c_1 = d_1 = 0.05l, l_1 = l_2 = l/2$  として表-3より算出すれば、次値をうる。

$$\alpha_{BC} = 1.88, \beta_{BC} = 1.11, \xi_c = 0.138, \xi_d = 0.093$$

また荷重項  $C_{BC}$  は、まず表-4より  $C_1 (= C_2)$  を算出すれば、

$$C_1 = 0.0604 wl^2 + 0.0981 Pl$$

よって  $w = 4 M_y/l^2$  と  $\nu_2 = 0.65$  を代入して

$$C_{BC} = -C_1 \nu_2 = -0.371 M_y - 0.151 Pl$$

さらに  $M_{yc} = M_{yd} = +M_y$  を用うれば、上記  $M_{BC}$  は結局つぎの内容となる。

$$M_{BC} = 0.769 \phi_B - 0.141 M_y - 0.151 Pl \dots (49)$$

B 点の節点方程式  $M_{BA} + M_{BC} = 0$  に式(48)と式(49)とを代入して次式をうる。

$$3.77 \phi_B - 0.151 Pl = 0.141 M_y \dots (50)$$

一方弾塑性境界条件より

$$\begin{aligned}
 M_{yc} = M_y = \frac{1}{2} (Pl + wl^2) \left( 0.5 - \frac{c_1}{l} \right) \\
 + M_{BC} - \frac{wl^2}{2} \left( 1 - \frac{c_1}{l} \right)^2
 \end{aligned}$$

上式に式(49)および  $w = 4 M_y/l^2, c_1 = 0.05l$  を代入すれば、

$$0.769 \phi_B + 0.074 Pl = 0.646 M_y \dots (51)$$

式(50)と式(51)とを連立に解いて

$$\phi_B = 0.273 M_y, P = 5.89 M_y$$

よって式(48)と式(49)より

$$M_{BA} = 0.820 M_y, M_{BC} = -0.820 M_y$$

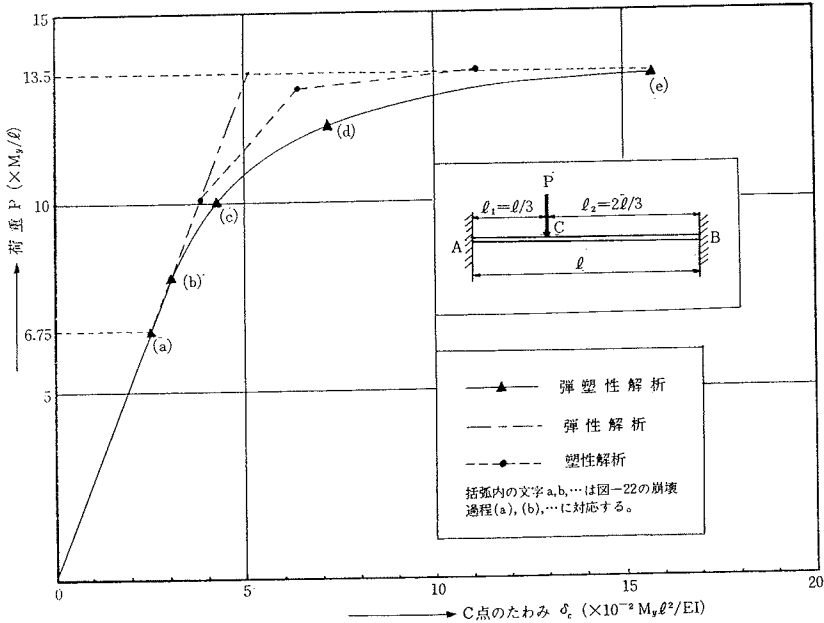
また E 点の曲げモーメントは

$$M_E = \frac{wl^2}{8} + \frac{Pl}{4} + M_{BC} = 1.15 M_y$$

以上より所要の曲げモーメント図は図-20(b)のごとくなる。

(3) 図-21のごとき長方形断面の両端固定ばりが、

図-21 荷重-たわみ曲線



集中荷重  $P$  を受けて崩壊するまでの荷重  $P$  と  $C$  点のたわみ  $\delta_c$  との関係を求めればつぎのとおりである。

(i) 初期降伏荷重の算定

まず弾的に解くと次値をうる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AC} &= -4 Pl/27 \\ M_{CA} &= -8 Pl/81 \\ M_{BC} &= 2 Pl/27 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

