変形の表現について

ON REPRESENTATIONS OF LARGE DEFORMATION

佐武正雄*
By Masao Satake

要　旨　変形の大きい場合にも適用できる連続体の変形の表現方法について述べたものである。変形の大きい，いわゆる有限変形の場合には変形を表現する量も多様となるが，それらの量の定義，相互関係などについて記し考察を加えた。有限変形の表現においては，変換テンソル$\boldsymbol{J}$が基礎となっており，面素，体素の変換，ひずみの諸量などすべて$\boldsymbol{J}$を基礎として表現される。また，$\boldsymbol{J}$の積分解$\boldsymbol{J}=\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{R}$と無限小変換の和分解

$$(D\boldsymbol{\Phi})=(DE)-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times(DW)$$

との対応や，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$を用いる変形の分類などについて述べる。

1. まえがき

従来，変形の小さい弾性論の場合のみならず塑性論のように変形の大きい場合でも，変形を示す量としては微小変形理論のひずみが主として用いられてきた。また，作用する荷重，内部応力などは変形を起こさない前の状態で考え，変形によるこれらの量の移動，変化の影響はすべて高次の無限小として省略して解析が行なわれることが多かった。しかし，近年変形の大きい材料（高分子材料や土など）の力学的解析が行なわれるようになり，同時に steel などについても塑性域まで拡げた力学的性状の研究が行なわれるようになってくると，変形を示す量として従来の微小変形理論の枠内ではどうしても不十分となり，変形の大きい有限変形の場合の表現が当然必要なものとなってくる。しかし，有限変形の場合には，微小変形の場合に同一視されたものでも区別しなければならなくなるので，変形を示す量はきわめて多様となり，もしその内容を正しく理解しないで用いると，問題の複雑化や混乱を生じるおそれもあるように思われる。

この方面の研究は，主として有限変形弾性理論の研究として，Seth[2),8)], Murnaghan[4),9)], Rivlin[6)], 吉村[11)~13)]らによって進められ，それぞれ個別的であるが特長のある先駆的研究がなされてきた。まず Seth のものは微小変形弾性法則のひずみを単に有限ひずみにおきかえたもので，この点合理性には乏しいように思われる。Murnaghan のものは，記述がかなり複雑であるが，変換テンソルの積分解に着目している点などきわめて示唆に富むものと考えられる（しかし，弾性法則は微小変形弾性法則を拡張した逐次近似解法にとどまっている)。Rivlin は有限変形弾性法則について詳細な解析を行ない，特に従来の微小変形弾性法則にとらわれず，Mooney[5)] の研究などによる弾性エネルギーの形をもとにした弾性法則を導いている点，非圧縮性の場合の巧みな取り扱い方を与えている点など新しい有限変形理論の方向を与えるもののように考えられる。吉村は以上のものと異なり，一貫した dyadic 記法を用いて，まずひずみの概念を明確に与え，それによって弾性法則や塑性理論の解析を行おうとしている。弾性法則自体は微小変形理論からの類推によるもので問題があるように思われるが，dyadic 記法を用いて，きわめて見通しよい明解な取り扱いをされている点は他に類がなくすぐれていると思われる（本論文の記法も主として吉村博士の手法をうけついでいる)。以上は有限変形弾性理論の研究の主要なものであるが，この他にも多くの研究がなされており[14)]，同一の問題に対してこのように多様で内容の異なった研究が行なわれてきた主な原因は，変形を表現する量が多様であって適確な定義や相互関係が明らかにされていなかったこと，それらの量の力学的本質が十分把握されず正確な用い方がなされなかったことなどに原因があるように考えられる。一方，変形を示す量に関する数学的研究として個々にはすぐれたもの[3),7)]があり，また近年，Truesdell[10)]，Prager[15)]，Sedov[16)]などにより流体も含めた連続体の統一的研究も発表されるようになった。しかし，これらにおいても変形の表現に関してはまだ十分解明されているとはいえず，記法も統一されていないように思われる。

本論文は以上の観点から，有限変形に適用できる変形の表現について，できる限り詳細な検討を行なって，各種の量のもつ意義や関係を明らかにしようとしたものである。また同時に有限変形弾性理論や塑性理論の研究の基盤を与えようと試みたものであるが，弾性法則などの力学的考察については改めて論ずることにしたいと考えている。なお本文で用いている微分幾何学の用語などについては文献 17) 18) などを参照されたい。またテンソルの記法としては，主として symbolic 記法（dyadic 記法)*を用いている。

*　正会員　工博　東北大学助教授　工学部土木工学科

*　Appendix 1 参照。

2. 変位の表現

物体の変形を考える場合，その物体に固定された任意の点の変位を示す量が基礎となる。そこで，まず変位の表現をつぎの3通りの方法について考察する。

1) Euler 表現 (*spatial* 表現)*

空間に固定された基準の Descartes 座標を x^i $(i=1, 2, 3)$ とし，一つの曲線座標

$$r^\kappa(x^i)=C^\kappa \quad (\kappa=1, 2, 3) \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

を導入する。物体のある点の変形前後における位置 $\underset{0}{P}$, P の座標をそれぞれ $(\underset{0}{C^\kappa})$, (C^κ) とする**とき，その点の変位は,

$$U^\kappa=C^\kappa-\underset{0}{C^\kappa} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

で示される。座標系 κ として Descartes 座標系 i そのものを用いることも多く，その場合に限って U^i はベクトル成分となるが，一般には，$\underset{0}{P}$ と P とで自然標構が変化しており，U^κ を $\underset{0}{P}$ または P に配置されたベクトルの成分として取り扱うことはできない。U^κ は変形のパラメーターおよび初期位置 $\underset{0}{C^\kappa}$ (または終局位置 C^κ) の関数であって，それらについて特別の点以外では必要な回数の微分可能性を仮定しておくことにする。

2) Lagrange 表現 (*material* 表現)

物体に一つの座標系 κ を固定して考える (これを *material coordinates* という)。したがって変形前後の位置 $\underset{0}{P}$, P は同一の座標 C^κ で表わされ，その差によって変位の表現をうることはできない。この場合，変形の性質は座標系 κ の変化 (関数形 r^κ や計量テンソルの変化など) によって解析されることになる。

3) 変位ベクトル

空間の適当な位置に原点となる不動点 O を設定し,

$$\underset{0}{\boldsymbol{r}}=\overrightarrow{O\underset{0}{P}}, \quad \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

とおく。$\underset{0}{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}$ は $\underset{0}{P}, P$ の位置ベクトルで，その差により変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\underset{0}{\boldsymbol{r}}=\overrightarrow{\underset{0}{P}P} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

と定義する (図—3 参照)。$\boldsymbol{u}$ は原点 O の選択に関係なく定まるもので，$\underset{0}{P}$ (または P) に配置されたベクトル場と考えることができる。変位は linear に加算することができ，可換性が成り立つ。

$$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

* Appendix 1 参照。最近の連続体の力学では，Euler, Lagrange 表現というより spatial, material 表現という言葉の方が多く用いられる。なお，Truesdell によれば，Euler, Lagrange 表現という名称は誤まって用いられているという (文献 10) p. 139 脚注)。

** 同一の物体点 *particle* も変形の過程で異なった位置 *place* を占める。subscript 0 は変形前の位置に関するものであることを示す。

つぎに，変位に関連するものとして，二，三の重要な事柄を説明する。

1) 変位速度，無限小変位

U^κ は一般にベクトル成分ではないが，時間を t として

$$v^\kappa=\frac{D}{Dt}U^\kappa=\frac{D}{Dt}C^\kappa \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)^*$$

とおけば，v^κ は変形中のある位置 P に配置された一つのベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分と考えることができる。なぜなら，その点の自然標構を $\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}$ とすれば,

$$v^\kappa\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}=\frac{D}{Dt}C^\kappa\frac{\partial}{\partial C^\kappa}\boldsymbol{r}=\frac{D}{Dt}\boldsymbol{r}=\frac{D}{Dt}\boldsymbol{u} \quad \cdots(2.7)^{**}$$

とかけるからである。$\boldsymbol{v}$ を変位速度 (または流速) といい，$D\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}Dt$ を無限小変位 *infinitesimal displacement* という。これに対し，前記 U^κ は有限変位 *finite displacement* と称する。明らかに,

$$\boldsymbol{u}=\int_0^t \boldsymbol{v}Dt=\int_0^t v^\kappa\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}Dt \cdots\cdots\cdots\cdots(2.8)$$

$$U^\kappa=\int_0^t v^\kappa Dt \cdots\cdots\cdots\cdots(2.9)$$

で，これによって，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ と有限変位 U^κ との差異が明白となる。簡単な例として図—1 に示す回転運動について述べればつぎのようになる。

極座標 $r^\kappa=(r, \theta)$ を用い，初期位置を $(r, 0)$, $\theta=\omega t$ とすれば,

$$U^\kappa=(r, \theta)-(r, 0)=(0, \omega t)$$

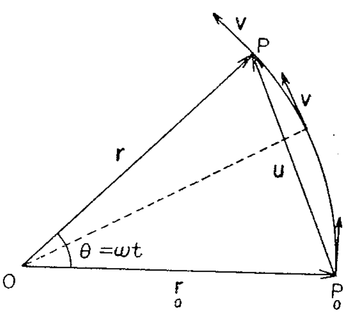
$$\therefore \quad v^\kappa=\frac{D}{Dt}U^\kappa=(0, \omega)$$

この場合

$$\underset{2}{\boldsymbol{e}}=\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{r}=\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta, \ r\sin\theta)$$

$$=(-r\sin\omega t, \ r\cos\omega t)$$

図—1



* 一つの物体点に固定した量の，時間とか変形のパラメーターに関する微分を示す場合は，位置に関する微分 d と区別して符号 D を用いることにする (なお，Appendix 2 参照)。

** 一つの項に上下同一の指標が現われる場合は，Einstein の規約にしたがい，その指標について総和をとるものとする。たとえば,

$$v^\kappa\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}=\sum_\kappa v^\kappa\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}=v^1\underset{1}{\boldsymbol{e}}+v^2\underset{2}{\boldsymbol{e}}+v^3\underset{3}{\boldsymbol{e}}$$

であるから（ただし，ベクトルの成分は空間の Descartes 座標に関するものを示す。以下同様），

$$\boldsymbol{v}=v^{\kappa}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}=(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)$$

$$\int_0^t \boldsymbol{v}Dt=\int_0^t(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)Dt$$

$$=[(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)]_0^t=\boldsymbol{r}-\underset{0}{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{u}$$

となる。ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ は図に示すとおりである。

2) 流 線 座 標

流速 $\boldsymbol{v}$ の場は一般に時間とともに変化するが，時間によって変化しない場合はいわゆる定常流（定常変形）で，流線と変位の軌跡（trajectory）とが一致することになる。

流線の方程式

$$d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=0 \quad\cdots\cdots(2.10)$$

の解が Cauchy の条件の下に，

$$R^{\kappa}(x^i)=C^{\kappa}\quad(\kappa=2,\ 3)\quad\cdots\cdots(2.11)$$

と書けるとする。いま，変位（流れ）の状況が Euler 表現（式 (2.1)）で時間 t をパラメーターとして

$$C^{\kappa}=C^{\kappa}(\underset{0}{C^{\kappa}},\ t)\quad\cdots\cdots(2.12)$$

と示されており，これを逆に解いて，

$$\underset{0}{C^{\kappa}}=\overset{-1}{C^{\kappa}}(C^{\kappa},\ t)\quad\cdots\cdots(2.13)$$

と与えることができるとしよう。初期状態で点 C^{κ} が

$$f(\underset{0}{C^{\kappa}})=0\quad\cdots\cdots(2.14)$$

の1曲面上にあったとすれば，時刻 t では，

$$f\{\overset{-1}{C^{\kappa}}(C^{\kappa},\ t)\}=f\{\overset{-1}{C^{\kappa}}(r^{\kappa},\ t)\}=0\quad\cdots\cdots(2.15)$$

の曲面上にあることになる。式 (2.15) の左辺は t を含んでいるので，implicit に t をパラメーターとする曲面群を示すと考えられる。式 (2.11) と (2.15) とを組み合わせて一つの曲線座標を作れば，時刻 $t_1\to t_2$ の間の有限変位は，

$$U^{\kappa}=(t_2-t_1,\ 0,\ 0)\quad\cdots\cdots(2.16)$$

と示されることになる。このような曲線座標を流線座標と呼ぶ。流線座標を用いるときは，変位を1次元的に取り扱うことができるので便利である。

3．線素の変換，変換テンソル

物体の任意の点 P に任意の方向の微小線素 $d\boldsymbol{r}$ を考える。この微小線素が変形前 $d\underset{0}{\boldsymbol{r}}$，変形後 $d\boldsymbol{r}$ であるとし，

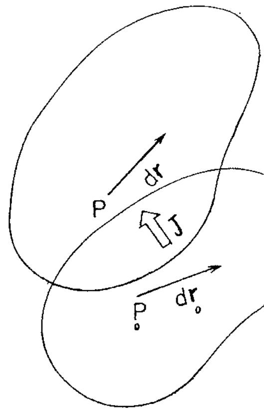
$$d\boldsymbol{r}=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}\quad\cdots\cdots(3.1)$$

とおく*。$\boldsymbol{J}$ は $\underset{0}{P}$ に（$\boldsymbol{J}^{-1}$ は P に）配置されたテンソルと考える。変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ が式 (2.4) に示すように差の形で定義されているのに対し，$\boldsymbol{J}$ は $d\boldsymbol{r}$ と $d\underset{0}{\boldsymbol{r}}$ の比の形で定義されていることに注意する。

material 表現では，自然標構

* Appendix 1 参照。

図—2



$$\underset{0}{\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}}=\frac{\partial}{\partial C^{\kappa}}\underset{0}{\boldsymbol{r}},\quad \underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}=\frac{\partial}{\partial C^{\kappa}}\boldsymbol{r}\quad\cdots\cdots(3.2)$$

を用いると，

$$d\underset{0}{\boldsymbol{r}}=dC^{\kappa}\underset{0}{\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}},\quad d\boldsymbol{r}=dC^{\kappa}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\quad\cdots\cdots(3.3)$$

と記すことができるから，式 (3.1) より

$$\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}=\underset{0}{\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}}\cdot\boldsymbol{J}=J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{\lambda}\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{\overset{\lambda}{0}}\underset{0}{\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}}\quad\cdots\cdots(3.4)$$

$$\boldsymbol{J}=\overset{\underset{0}{\kappa}}{\boldsymbol{e}}\,\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\quad\cdots\cdots(3.5)$$

となる。これらより，まず

$$J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{\lambda}=\delta_{\kappa}{}^{\lambda}\quad\cdots\cdots(3.6)$$

であることがわかる。また，$J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{\overset{\lambda}{0}}$ は material 表現による一つの物体点の変形前後の自然標構の変換マトリックスになっている。この意味で $\boldsymbol{J}$ を変換テンソル *transformation tensor* と呼ぶ。$\boldsymbol{J}$ は時間と位置との関数であるが，同時刻，同位置においては $d\boldsymbol{r}$ の方向に関係なく定められることが重要である。

$\boldsymbol{J}$ については，その定義からさらにつぎのような諸式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{J}=\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{J}^{-1}=\nabla\underset{0}{\boldsymbol{r}}\\&\underset{0}{\nabla}=\boldsymbol{J}\cdot\nabla=\nabla\cdot{}^{t}\boldsymbol{J}\\&\nabla=\boldsymbol{J}^{-1}\cdot\underset{0}{\nabla}=\underset{0}{\nabla}\cdot{}^{t}\boldsymbol{J}^{-1}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3.7)^{*}$$

* 位置に関する微分 d は，曲線座標 κ における共変微分係数 (covariant derivative) の演算子を ∇_{κ} で示せば，たとえば一つの量 $X=X^{\kappa}{}_{\lambda}\underset{\kappa}{e}\overset{\lambda}{e}$ について

$$dX=dC^{\kappa}\left[\partial_{\kappa}X^{\lambda}{}_{\mu}+\begin{Bmatrix}\lambda\\\kappa\rho\end{Bmatrix}X^{\rho}{}_{\mu}-\begin{Bmatrix}\rho\\\kappa\mu\end{Bmatrix}X^{\lambda}{}_{\rho}\right]\underset{\lambda}{e}\overset{\mu}{e}$$

$$=dC^{\kappa}\nabla_{\kappa}X^{\lambda}{}_{\mu}\underset{\lambda}{e}\overset{\mu}{e}=d\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{X}$$

とかける。したがって，記号的に

$$d=d\boldsymbol{r}\cdot\nabla=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\underset{0}{\nabla}$$

と記すことができる。なお，$\boldsymbol{J}^{-1}$, ${}^{t}\boldsymbol{J}$ はそれぞれ $\boldsymbol{J}$ の逆テンソル，転置テンソルを示す。

$\boldsymbol{J}$ は一般に対称テンソルであるとは限らない。$\boldsymbol{J}$ の分解は重要であり，それについては後述することにして，$\boldsymbol{J}$ の他の二，三の性質について述べておく。

1）変位ベクトルとの関係

$$\boldsymbol{r}=\underset{0}{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{u}$$

であるから，

$$d\boldsymbol{r}=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}+d\boldsymbol{u}=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{I}+\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u})\quad(\boldsymbol{I}\text{ は単位テンソル})$$

したがって

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{I}+\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}\quad\cdots\cdots(3.8)$$

を得る。同様に $d\underset{0}{\boldsymbol{r}}=d\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{I}-\nabla\boldsymbol{u})$ から

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\boldsymbol{I}-\nabla\boldsymbol{u}\quad\cdots\cdots(3.9)$$

となる。

2）相　乗　性

1 点の微小線素が，変形の進行に伴って $d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\to d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\to d\underset{2}{\boldsymbol{r}}$ と変化するとき，

$$d\underset{1}{\boldsymbol{r}}=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_1,\quad d\underset{2}{\boldsymbol{r}}=d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_2$$

とおけば，

$$d\underset{2}{\boldsymbol{r}}=(d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_1)\cdot\boldsymbol{J}_2=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{J}_2)\quad\cdots\cdots(3.10)$$

となり相乗性をもつ。しかし，一般に

$$\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{J}_2\neq\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{J}_1\quad\cdots\cdots(3.11)$$

で，可換性は成立しないことに注意する。

3）適　合　条　件

式 (3.7) から

$$\left.\begin{array}{l}\underset{0}{\nabla}\times\boldsymbol{J}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{J}^{-1}=0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(3.12)$$

が成立する。これらの式を $\boldsymbol{J}$ の適合条件と考えることができる。

4．面素，体素の変換

変換テンソル $\boldsymbol{J}$ によって示される変形により，面素，体素はどのように変換されるかを調べる。このことは変形に伴って変化する応力，密度などの量の性質を調べるとき必要となるのである。