A 端の曲げモーメントの絶対値が最大であるから、A 端の断面が最初に  $M_y$  に達する。よって初期降伏荷重  $P_0$  は  $M_{AC} = -M_y$  とおくことにより  $P_0 = 6.75 M_y/l$  が求まり、曲げモーメント図は図-22 (a) のごとくえられる。

(ii) A 端に引き続き C 点に塑性領域が生ずる場合荷重を  $P_0$  より大きい  $P_1$  にすれば A 端に引き続き C 点にも塑性領域が生ずるゆえ、式 (43) を

$$a_2 = b_1 = b_2 = c_2 = d_2 = 0$$

としてそのまま適用すればよいが、ここでは C 点に塑性ヒンジが形成されることをあらかじめ想定し、はり AB を AC と CB に分けて考え、それぞれの剛比を  $k_{AC} = 2$  および  $k_{CB} = 1$  として各部材に式 (42 a) を適用すれば、端モーメントはつぎのごとく表わされる。

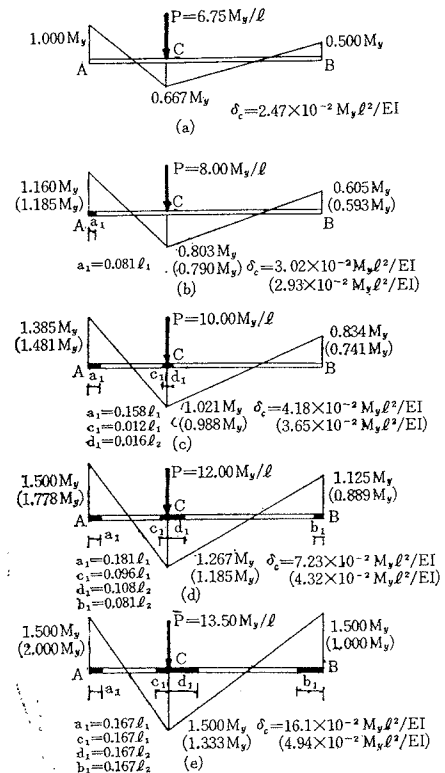
$$\left. \begin{aligned} M_{AC} &= 2(\beta_{AC}\phi_C + \gamma_{AC}\psi_{AC}) + \xi_a M_{ya} + \xi_c M_{yc} \\ M_{CA} &= 2(\alpha_{CA}\phi_C + \gamma_{CA}\psi_{AC}) + \eta_a M_{ya} + \eta_c M_{yc} \\ M_{CB} &= 1(\alpha_{CB}\phi_C + \gamma_{CB}\psi_{CB}) + \xi_d M_{yd} \\ M_{BC} &= 1(\beta_{BC}\phi_C + \gamma_{BC}\psi_{CB}) + \eta_d M_{yd} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

しかるに  $\psi_{CB} = -0.5 \psi_{AC}$  で未知数は  $\phi_C$  と  $\psi_{AC}$  となり、条件式は節点 C における曲げモーメントおよび

せん断力のつりあい式として次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} M_{CA} + M_{CB} &= 0 \\ M_{AC} + M_{CA} - 0.5(M_{CB} + M_{BC}) &= -Pl/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