面素は微小平面と考えられ，その面積 dS，外向き法線 $\boldsymbol{n}$ を用い，ベクトル的に

$$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dS\quad\cdots\cdots(4.1)$$

と示す。同一点に考えた二つの線素 $d\underset{1}{\boldsymbol{r}}$, $d\underset{2}{\boldsymbol{r}}$ のつくる平行四辺形を一つの面素としてとると，

$$d\boldsymbol{S}=\pm d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{2}{\boldsymbol{r}}\quad\cdots\cdots(4.2)$$

ただし，この ± はベクトル $d\boldsymbol{S}$ の向きが外向き法線と一致するように定めるのであるが，変形の過程中にこの符号が変わることはないから，$d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{2}{\boldsymbol{r}}$ の変換を考察すればよいことがわかる。

$$d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{2}{\boldsymbol{r}}=d\underset{1}{C}{}^{\kappa}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times d\underset{2}{C}{}^{\lambda}\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=d\underset{1}{C}{}^{\kappa}d\underset{2}{C}{}^{\kappa}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}$$

$$=2\,d\underset{1}{C}{}^{[\kappa}d\underset{2}{C}{}^{\lambda]}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}\quad(\kappa\lambda=23,\ 31,\ 12)$$

$$=d\tilde{S}_{\mu}\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}\quad\cdots\cdots(4.3)$$

とおく。ただし，

$$d\tilde{S}_{\mu}=\epsilon_{\kappa\lambda\mu}d\underset{1}{C}{}^{[\kappa}d\underset{2}{C}{}^{\lambda]}=\frac{1}{2}\epsilon_{\kappa\lambda\mu}\begin{vmatrix}d\underset{1}{C}{}^{\kappa} & d\underset{1}{C}{}^{\lambda}\\ d\underset{2}{C}{}^{\kappa} & d\underset{2}{C}{}^{\lambda}\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots(4.4)$$

$$\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}=\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}\quad\cdots\cdots(4.5)$$

である*。標構 $\underset{1}{\boldsymbol{e}},\underset{2}{\boldsymbol{e}},\underset{3}{\boldsymbol{e}}$ のつくる平行六面体の体積を $\sqrt{g}$，逆標構を $\overset{\kappa}{\boldsymbol{e}}$ とすれば，明らかに

$$\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}=\pm\sqrt{g}\,\overset{\mu}{\boldsymbol{e}}\quad\cdots\cdots(4.6)$$

となるので，$d\boldsymbol{S}$ の共変成分を dS_{μ} とかけば，

$$d\tilde{S}_{\mu}=\pm\frac{1}{\sqrt{g}}dS_{\mu}\quad\cdots\cdots(4.7)$$

となる。

material 表現では線素の成分 dC^{κ} は不変に保たれるから（式 (3.3)），

$$\left.\begin{array}{l}d\underset{0}{\boldsymbol{S}}=d\underset{\substack{1\\0}}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{\substack{2\\0}}{\boldsymbol{r}}=d\underset{1}{C}{}^{\kappa}\underset{\substack{\kappa\\0}}{\boldsymbol{e}}\times d\underset{2}{C}{}^{\lambda}\underset{\substack{\lambda\\0}}{\boldsymbol{e}}=d\tilde{S}_{\mu}\overset{\substack{\mu\\0}}{\tilde{\boldsymbol{E}}}\\ d\boldsymbol{S}=d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{2}{\boldsymbol{r}}=d\underset{1}{C}{}^{\kappa}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times d\underset{2}{C}{}^{\lambda}\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=d\tilde{S}_{\mu}\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}\end{array}\right\}\cdots(4.8)$$

となり，結局，面素 $d\boldsymbol{S}$ の変換は $\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}$ の変換を調べればよいことになる。

$$\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=(\underset{\substack{\kappa\\0}}{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{J})\times(\underset{\substack{\lambda\\0}}{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{J})=J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{\overset{\alpha}{0}}\underset{\substack{\alpha\\0}}{\boldsymbol{e}}\times J_{\underset{0}{\lambda}}{}^{\overset{\beta}{0}}\underset{\substack{\beta\\0}}{\boldsymbol{e}}$$

$$=2J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{[\overset{\alpha}{0}}J_{\underset{0}{\lambda}}{}^{\overset{\beta}{0}]}\underset{\substack{\alpha\\0}}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\substack{\beta\\0}}{\boldsymbol{e}}\quad(\underset{0}{\alpha}\underset{0}{\beta}=23,\ 31,\ 12)$$

であるから，

$$\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}=\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{[\overset{\alpha}{0}}J_{\underset{0}{\lambda}}{}^{\overset{\beta}{0}]}\overset{\substack{\gamma\\0}}{\tilde{\boldsymbol{E}}}$$

を得る。しかるに

$$\mathrm{co}\,\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}\boldsymbol{J}\times\times\boldsymbol{J}\quad\cdots\cdots(4.9)$$

と定義すれば

$$\mathrm{co}\,\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{\overset{\alpha}{0}}\overset{\substack{\kappa\\0}}{\boldsymbol{e}}\underset{\substack{\alpha\\0}}{\boldsymbol{e}}\times\times J_{\underset{0}{\lambda}}{}^{\overset{\beta}{0}}\overset{\substack{\lambda\\0}}{\boldsymbol{e}}\underset{\substack{\beta\\0}}{\boldsymbol{e}}$$

$$=\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{[\overset{\alpha}{0}}J_{\underset{0}{\lambda}}{}^{\overset{\beta}{0}]}\underset{\substack{\mu\\0}}{\boldsymbol{e}}\overset{\substack{\gamma\\0}}{\boldsymbol{e}}\quad\cdots\cdots(4.10)$$

であるから，

* [κλ] は指標 κλ の alternation を示す。たとえば

$$X^{[23]}=\frac{1}{2}(X^{23}-X^{32})$$

また，$\epsilon_{\kappa\lambda\mu}$, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}$ は Eddington のイプシロン（Appendix 1 参照）である。

$$\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}=\overset{\overset{\mu}{0}}{\tilde{\boldsymbol{E}}}\cdot\mathrm{co}\,\boldsymbol{J}\cdots\cdots(4.11)$$

を得，したがって

$$d\boldsymbol{S}=d\underset{0}{\boldsymbol{S}}\cdot\mathrm{co}\,\boldsymbol{J}\cdots\cdots(4.12)$$

となる。このことは

$$\mathrm{co}\,\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}\overset{\overset{\kappa}{0}}{\boldsymbol{e}}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times\times\overset{\overset{\lambda}{0}}{\boldsymbol{e}}\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=\frac{1}{2}\overset{\overset{\kappa}{0}}{\boldsymbol{e}}\times\overset{\overset{\lambda}{0}}{\boldsymbol{e}}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=\underset{\underset{0}{\mu}}{\tilde{\boldsymbol{E}}}\overset{\mu}{\tilde{\boldsymbol{E}}}\cdots(4.13)$$

からも得られる。

式 (4.10) から明らかになように，$\mathrm{co}\,\boldsymbol{J}$ は変換マトリックス $(J_{\kappa}{}^{\overset{\alpha}{0}})$ の小行列式を成分とするテンソルで，$\boldsymbol{J}$ の余因子 (cofactor) と呼ばれる。$\boldsymbol{J}$ の行列式

$$|\boldsymbol{J}|=\frac{1}{6}(\boldsymbol{J}\times\times\boldsymbol{J})\cdot\cdot\boldsymbol{J}=|J_{\underset{0}{\kappa}}{}^{\overset{\alpha}{0}}|\cdots\cdots(4.14)$$

を用いれば，

$$\mathrm{co}\,\boldsymbol{J}=|\boldsymbol{J}|{}^t\boldsymbol{J}^{-1}\cdots\cdots(4.15)$$

と記すこともできる。

つぎに体素 dV の変換を調べよう。物体の1点に共面でない3個の線素 $d\underset{1}{\boldsymbol{r}}$, $d\underset{2}{\boldsymbol{r}}$, $d\underset{3}{\boldsymbol{r}}$ を考え，体素としてその平行六面体の体積を用いる。

$$dV=\pm(d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{2}{\boldsymbol{r}})\cdot d\underset{3}{\boldsymbol{r}}\cdots\cdots(4.16)$$

ここに，dV は正のスカラーで上式の $\pm$ は dV が正となるように定める。しかし変形過程でこの符号が変化することはないから $(d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{2}{\boldsymbol{r}})\cdot d\underset{3}{\boldsymbol{r}}$ の変換を考えればよいことになる。前と同様

$$\begin{aligned}(d\underset{1}{\boldsymbol{r}}\times d\underset{2}{\boldsymbol{r}})\cdot d\underset{3}{\boldsymbol{r}}&=(d\underset{1}{C^{\kappa}}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times d\underset{2}{C^{\lambda}}\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}})\cdot d\underset{3}{C^{\mu}}\underset{\mu}{\boldsymbol{e}}\\&=d\underset{1}{C^{\kappa}}d\underset{2}{C^{\lambda}}d\underset{3}{C^{\mu}}(\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}})\cdot\underset{\mu}{\boldsymbol{e}}\\&=6\,d\underset{1}{\overset{[1}{C}}d\underset{2}{\overset{2}{C}}d\underset{3}{\overset{3]}{C}}(\underset{1}{\boldsymbol{e}}\times\underset{2}{\boldsymbol{e}})\cdot\underset{3}{\boldsymbol{e}}\\&=d\underset{(\kappa)}{\tilde{V}}\underset{(\kappa)}{\tilde{E}}\cdots\cdots(4.17)\end{aligned}$$

とおく*。ここに，

$$d\underset{(\kappa)}{\tilde{V}}=6\,d\underset{1}{\overset{[1}{C}}d\underset{2}{\overset{2}{C}}d\underset{3}{\overset{3]}{C}}=\begin{vmatrix}d\underset{1}{C^1}d\underset{1}{C^2}d\underset{1}{C^3}\\d\underset{2}{C^1}d\underset{2}{C^2}d\underset{2}{C^3}\\d\underset{3}{C^1}d\underset{3}{C^2}d\underset{3}{C^3}\end{vmatrix}\cdots\cdots(4.18)$$

$$\underset{(\kappa)}{\tilde{E}}=(\underset{1}{\boldsymbol{e}}\times\underset{2}{\boldsymbol{e}})\cdot\underset{3}{\boldsymbol{e}}=\pm\sqrt{g}\cdots\cdots(4.19)$$

ゆえに

$$d\underset{(\kappa)}{\tilde{V}}=\pm\frac{1}{\sqrt{g}}dV\cdots\cdots(4.20)$$

を得る。

material 表現では，成分 dC^{κ} が不変であるから，

$$d\underset{0}{V}=d\underset{(\kappa)}{\tilde{V}}\underset{\binom{\kappa}{0}}{\tilde{E}},\quad dV=d\underset{(\kappa)}{\tilde{V}}\underset{(\kappa)}{\tilde{E}}\cdots\cdots(4.21)$$

で，この場合も $\underset{(\kappa)}{\tilde{E}}$ の変化を調べればよい。

$$\begin{aligned}\underset{(\kappa)}{\tilde{E}}&=(\underset{1}{\boldsymbol{e}}\times\underset{2}{\boldsymbol{e}})\cdot\underset{3}{\boldsymbol{e}}=\{(\underset{\underset{0}{1}}{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{J})\times(\underset{\underset{0}{2}}{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{J})\}\cdot(\underset{\underset{0}{3}}{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{J})\\&=J_{\underset{0}{1}}{}^{\overset{\alpha}{0}}J_{\underset{0}{2}}{}^{\overset{\beta}{0}}J_{\underset{0}{3}}{}^{\overset{\gamma}{0}}(\underset{\underset{0}{\alpha}}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\underset{0}{\beta}}{\boldsymbol{e}})\cdot\underset{\underset{0}{\gamma}}{\boldsymbol{e}}\\&=6\,J_{\underset{0}{1}}{}^{[\overset{1}{0}}J_{\underset{0}{2}}{}^{\overset{2}{0}}J_{\underset{0}{3}}{}^{\overset{3}{0}]}(\underset{\underset{0}{1}}{\boldsymbol{e}}\times\underset{\underset{0}{2}}{\boldsymbol{e}})\cdot\underset{\underset{0}{3}}{\boldsymbol{e}}\\&=|\boldsymbol{J}|\underset{\binom{\kappa}{0}}{\tilde{E}}\cdots\cdots(4.22)\end{aligned}$$

したがって

$$dV=|\boldsymbol{J}|d\underset{0}{V}\cdots\cdots(4.23)$$

を得る。特に

$$|\boldsymbol{J}|=1\cdots\cdots(4.24)$$

の変形は等積変形または非圧縮性変形と称される。

5. 無限小変換テンソル

無限小変換テンソル $(D\boldsymbol{\Phi})$ は次式によって定義される。

$$D(d\boldsymbol{r})=d\boldsymbol{r}\cdot(D\boldsymbol{\Phi})\cdots\cdots(5.1)$$

一方，

$$D(d\boldsymbol{r})=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot D\boldsymbol{J}=(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J}^{-1})\cdot D\boldsymbol{J}=d\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{J}^{-1}\cdot D\boldsymbol{J})$$

$$D(d\boldsymbol{r})=d(D\boldsymbol{r})=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}(D\boldsymbol{r})=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}(D\boldsymbol{u})$$

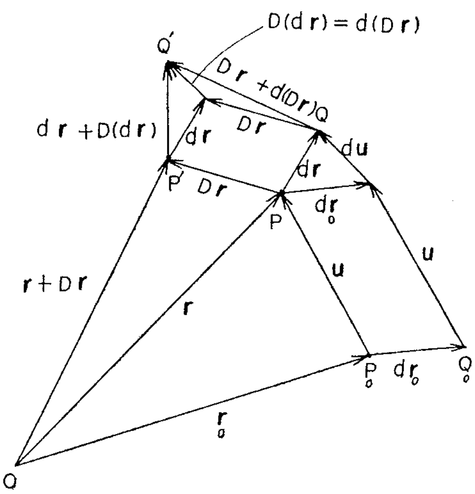
などの関係が成り立つから（図―**3** 参照），

$$(D\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{J}^{-1}\cdot D\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\nabla}(D\boldsymbol{u})\cdots\cdots(5.2)$$

である。$(D\boldsymbol{\Phi})$ は一般に複数の変形のパラメーターに関していつも全微分の形になっているとは限らない。このことを示す意味でカッコを付して記すのである。したがって，一般に $\boldsymbol{\Phi}$ とかけるような状態テンソルが存在するとは限らないが，$(D\boldsymbol{\Phi})$ が積分可能の場合には，その積分となる $\boldsymbol{\Phi}$ を求めることができる*。

$(D\boldsymbol{\Phi})$ は対称テンソルとは限らないから，これをつぎ

図―3



* $d\tilde{V}$, $\tilde{E}$ はいずれも指標をもたないが，座標 κ に関するものであることを示すため (κ) を付しておく。

* $(D\boldsymbol{\Phi})$ の積分不可能性，非可逆性については，後述の $(D\boldsymbol{E})$ と同様であり，文献 11) p. 63 参照。

のように分解する。

$$(D\boldsymbol{\Phi})=(D\boldsymbol{\Phi})_{\mathrm{sym}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times(D\boldsymbol{W})\quad\cdots\cdots\cdots(5.3)$$

$(D\boldsymbol{\Phi})_{\mathrm{sym}}$ は $(D\boldsymbol{\Phi})$ の対称部分で後に述べるようにひずみ増分 $(D\boldsymbol{E})$ と一致する。ベクトル $(D\boldsymbol{W})$ は

$$(D\boldsymbol{W})=\boldsymbol{\nabla}\times(D\boldsymbol{u})={}^t\boldsymbol{J}^{-1}\cdot\times D\boldsymbol{J}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

で定義されるもので，やはり変形のパラメーターに関して全微分の形になっているとは限らない。$(D\boldsymbol{W})$ を無限小回転ベクトルと呼ぶ。これらの量に関してはつぎの適合条件が成り立たなければならない。

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\nabla}\times(D\boldsymbol{\Phi})=0\\ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\times\times(D\boldsymbol{\Phi})_{\mathrm{sym}}=0,\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot(D\boldsymbol{W})=0\end{array}\right\}\cdots(5.5)$$

いま，$\boldsymbol{\Phi}$ が求められ，$\boldsymbol{\Phi}$ と $D\boldsymbol{\Phi}$ とが可換である変形について考察しよう。$\exp\boldsymbol{\Phi}$* について

$$D(\exp\boldsymbol{\Phi})=D\boldsymbol{\Phi}\cdot\exp\boldsymbol{\Phi}=\exp\boldsymbol{\Phi}\cdot D\boldsymbol{\Phi}\quad\cdots\cdots(5.6)$$

が成り立ち，$\boldsymbol{K}=\exp\boldsymbol{\Phi}$ とおけば，

$$D\boldsymbol{K}=D\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}\cdot D\boldsymbol{\Phi}$$

したがって

$$D\boldsymbol{\Phi}=D\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K}^{-1}=\boldsymbol{K}^{-1}\cdot D\boldsymbol{K}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.7)$$

を得，$\boldsymbol{K}$ と $D\boldsymbol{K}$ とが可換となることがわかる。式(5.7)は式 (5.2) と類似の式であり，初期条件 $\boldsymbol{\Phi}=0$ の下に

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{K}=\exp\boldsymbol{\Phi}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.8)$$

とかくことができる**。

いま，一つのパラメーター t (時間と考えてよい)と，位置のみに関係し t に関係しないテンソル $\boldsymbol{A}$ とによって，

$$(D\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{A}Dt\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.9)$$

とかける変形を考えれば，$(D\boldsymbol{\Phi})$ は積分可能でその積分

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{A}t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.10)$$

が求められ，$\boldsymbol{\Phi}$ と $D\boldsymbol{\Phi}$ とは可換であり，

$$\boldsymbol{J}=\exp\boldsymbol{A}t\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.11)$$

が成り立つことになる。さらに，$\boldsymbol{A}$が位置によらない定テンソルであるときは，$d\boldsymbol{r}=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\exp\boldsymbol{A}t$ をさらに積分して，

$$\boldsymbol{r}=\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\exp\boldsymbol{A}t\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.12)$$

を得る(この場合，併行移動を示す積分定数の項は省いておく)。この変形は斉1次変形と呼ばれるもので，この場合の $\boldsymbol{J}=\exp\boldsymbol{A}t$ を斉1次変換と称する。2次元の場合は，表―1 に示す4種類の変形が基本的である*（表に示した成分は基準の Descartes 座標に関するものである)。

表―1 の ii～iv の変形はいずれも等積変形である。

表―1

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{J}=\exp\boldsymbol{A}t$
i 伸び	$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{at} & 0\\ 0 & e^{at}\end{pmatrix}$
ii 回転	$\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos at & \sin at\\ -\sin at & \cos at\end{pmatrix}$
iii すべり (1)	$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{at} & 0\\ 0 & e^{-at}\end{pmatrix}$
iv すべり (2)	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ at & 1\end{pmatrix}$