図-22 崩壊過程



[注] 厚線は塑性領域を、括弧内の数字は弾性材としての値を示す。



表-5

$\varphi_c$	$\psi_{AC}$	右 辺
$2\alpha_{CA} + \alpha_{CB}$	$2\tau_{CA} + \tau_{CB}$	$(\eta_a - \eta_c - \xi_d) M_y$
$2(\beta_{AC} + \alpha_{CA}) - 0.5(\alpha_{CB} + \beta_{CB})$	$2(\tau_{AC} + \tau_{CA}) + 0.25(\tau_{CB} + \tau_{BC})$	$(\xi_a - \xi_c + \eta_a - \eta_c + 0.5\xi_d + 0.5\eta_d) M_y - Pl/3$

表-6

$\varphi_c$	$\psi_{AD}$	右 辺
$2\alpha_{CA} + \alpha_{CB}$	$2\tau_{CA} - 0.5\tau_{CB}$	$(\eta_a' - \eta_c' - \xi_d + \xi_b + 1.5\beta_{AC}') M_y$
$2\alpha_{CA} - 0.5(\alpha_{CB} + \beta_{BC})$	$2\tau_{CA} + 0.25(\tau_{CB} + \tau_{BC})$	$(\eta_a' - \eta_c' + 1.5\beta_{AC}' + 0.5(\xi_d - \xi_b + \eta_d - \eta_b) + 1.5) M_y - Pl/3$

式(54)に式(53)を代入すれば表-5のごとき連立方程式がえられ、また塑性領域  $a_1, c_1, d_1$  は式(45)などより次式となる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{M_{AC} + M_y}{M_{AC} + M_{CA}} l_1, & |M_{AC}| > M_y \\ c_1 &= \frac{M_{CA} + M_y}{M_{AC} + M_{CA}} l_1, & |M_{CA}| > M_y \\ d_1 &= \frac{M_{CB} - M_y}{M_{CB} + M_{BC}} l_2, & |M_{CB}| > M_y \end{aligned} \right\} \dots(55)$$

なお、C点のたわみ  $\delta_c$  は表-5の連立方程式を解けばつぎのごとく求められる。

$$\delta_c = R_{AC} l_1 = -\frac{\psi_{AC} l^2}{27 EI} \dots\dots\dots(56)$$

以上の諸式と表-5より所要の解をうるが、その手法をいま  $P=8.0 M_y/l$  の場合について行なえばつぎのごとくなる。

式(52)に  $P=8.0 M_y/l$  を代入して、曲げモーメントの第1次近似値がつぎのごとくえられる。

$$M_{AC} = -1.185 M_y$$

$$M_{CA} = -0.791 M_y$$

$$M_{BC} = 0.593 M_y$$

したがってA端のみに塑性領域が生じていることがわかり、式(55)より  $a_1=0.094 l_1, c_1=d_1=0$  がえられ、これを用いて各形状項を算出すればつぎのごとくなるが、図表-1~5より読み取っても1桁ぐらいの精度の低下を認めれば、十分利用できることが了解されるであろう。