6. ひずみの定義

material 表現における変形前後の計量テンソル，$g_{\kappa\lambda}$，$\underset{00}{g_{\kappa\lambda}}$ の差を用い，

$$e_{\kappa\lambda}=\frac{1}{2}(g_{\kappa\lambda}-\underset{00}{g_{\kappa\lambda}})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.1)$$

とおけば，$e_{\kappa\lambda}$ はテンソル成分であり，これを有限ひずみ（成分）という。これに対し，

$$De_{\kappa\lambda}=\frac{1}{2}Dg_{\kappa\lambda}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.2)$$

を無限小ひずみ（成分）という。明らかに

$$e_{\kappa\lambda}=\int De_{\kappa\lambda}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.3)$$

である。

つぎに，ひずみを表現する dyadic 量としては，線素 $d\boldsymbol{r}$ の長さ $ds=|d\boldsymbol{r}|$ の変化を基礎にして，つぎの3通りのひずみ量を考えることができる（いずれも対称テンソル)。

$$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}:\quad ds^2-\underset{0}{ds^2}=\underset{0}{d\boldsymbol{r}}\underset{0}{d\boldsymbol{r}}\cdot\cdot 2\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\quad ds^2-\underset{0}{ds^2}=d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}\cdot\cdot 2\boldsymbol{\varepsilon}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.5)$$

$$(D\boldsymbol{E}):\quad D(ds^2)=d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}\cdot\cdot 2(D\boldsymbol{E})\quad\cdots\cdots\cdots(6.6)$$

式 (6.4) による $\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は線素の長さの変化を変形前の線素 $d\underset{0}{\boldsymbol{r}}$ を基準にして測ったもので，第1種有限ひずみ(または Green の有限ひずみ**)と呼ぶ。式(6.5)の $\boldsymbol{\varepsilon}$ は同じ変化を変形後の線素 $d\boldsymbol{r}$ を基準にして測ったものであり，第2種有限ひずみ（または Almansi の有限ひずみ）と呼ぶ。$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ の定義場はそれぞれ変形前，変形後の位置と考えられ，応力テンソルの定義場が変形後の位置であるので，応力との対応には $\boldsymbol{\varepsilon}$ の方が都合がよいことがわかる。

式 (6.6) の $(D\boldsymbol{E})$ は変形の過程の瞬間瞬間において，ds の変化をそのときの $d\boldsymbol{r}$ を基準にして測ったもので無限小ひずみ，またはひずみ増分 *strain increment* と呼ばれる。ひずみ増分を変形の経路に沿って積分すれば，ひずみ積分

$$\boldsymbol{E}=\int(D\boldsymbol{E})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.7)$$

* テンソル $\boldsymbol{X}$ に対する $\exp\boldsymbol{X}$，$\log\boldsymbol{X}$ などについては Appendix 3 参照。

** 一般には，定テンソル $\boldsymbol{C}$ によって

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}\cdot\exp\boldsymbol{\Phi}$$

となり，$\boldsymbol{C}$ は初期条件 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{I}$ を満足するように定める。すなわち，

$$\boldsymbol{C}=\exp(-\boldsymbol{\Phi}_{t=0})$$

* $\boldsymbol{A}$ と $\exp\boldsymbol{A}t$ の関係の群論的考察について Appendix 4 参照。

** Green, Almansi の名称については，たとえば 10) 参照。なお，10) の *rate of deformation tensor* $\boldsymbol{d}$ が本文の $\dfrac{(D\boldsymbol{E})}{Dt}$ に相当している。

を得ることができるが，$(D\boldsymbol{E})$ は複数の変形のパラメーターに関して一般に積分可能でなく，積分の始終点が同じ二つの積分経路についても一般に積分の結果は異なる。したがって，一般に

$$\oint (D\boldsymbol{E}) \neq 0 \quad\cdots\cdots(6.8)$$

で非可逆性をもつ。ひずみ積分は塑性変形のように，特別の基準状態がなく変形中の一つの状態がつぎの変形の基準となるような変形の記述に適している*。

これらのひずみ量と $\boldsymbol{J}$ との関係を求めよう。式 (3.1) から，

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = (d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J})\cdot({}^t\boldsymbol{J}\cdot d\underset{0}{\boldsymbol{r}}) = d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\,d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{J}\cdot{}^t\boldsymbol{J})$$

となるので，

$$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}\cdot{}^t\boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}) \quad\cdots\cdots(6.9)$$

同様に，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^{-1}\cdot{}^t\boldsymbol{J}^{-1}) \quad\cdots\cdots(6.10)$$

また

$$(D\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{J}^{-1}\cdot D\boldsymbol{J} + {}^t(\boldsymbol{J}^{-1}\cdot D\boldsymbol{J})\} = (D\boldsymbol{\Phi})_{\mathrm{sym}} \quad\cdots\cdots(6.11)$$

を得る。変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ との関係は，式 (3.8) または (3.9) を用いて

$$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\underset{0}{\nabla} + \underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\underset{0}{\nabla}) \quad\cdots\cdots(6.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla - \nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla) \quad\cdots\cdots(6.13)$$

となり，また式 (5.2) から

$$(D\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\{\nabla(D\boldsymbol{u}) + (D\boldsymbol{u})\nabla\} \quad\cdots\cdots(6.14)$$

となる。

微小変形理論では，$\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}$ または $\nabla\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{I}$ にくらべ微小量と考えられるから，$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ の代りに，

$$\left.\begin{aligned}\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}' &= \frac{1}{2}(\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\underset{0}{\nabla}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + {}^t\boldsymbol{J}) - \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{\varepsilon}' &= \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) = \boldsymbol{I} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^{-1} + {}^t\boldsymbol{J}^{-1})\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(6.15)$$

が用いられる（微小変形の場合，普通 $\underset{0}{\nabla}$ と ∇ も区別しないのであるが，ここでは上記のように区別しておく）。回転ベクトル $\underset{0}{\boldsymbol{w}}$, $\boldsymbol{w}$ を

$$\left.\begin{aligned}\underset{0}{\boldsymbol{w}} &= \underset{0}{\nabla}\times\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{I}\times\underset{0}{\boldsymbol{w}} &= {}^t\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J},\\ \boldsymbol{w} &= \nabla\times\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{J}^{-1} - {}^t\boldsymbol{J}^{-1}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(6.16)$$

と定義すれば，$\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}$, $\nabla\boldsymbol{u}$ は周知のように

$$\left.\begin{aligned}\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u} &= \underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times\underset{0}{\boldsymbol{w}}\\ \nabla\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\varepsilon}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{w}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(6.17)$$

と分解され，右辺の第1項は対称部分，第2項は交代部分である。有限ひずみとの間には，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{I} + 2\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\boldsymbol{I} + \underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}')^2 + \frac{1}{2}(\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}'\times\underset{0}{\boldsymbol{w}} - \underset{0}{\boldsymbol{w}}\times\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}')\\ &\quad - \frac{1}{4}(\boldsymbol{I}\times\underset{0}{\boldsymbol{w}})^2\\ \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\varepsilon}')^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}'\times\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{\varepsilon}')\\ &\quad - \frac{1}{4}(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{w})^2\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(6.18)^*$$

の関係があり，$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}'$, $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 相互には

$$\boldsymbol{J}^{-1}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}' - \underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{J}^{-1} = {}^t\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'\cdot{}^t\boldsymbol{J} \quad\cdots\cdots(6.19)$$

の関係が成り立つ。

material 表現にしたがえば，式 (3.5) により，

$$\boldsymbol{J} = \overset{\overset{\kappa}{0}}{\boldsymbol{e}}\,\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}},\quad \boldsymbol{J}^{-1} = \overset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\,\underset{\underset{0}{\kappa}}{\boldsymbol{e}}$$

で，これらを式 (6.9)，(6.10) に入れれば

$$\left.\begin{aligned}\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(g_{\kappa\lambda} - g_{\underset{00}{\kappa\lambda}})\overset{\overset{\kappa}{0}}{\boldsymbol{e}}\,\overset{\overset{\lambda}{0}}{\boldsymbol{e}} = e_{\kappa\lambda}\overset{\overset{\kappa}{0}}{\boldsymbol{e}}\,\overset{\overset{\lambda}{0}}{\boldsymbol{e}}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(g_{\kappa\lambda} - g_{\underset{00}{\kappa\lambda}})\overset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\,\overset{\lambda}{\boldsymbol{e}} = e_{\kappa\lambda}\overset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\,\overset{\lambda}{\boldsymbol{e}}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(6.20)$$

となる。したがって，$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ はそれぞれ変形前，変形後の標構を基準にすれば，同一の成分をもつことになり，それが式 (6.1) で定義された有限ひずみ（成分）$e_{\kappa\lambda}$ であることがわかる。すなわち

$$\underset{0}{\varepsilon}_{\underset{00}{\kappa\lambda}} = \varepsilon_{\kappa\lambda} = e_{\kappa\lambda} \quad\cdots\cdots(6.21)$$

である**。

ひずみ相互の間には，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{J}^{-1}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot{}^t\boldsymbol{J}^{-1},\quad \underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot{}^t\boldsymbol{J} \quad\cdots\cdots(6.22)$$

$$(D\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{J}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot{}^t\boldsymbol{J}^{-1},\quad D\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{J}\cdot(D\boldsymbol{E})\cdot{}^t\boldsymbol{J} \quad\cdots\cdots(6.23)$$

の関係がある。式 (6.20) より

$$D\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} = De_{\kappa\lambda}\overset{\overset{\kappa}{0}}{\boldsymbol{e}}\,\overset{\overset{\lambda}{0}}{\boldsymbol{e}} \quad\cdots\cdots(6.24)$$

---

* 吉村博士[11),12),13)] は，$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\boldsymbol{E}$ がそれぞれ弾性変形，塑性変形の記述に適したひずみ表現であることを述べ，それぞれ弾性ひずみ，塑性ひずみの名称を与えられている。しかし，どんな種類の変形でも，上記 3 種類のひずみを導入することは同時に可能であるので，この名称は必ずしも適当ではないように思う。

* $(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{w})^2 = \boldsymbol{w}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\boldsymbol{I}$

** このことは，material 表現で

$$\begin{aligned}ds^2 - \underset{0}{ds^2} &= d\underset{0}{r}^{\overset{\kappa}{0}}\,d\underset{0}{r}^{\overset{\lambda}{0}}\,\underset{0}{\varepsilon}_{\underset{00}{\kappa\lambda}} = dC^\kappa dC^\lambda\,\underset{0}{\varepsilon}_{\underset{00}{\kappa\lambda}}\\ &= dr^\kappa dr^\lambda\varepsilon_{\kappa\lambda} = dC^\kappa dC^\lambda\varepsilon_{\kappa\lambda}\end{aligned}$$

となることからも明らかである。spatial 表現では，当然こうはならない。Sokolnikoff などは $e_{\kappa\lambda} = \underset{0}{\varepsilon}_{\underset{00}{\kappa\lambda}} = \varepsilon_{\kappa\lambda}$ を *Lagrangian strain components* と呼び，spatial 表現による $\varepsilon_{\kappa\lambda}$ を *Eulerian strain components* と呼んでいる。

で，式 (6.23) を用いれば，

$$(DE)=De_{\kappa\lambda}\overset{\kappa}{e}\overset{\lambda}{e} \quad\cdots\cdots(6.25)$$

を得るから，式 (6.21) と類似の関係

$$(D\underset{0}{\varepsilon})_{\underset{00}{\kappa\lambda}}=(DE)_{\kappa\lambda}=De_{\kappa\lambda} \quad\cdots\cdots(6.26)$$

が成立する。また，回転ベクトル $\underset{0}{w}$, w の間には，

$$I\times w=J^{-1}\cdot(I\times\underset{0}{w})\cdot{}^tJ^{-1},\quad I\times\underset{0}{w}=J\cdot(I\times w)\cdot{}^tJ \quad\cdots\cdots(6.27)$$

の関係がある。

適合条件としては，微小変形理論の場合に対して，

$$\underset{0}{\nabla}\underset{0}{\nabla}\times\times\underset{0}{\varepsilon}'=0,\quad \nabla\nabla\times\times\varepsilon'=0 \quad\cdots\cdots(6.28)$$

$$\underset{0}{\nabla}\cdot\underset{0}{w}=0,\quad \nabla\cdot w=0 \quad\cdots\cdots(6.29)$$

が成り立つが，$\underset{0}{\varepsilon}$, ε に対してはその表現が ∇ について非線形であるのでこのような式を求めることが困難となる。*

最後に，$\underset{0}{\varepsilon}$ が変形のパラメーターを含まず位置のみの関数である対称テンソル A と一つの変形のパラメーターとにより，

$$\underset{0}{\varepsilon}=At \quad\cdots\cdots(6.30)$$

と示される場合を考えよう。この場合 $\underset{0}{\varepsilon}$（つまり A）の主軸の方向は変形の進行にかかわりなく一定しているから，その方向に一致する標構をもつ曲線座標をとれば，

$$g_{\kappa\lambda}=\underset{00}{g_{\kappa\lambda}}+2e_{\kappa\lambda}$$

の右辺はつねに標準形（対角線要素以外 0 の形）となるので左辺の $g_{\kappa\lambda}$ もつねに標準形となり，したがって，つねに直交曲線座標となる Lagrange 座標を導入できることがわかる。このことは，式 (6.30) の変形の場合に限らず，後に述べる第 1 種変形の場合にも一般に成り立ち，変形の解析に便利な座標系を与える。

7. J の分解，変形テンソル

変換テンソル J の分解を考える。J は一般に対称テンソルではないが，

$$J\cdot{}^tJ=\overset{\overset{\kappa}{0}}{e}\,\underset{\kappa}{e}\cdot\underset{\lambda}{e}\,\overset{\overset{\lambda}{0}}{e}=g_{\kappa\lambda}\overset{\overset{\kappa}{0}}{e}\overset{\overset{\lambda}{0}}{e} \quad\cdots\cdots(7.1)$$

は対称テンソルで，その主軸を示す単位ベクトルを $\underset{\underset{0}{i}}{i}$ とすれば，

$$J\cdot{}^tJ=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\underset{\underset{0}{i}}{i}\,\underset{\underset{0}{i}}{i} \quad\cdots\cdots(7.2)$$

と記すことができ，主値 α_i は正値である。ここで，正の主値 $\sqrt{\alpha_i}$ をもつテンソル $\underset{0}{M}$ を

$$\underset{0}{M}=\sum_i\sqrt{\alpha_i}\,\underset{\underset{0}{i}}{i}\,\underset{\underset{0}{i}}{i} \quad\cdots\cdots(7.3)$$

と定義する。$\underset{0}{M}$ は

$$\underset{0}{M}^2=J\cdot{}^tJ \text{（または記号的に } \underset{0}{M}=\sqrt{J\cdot{}^tJ}\text{ ）} \quad\cdots\cdots(7.4)$$

を満足する対称テンソルで，いま，

$$R=\underset{0}{M}^{-1}\cdot J \quad\cdots\cdots(7.5)$$

とおけば，

$$R\cdot{}^tR=\underset{0}{M}^{-1}\cdot J\cdot{}^tJ\cdot\underset{0}{M}^{-1}=\underset{0}{M}^{-1}\cdot\underset{0}{M}^2\cdot\underset{0}{M}^{-1}=I \quad\cdots\cdots(7.6)$$

から R は回転を示す一つの直交テンソルとなる。これらを用い，J は

$$J=\underset{0}{M}\cdot R \quad\cdots\cdots(7.7)$$

と一意的に分解することができる。式 (7.7) の分解は可換ではないが，全く同様に

$${}^tJ\cdot J=\overset{\overset{\kappa}{0}}{e}\,\underset{\kappa}{e}\cdot\underset{\lambda}{e}\,\overset{\overset{\lambda}{0}}{e}=\underset{00}{g^{\kappa\lambda}}\underset{\kappa}{e}\,\underset{\lambda}{e} \quad\cdots\cdots(7.8)$$

を用いて，

$$M=\sqrt{{}^tJ\cdot J} \quad\cdots\cdots(7.9)$$

と定義することにより，

$$J=R\cdot M \quad\cdots\cdots(7.10)$$

の分解を得ることができる。この R が式 (7.7) の R と同一のものであること，M と $\underset{0}{M}$ とが同一の主値を有することなどは，つぎの幾何学的考察からも明らかである。

変形前の物体の 1 点 $\underset{0}{P}$ に半径 ds の微小な球を考えると，この球は変形後一般にだ円体に変わる。このだ円体の 3 軸の方向を $\underset{i}{i}$ で示すと，$\underset{i}{i}$ の変形前の方向 $\underset{\underset{0}{i}}{i}$ も互いに直交している。変形後のだ円体の 3 軸の長さを $\lambda_i ds$ とおくと，式 (3.1) より

$$(ds\underset{\underset{0}{i}}{i})\cdot J=\lambda_i ds\underset{i}{i}$$

これより

$$J=\sum_i\lambda_i\underset{\underset{0}{i}}{i}\,\underset{i}{i} \quad\cdots\cdots(7.11)$$

と記すことができる。この J をさらに $J=\underset{0}{M}\cdot R$ と分解して，

$$\underset{0}{M}=\sum_i\lambda_i\underset{\underset{0}{i}}{i}\,\underset{\underset{0}{i}}{i} \quad\cdots\cdots(7.12)$$

$$R=\sum_i\underset{\underset{0}{i}}{i}\,\underset{i}{i} \quad\cdots\cdots(7.13)$$

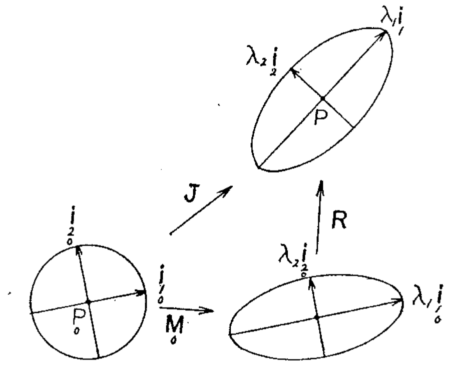
とおけば，この分解が式 (7.7) の分解と一致していることは分解の一意性から明らかであり，式(7.3)と比較して

$$\lambda_i=\sqrt{\alpha_i} \quad\cdots\cdots(7.14)$$

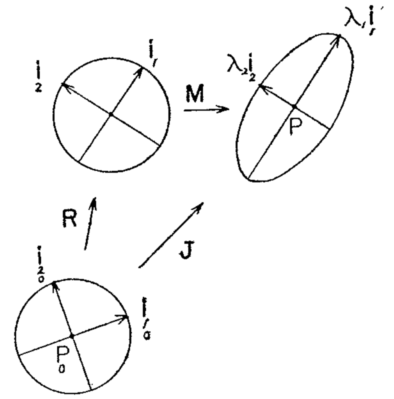
となっていることがわかる。$\underset{0}{M}$ は純粋な変形を示し，R は標構 $\underset{\underset{0}{i}}{i}$ を $\underset{i}{i}$ に移す回転を示す。この分解は図—4 に示すように，変形前の位置 $\underset{0}{P}$ において，考えている球にまず変形 $\underset{0}{M}$ を与え，その後，変形後の位置 P まで