すなわち、

$$\alpha_{CA} = 1.789, \quad \beta_{AC} = 0.543, \quad \tau_{AC} = 0.519,$$

$$\tau_{CA} = 0.777, \quad \xi_a = 0.529, \quad \eta_a = 0.244,$$

$$\alpha_{CB} = 2.0, \quad \tau_{CB} = 1.0, \quad \xi_d = 0,$$

$$\beta_{BC} = 1.0, \quad \tau_{BC} = 1.0, \quad \eta_d = 0$$

これらを表-5に代入して連立に解けばつぎの値をうる。

$$\varphi_c = 0.198, \quad \psi_{AC} = -0.815$$

よって式(53)より曲げモーメントの第2次近似値が下記のごとくえられる。

$$M_{AC} = -1.160 M_y$$

$$M_{CA} = -0.803 M_y$$

$$M_{BC} = 0.605 M_y$$

これを再び式(55)に代入して  $a_1=0.082 l_1$  を算出し、以下これをくり返すことにより、最終的に図-22(b)に示す曲げモーメント図をうる。

$P=10.0 M_y/l$  の場合についても、同じ手法で計算すれば曲げモーメント図は図-22(c)に示すごとき収斂値となる。

(iii) A端に塑性ヒンジが形成される場合

さらに荷重が増加すると、A端の曲げモーメントが  $M_P$  に達し、A端に塑性ヒンジが形成される。

すなわちAC材には式(42c)を  $M_{PA} = -1.5 M_y$  とおき、CB材には式(42a)を適用すれば次式をうる。

$$M_{AC} = -1.5 M_y$$

$$M_{CA} = 2(\alpha_{CA}' \varphi_c + \tau_{CA}' \psi_{AC}) + (\eta_c' - \eta_a' - 1.5 \beta_{AC}') M_y$$

$$M_{CB} = 1(\alpha_{CB} \varphi_c + \tau_{CB} \psi_{CB}) + (\xi_d - \xi_b) M_y$$

$$M_{BC} = 1(\beta_{BC} \varphi_c + \tau_{BC} \psi_{CB}) + (\eta_d - \eta_b) M_y$$

これらを式(54)に代入すれば、表-6がえられる。また塑性領域  $b_1$  は弾塑性境界条件より次式となる。

$$b_1 = \frac{M_{BC} + M_y}{M_{CB} + M_{BC}} l_2, \quad |M_{BC}| > M_y$$

以上の諸式ならびに表-6を用いて  $P=12.0 M_y/l$  の場合を算出すれば図-22(d)の結果となる。

(iv) A端についてC点にも塑性ヒンジが形成される場合

AC材の両端モーメントをいずれも塑性モーメントとし、CB材に式(42c)を適用すれば次式となる。

$$M_{AC} = -M_P = -1.5 M_y$$

$$M_{CA} = -M_P = -1.5 M_y$$

$$M_{CB} = +M_P = 1.5 M_y$$

$$M_{BC} = \tau_{BC}' \psi_{CB} + (\eta_d' - \eta_b' + 1.5 \beta_{CB}') M_y \dots\dots\dots(57)$$

よって上式を式(54)の第2式に代入すれば次式をうる。

$$\psi_{AC} = \frac{1}{0.25 \tau_{BC}'} \left[ -\frac{Pl}{3} + \{0.75(5 + \beta_{CB}') + 0.5(\eta_d' - \eta_b')\} M_y \right] \dots\dots\dots(58)$$

さらに荷重が増加して B 端もまた塑性ヒンジになる場合には、式 (57) において  $M_{BC}=M_P=1.5 M_y$  となり、式 (58) の代りに次式をうる。

$$\psi_{AC} = \frac{M_y}{0.57BC'} [\eta d' - \eta b' - 1.5(1 - \beta C'B)] \dots\dots\dots(59)$$

よって式 (59) を式 (56) に代入すれば、崩壊荷重時におけるたわみ  $\delta_C=16.1 \times 10^{-2} M_y l^2/EI$  をえ、また式 (58) と式 (59) とを等置すれば、崩壊荷重  $P_P=13.5 M_y/l$  をうる。

本例について、塑性解析<sup>12)</sup>より算定した荷重とたわみとの関係を図-21 に併記したが、崩壊荷重は当然合致するも、たわみは一般に過小評価となっており、崩壊荷重時においては  $\delta_C=11.1 \times 10^{-2} M_y l^2/EI$  で約 30% 危険側となることが認められる。

(4) 図-23 (a) に示すごと き門型ラーメンの中央 E 点に、集中荷重  $P=9.0 M_y/l$  が作用するときの曲げモーメント図および荷重点のたわみを求め、さらに崩壊荷重時までを追跡する。ただし部材の断面は長方形( $\alpha=3$ ) とする。

まず弾性的に解けば、

$$\begin{aligned} M_A &= Pl/20 = 0.450 M_y \\ M_B &= Pl/10 = 0.900 M_y \\ M_E &= 3 Pl/20 = 1.350 M_y \end{aligned}$$

となり、中央 E 点の断面が弾性限を越えていることがわかる。したがって式 (45) などより塑性領域を算定し、BC 材に  $a_{i=1,2}=b_{i=1,2}=c_2=d_2=0$  として式 (43)

表-7

$M_A/M_y$	$M_B/M_y$	$M_E/M_y$	$c_1/l$
0.450	0.900	1.350	0.089
0.472	0.945	1.306	0.068
0.474	0.949	1.301	0.067
0.474	0.949	1.302	0.067

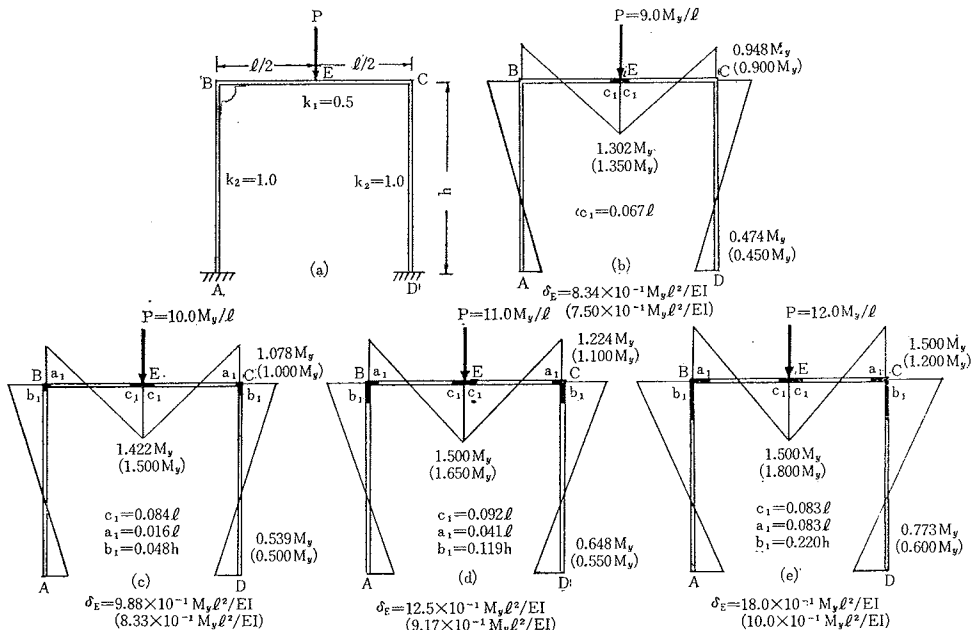
を、BA 材に式 (42 d) を適用し、B 点における節点方程式  $M_{BA}+M_{BC}=0$  に代入することにより、8. (1) (ii) の計算手法によりくり返し演算の結果 表-7 をえ、曲げモーメント図は 図-23 (b) のごとく求められる。また荷重点 E のたわみは式 (9) と式 (14) とを適用して  $\delta_E=8.34 \times 10^{-1} M_y l^2/EI$  となる。

さらに崩壊荷重時までを追跡するには 9. (3) に準ずればよく、結果は 図-23 (c), (d), (e) に示すごとくなる。

### 10. 結 語

本論文は直線材鋼構造の弾塑性挙動を解明するため、その基礎としてまずエネルギー等置法により  $M-\phi$  曲線を  $M-\phi$  近似直線で置換したうえで、補正エネルギーの実用式を弾性と同じ簡単な  $M$  の 2 次式として誘導し、ついで変分原理いわゆる Complementary Minimum Principle を適用して、弾塑性分野における補正エネルギー法の実用化を試み、各種静定ばりを対象とする弾塑性解析を行なって、厳密解あるいは塑性解析との比較検討を行ない、その実用性を確認した。さらに不静定構造物に対しては“弾塑性たわみ角式”を誘導し、もって弾