* 有限ひずみ $e_{\kappa\lambda}$ に対する適合条件は，計量テンソル $g_{\kappa\lambda}=\underset{00}{g_{\kappa\lambda}}+2e_{\kappa\lambda}$ をもとにしてつくられた Riemann-Christoffel の曲率テンソルが 0 となることと考えることができる[8),9),10),16)]。

図—4



図—5



回転 $\boldsymbol{R}$ を与えながら移動させると考えてよい。同様に，

$$\boldsymbol{M}=\sum_i \lambda_i \boldsymbol{i}_i \boldsymbol{i}_i \cdots\cdots(7.15)$$

とおき，式 (7.13) の $\boldsymbol{R}$ とこの $\boldsymbol{M}$ とを用いて式 (7.10) の分解を与えることができる。この場合は，図—**5** に示すように，まず回転 $\boldsymbol{R}$ を与えながら変形後の位置 P に移した後，$\boldsymbol{M}$ によって変形をおこさせると考えてよい。式 (7.12)，(7.15)からわかるように，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と $\boldsymbol{M}$ とは同一の主値 λ_i をもつが，主軸の方向はそれぞれ $\underset{0}{\boldsymbol{i}_i}$，$\boldsymbol{i}_i$ となっている。以上のように，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$，$\boldsymbol{M}$ は変換 $\boldsymbol{J}$ の中，純粋に変形の役割を受けもつものであるので，それぞれ第1種，第2種変形テンソル *deformation tensor* と称し*，とくに $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ が重要であるので，単に変形テンソルといえば $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ をさす。Mooney[5] は有限弾性変形のエネルギーがひずみテンソルよりむしろ $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ を用いて単純な表現を与えられることを記している。

変形テンソルと有限ひずみとの間には式 (6.9)，(6.10) から，

$$\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\sqrt{\boldsymbol{I}+2\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdots\cdots(7.16)$$

$$\boldsymbol{M}=\sqrt{(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}} \cdots\cdots(7.17)$$

の関係があり，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$，$\boldsymbol{M}$ 相互には，

$$\boldsymbol{M}={}^t\boldsymbol{R}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{R},\quad \underset{0}{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}\cdot{}^t\boldsymbol{R} \cdots\cdots(7.18)$$

が成り立つ。

つぎに，$\boldsymbol{J}$ の分解と $(D\boldsymbol{\Phi})$ の分解との間の関係について考察しよう。式 (7.7) を式 (5.2) に代入すれば，

$$(D\boldsymbol{\Phi})={}^t\boldsymbol{R}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot(D\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{R}+\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot D\boldsymbol{R})$$

$$={}^t\boldsymbol{R}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{R}+{}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R} \cdots\cdots(7.19)$$

をうる。$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$（したがって $\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}$）は対称であるが，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ は一般に対称テンソルになるとは限らない。しかし，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と $D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ とが可換である場合には $\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ は対称テンソルとなり*，したがって，式 (7.19) の右辺第1項は対称となる。一方，${}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R}$ は交代テンソルであるから**，式 (7.19) の右辺の各項は式 (5.3) の分解の各項と対応していることになる。さらに $\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ が定義可能であれば***，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ とかけるから，

$$(D\boldsymbol{E})={}^t\boldsymbol{R}\cdot D(\log\underset{0}{\boldsymbol{M}})\cdot\boldsymbol{R} \cdots\cdots(7.20)$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times(D\boldsymbol{W})={}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R} \cdots\cdots(7.21)$$

となる。式 (7.21) は

$$(D\boldsymbol{W})=\boldsymbol{I}\cdot\times({}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cdot\times D\boldsymbol{R} \cdots\cdots(7.22)$$

と記すこともできる。1パラメーター変形の場合のように $\boldsymbol{R}$ と $D\boldsymbol{R}$ とが可換のときは，

$${}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R}=D\boldsymbol{R}\cdot{}^t\boldsymbol{R}=D(\log\boldsymbol{R}) \cdots\cdots(7.23)$$

とかけるから，

$$(D\boldsymbol{W})=\boldsymbol{I}\cdot\times D(\log\boldsymbol{R}) \cdots\cdots(7.24)$$

となり，$(D\boldsymbol{W})$ は全微分となってその積分

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{I}\cdot\times\log\boldsymbol{R} \cdots\cdots(7.25)$$

が得られる。式 (7.25) は

$$\boldsymbol{R}=\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{W}\right) \cdots\cdots(7.26)$$

のようにかくこともできる。このようにして，$\boldsymbol{J}$ の積分解と $(D\boldsymbol{\Phi})$ の和分解とが対応づけられることがわかる。

ここで，$\underset{0}{\boldsymbol{w}}=0$（すなわち $\boldsymbol{u}$ が laminar）の場合を考える。この場合，同時に $\boldsymbol{w}=0$，また $\underset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}$ が対称となるから，式 (3.8) より $\boldsymbol{J}$ も対称，したがって，

$$\boldsymbol{J}={}^t\boldsymbol{J}=\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$$

となり，さらに

$$\boldsymbol{W}=0,\quad \boldsymbol{E}=\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}$$

* 一般には，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}^2$，$\boldsymbol{M}^2$ に相当するものが（それぞれ Cauchy, Finger の）*deformation tensor*[10]（または *strain tensor*[15]）と呼ばれている。

* $\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}=D\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{M}}$

$\therefore\ {}^t(\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}})={}^tD\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot{}^t\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}=D\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}=\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$

** ${}^t\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$ から，$D{}^t\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}+{}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R}=0$

$\therefore\ {}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R}+{}^t({}^t\boldsymbol{R}\cdot D\boldsymbol{R})=0$

*** 10) では，$\boldsymbol{H}=\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n-1}}{n}\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$ を Hencky の対数ひずみと称している。

式 (6.18) から，この場合

$$\boldsymbol{I}+\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}'=(\boldsymbol{I}+2\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}})^{1/2}=\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{M}$$

$$=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\varepsilon})^{-1/2}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\varepsilon}')^{-1}=\exp\boldsymbol{E}$$

の関係が成り立つ。

また逆に，$\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}=0$ の場合は，同時に $\boldsymbol{\varepsilon}=0$，式 (7.16)，(7.17) から

$$\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{J}=\boldsymbol{R}$$

となり，純回転の場合である。さらに

$$\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{W}=\boldsymbol{I}\cdot\times\log\boldsymbol{R}$$

式 (6.16) から，この場合

$$\boldsymbol{I}\times\underset{0}{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{w}={}^t\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{W}\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{W}\right)$$

$$=2\sinh\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{W}\right)$$

の関係が成り立つ。

さらに $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ を分解し（n を $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ の次元数とする），

$$\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\mu^{1/n}\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1 \quad\cdots\cdots(7.27)$$

$$\mu=|\underset{0}{\boldsymbol{M}}|=|\boldsymbol{J}| \quad\cdots\cdots(7.28)$$

$$|\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1|=1 \quad\cdots\cdots(7.29)$$

とおけば，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}=\boldsymbol{\mu}^{-\frac{1}{n}}\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1{}^{-1}$ などから，

$$\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\frac{1}{n}D\log\mu\,\boldsymbol{I}+\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1{}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1 \quad\cdots(7.30)$$

となる。$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$，$D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ が可換ならば，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1$，$D\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1$ も可換であり，

$$D(\log\underset{0}{\boldsymbol{M}})=D\left(\frac{1}{n}\log\mu\,\boldsymbol{I}\right)+D(\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1)$$

したがって，式 (7.20) はさらに

$$(D\,\boldsymbol{E})=D\left(\frac{1}{n}\log\mu\,\boldsymbol{I}\right)+{}^t\boldsymbol{R}\cdot D(\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1)\cdot\boldsymbol{R} \quad\cdots\cdots(7.31)$$

と分解される。これは対称部分 $(D\,\boldsymbol{E})$ をさらにスカラーテンソルと偏差テンソルとに分解したものに相当する*。

8. 第1種変形

前節後半に述べたような考察は $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と $D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ とが可換という条件の下に成り立つことである。このことは $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と $D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ との主軸が一致すること**，すなわち，変形の過程中 $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ の主軸の方向が不変に保たれることを意味している。**6.** の終りに述べた変形もこういう種類の変形であることは，式 (7.16) から $\underset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ と $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ の主軸が一致することを考えれば容易に知られる。われわれは，このような変形——$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と $D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ とが可換である変形——を第1種変形，そうでないものを第2種変形と呼ぶことにしよう。第1種変形には3軸引張り圧縮や単純曲げ変形などが含まれ，第2種変形は，変形が進むにつれて $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ の主軸の方向が変化する場合で，せん断変形を考慮しなければならない場合に当っている。第2種変形の取り扱いは一層複雑なものとなるので，これについては別の機会に述べることにしたい。

ここで，第1種変形の一例として2次元単純曲げ変形について説明する。図—**6** のように中立軸の曲率半径 ρ を変形のパラメーターにとり，曲率中心に関する極座標を Lagrange 座標として導入すれば，