図-23



[注] — は塑性領域を、括弧内の数字は弾性材としての値を示す。

性解析におけるたわみ角法に準ずる不静定構造物の弾塑性解析を可能ならしめ、実用解法としての  $M-\phi$  第1近似直線の場合のたわみ角式諸係数の図表を作成して実用に供しようごとくした。

本法の特色を要約すればすでに各節でも指摘してきたごとく、第1に任意形状断面をもつ部材および任意荷重を受ける部材に適用しうる普遍性、第2に在来の塑性解析を凌駕する高精度、第3に慣用の弾性解析に準じた計算手法の簡易性などである。また本法と同じ考察過程で変断面部材をも取り扱うのみならず、さらには弾塑性領域における曲げモーメントと軸方向力を加味した補正エネルギー式の誘導も可能となり、これより折線部材やアーチ部材に対する弾塑性解析も行ないうるなど理論の応用面での多様性が認められ、これが第4の特色を形成し、アーチ部材に対する応用研究<sup>13)</sup>が目下進行中である。

ラーメンの崩壊荷重は塑性解析によっても算出可能であるが、塑性領域の発生より崩壊に至る過程の応力およびたわみを算定するためには、当然本法によらねばならず、塑性解析の創始者といわれる Van Den Broek<sup>14)</sup>も“Any design theory that does not provide the means of determining the deformations corresponding to any given load up to the ultimate one is incomplete and questionable”と述べて弾塑性解析の重要性を早くより認めているが、全く同感というべく本研究の価値もまたそこにある。

#### 参考文献

- 1) Nadai, A. : Theory of Flow and Fractures of Solids, Engineering Societies Monographs, Vol. II, McGraw Hill, 1963.
- 2) Westergaard, H.M. : On the Method of Complementary Energy and Its Application to Structures Stress beyond the Proportional Limit, to Buckling and

Vibrations, and to Suspension Bridges, Proc. A.S.C.E., Feb., 1941.

- 3) Brown, E.H. : The Energy Theorems of Structural Analysis, Engineering, Vol. 179, March, 1955.
- 4) Rawlings, B. : Energy Relationships in Plastic Steel Structures, Trans. A.S.C.E., Vol. 128, Part II, 1963.
- 5) Langhaar : Energy Method in Applied Mechanics, Wiley, 1962.
- 6) Gerstle, K.H. : Deflection of Structures in the Inelastic Range, Jour. of the Eng. Mech. Div., Proc. A.S.C.E., Vol. 83, July, 1957.  
Gerstle, K.H. : Elastic-Plastic Deformation of Steel Structures, Jour. of the St. Div., Proc. A.S.C.E., Vol. 89, Feb., 1963.
- 7) Gerden, R.J.P. : Analysis for Moments and Deflections in the Elastic-Plastic Range, Proc. of Inst. of C.E., Vol. 16, June, 1960.
- 8) Yang, C.H., Knudsen, K.E., Weiskopf, W.H. 外 : Plastic Strength and Deflections of Continuocs Beams, Progress Report No. 9, The Welding Journal, Vol. 32, May, 1953.
- 9) 山田孝一郎 : 撓角法形式による骨組の弾塑性解析とその応用, 日本建築学会論文集 80号, 81号, 昭和37年12月, 昭和38年1月.
- 10) 山崎・太田 : 塑性解析に拡張したエネルギー法, 第19回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和39年5月.  
山崎・太田・速水 :  $M-\phi$  第2近似直線を用いた弾塑性補正エネルギー法について, 第20回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和40年5月.
- 11) 山本善之 : 弾性・塑性, 朝倉書店, 1961.
- 12) たとえば Neal, B.G. : The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman & Hall, London, 2nd edition, 1963.
- 13) 山崎・石川 : 連続アーチの弾塑性解析, 第19回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和39年5月.  
山崎・石川・黒木 : エネルギー法による固定アーチの弾塑性解析, 第21回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和41年5月.
- 14) J.A. Van den Broek : Theory of Limit Design, John Wiley and Sons, 1948.

(1965.12.1, 1966.1.31 受付)