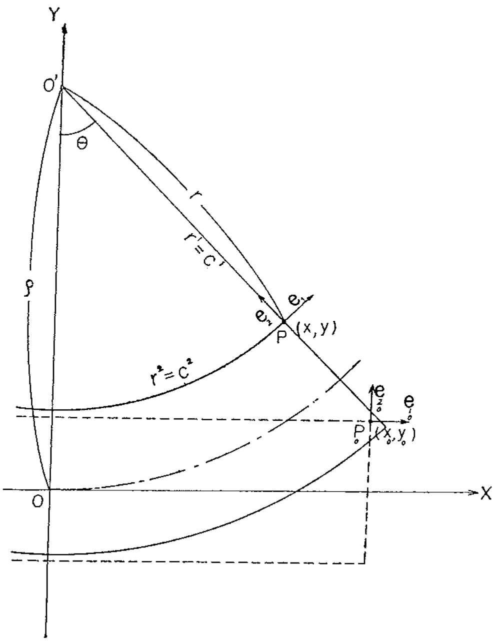
$$\rho\theta=x_0 \quad\cdots\cdots(8.1)$$

面積不変として，

$$\frac{\theta}{2}(\rho^2-r^2)=x_0y_0,\quad \therefore\ \frac{1}{2\rho}(\rho^2-r^2)=y_0\cdots(8.2)$$

ところで，

図—6



* $|\exp\boldsymbol{X}|=\exp(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{X})$，したがって，$|\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1|=1$ から $\mathrm{tr}(\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1)=0$。すなわち $\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1$，したがって ${}_t\boldsymbol{R}\cdot D(\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}_1)\cdot\boldsymbol{R}$ は偏差テンソルである。ただし，$\mathrm{tr}\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{X}$ のトレース $\boldsymbol{X}\cdot\cdot\boldsymbol{I}$ を示す。

** $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と $D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ とが可換の条件は $\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}-D\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\underset{0}{\boldsymbol{M}}=0$ から

$$\underset{0}{\boldsymbol{M}}\cdot\times D\underset{0}{\boldsymbol{M}}=0$$

$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ の主軸をとると

$$(\underset{0}{M}_{22}-\underset{0}{M}_{33})D\underset{0}{M}_{23}=(\underset{0}{M}_{33}-\underset{0}{M}_{11})D\underset{0}{M}_{31}$$

$$=(\underset{0}{M}_{11}-\underset{0}{M}_{22})D\underset{0}{M}_{12}=0$$

これから $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ の主値が3個とも異なっている場合は

$$D\underset{0}{M}_{23}=D\underset{0}{M}_{31}=D\underset{0}{M}_{12}=0$$

すなわち，$D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ も標準形となっていることがわかる。逆に $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と $D\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ とが同一主軸をもてば，その可換性は明らかである。

$$r=\sqrt{x^2+(\rho-y)^2},\ \theta=\tan^{-1}\frac{x}{\rho-y}\ \cdots\cdots(8.3)$$

ゆえに二つの座標関数として

$$\left.\begin{aligned} r^1(x,y)&=\rho\tan^{-1}\frac{x}{\rho-y}=x_0=C^1\\ r^2(x,y)&=y-\frac{x^2+y^2}{2\rho}=y_0=C^2\end{aligned}\right\}\cdots(8.4)$$

を得る。式 (8.4) を逆に解けば，

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{\rho(\rho-2C^2)}\sin\frac{C^1}{\rho}\\ y&=\rho-\sqrt{\rho(\rho-2C^2)}\cos\frac{C^1}{\rho}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8.5)$$

したがって，自然標構 $\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}$ は

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\boldsymbol{e}}&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial C^1}=\lambda(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\\ \underset{2}{\boldsymbol{e}}&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial C^2}=\frac{1}{\lambda}(-\sin\varphi,\ \cos\varphi)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8.6)$$

ただし

$$\lambda=\sqrt{\frac{\rho-2C^2}{\rho}},\ \varphi=\frac{C^1}{\rho}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.7)$$

となる。式 (8.6) の右辺の成分は基準の Descartes 座標系に関して示してある（以下も同様）。

初期状態では当然 $\rho\to\infty$ として

$$\underset{\substack{1\\0}}{\boldsymbol{e}}=(1,0),\qquad \underset{\substack{2\\0}}{\boldsymbol{e}}=(0,1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.8)$$

であるから，

$$\boldsymbol{J}=\overset{\substack{\kappa\\0}}{\boldsymbol{e}}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}=\begin{pmatrix}\lambda\cos\varphi & \lambda\sin\varphi\\ -\frac{1}{\lambda}\sin\varphi & \frac{1}{\lambda}\cos\varphi\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(8.9)$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

となり，

$$\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdots(8.10)$$

である。また

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\lambda\cos^2\varphi+\frac{1}{\lambda}\sin^2\varphi, & \left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\cos\varphi\sin\varphi\\ \left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\cos\varphi\sin\varphi, & \frac{1}{\lambda}\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi\end{pmatrix}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(8.11)$$

となる。

この場合，式(8.10)に示すように $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ は基準の Descartes 座標系に関してつねに標準形となっているから，$\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ の主軸の方向が変形の過程中変わらず，第1種変形であることを示している。

$$D\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\lambda^2}\end{pmatrix}D\lambda$$

は $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ と可換で

$$\underset{0}{\boldsymbol{M}}^{-1}\cdot D\underset{0}{\boldsymbol{M}}=D\log\underset{0}{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}D\log\lambda$$

また，

$$D\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{J}^{-1}\cdot D\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\cos2\varphi & \sin2\varphi\\ \sin2\varphi & -\cos2\varphi\end{pmatrix}\frac{D\lambda}{\lambda}$$
$$+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}D\varphi\ \cdots\cdots\cdots(8.12)$$

となり，この右辺から

$$D\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\cos2\varphi & \sin2\varphi\\ \sin2\varphi & -\cos2\varphi\end{pmatrix}\frac{D\lambda}{\lambda},\ D\boldsymbol{W}=2D\varphi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(8.13)$$

となっていることがわかる。式 (7.20) の関係なども容易に確かめることができる。

9. あ と が き

本論文では，有限変形に適用される変形の表現について，その定義，相互関係，力学的意味などについて説明を行なった。とくに変換テンソル $\boldsymbol{J}$ を基礎にして面素，体素の変換や，無限小変換，有限ひずみ，変形テンソルなどについて説明した。変形テンソル $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ は変形を示す量として主要なものであり，これによる変形の分類などについても述べたが，複雑な第2種変形などについてはさらに研究を進め，別の機会に論じたいと考えている。

Appendix 1. テンソルの symbolic 記法について

本論文ではテンソルの記法として主に symbolic 記法 (dyadic 記法) を用いている。この記法はベクトルやテンソルを index を付けず量そのものとして一つの記号で示そうとするものである。たとえば，テンソルに対して普通の記法にしたがうと，

$T^{\kappa\lambda}$（2階反変テンソル）

$T_{\kappa\lambda}$（2階共変テンソル）

$T^{\kappa}{}_{\lambda}$（1階反変1階共変テンソル）

$T_{\kappa}{}^{\lambda}$（1階共変1階反変テンソル）

の表現があるが，もしこれらの間に計量テンソル (metric tensor) $g_{\kappa\lambda}$ によって

$$g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}T^{\mu\nu}=g_{\kappa\mu}T^{\mu}{}_{\lambda}=g_{\lambda\mu}T_{\kappa}{}^{\mu}=T_{\kappa\lambda}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.1)$$

の関係があれば，共変底ベクトル (covariant base vector, 基底) $\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}$，反変底ベクトル (contravariant base vector，逆底) $\overset{\kappa}{\boldsymbol{e}}$ を用いて

$$T^{\kappa\lambda}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=T^{\kappa}{}_{\lambda}\underset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\overset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=T_{\kappa}{}^{\lambda}\overset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\underset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=T_{\kappa\lambda}\overset{\kappa}{\boldsymbol{e}}\overset{\lambda}{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{T}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.2)$$

と記すことができるので，$T^{\kappa\lambda}$，$T^{\kappa}{}_{\lambda}$ などは一つのテンソル $\boldsymbol{T}$ の異なった種類の成分と考えることができる。このように指標を付さない単一な表現をテンソルの symbolic 記法といい，高次のテンソルが現われないような場合には便利に用いることができる。テンソルを symbolic に $\boldsymbol{T}$ と記したものは，二つのベクトルを並べて記した $\boldsymbol{ab}$ (*dyad* という) と類似の性質をもつ (実際は dyad の和として表わされる) ので *dyadic* とも称され，この記法を dyadic 記法ともいう。以下，この記法につい

て必要な事項を説明する。

（1）乗　　積

symbolic 記法においては，下記のように乗積の演算を定義する。この際，成分について二つの量のどの指標とどの指標との間に演算が行なわれるかを明確にしておかなければならない。3次元の場合について説明すれば，

i）dyad 積

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$　　　$\gamma^{\kappa\lambda}=a^{\kappa}b^{\lambda}$

ii）内　積

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　　$c=g_{\kappa\lambda}a^{\kappa}b^{\lambda}=a^{\kappa}b_{\kappa}$

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\beta}$　　　$c^{\kappa}=g_{\lambda\mu}a^{\lambda}\beta^{\mu\kappa}$

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b}$　　　$c^{\kappa}=g_{\lambda\mu}\alpha^{\kappa\lambda}b^{\mu}$

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$　　　$\gamma^{\kappa\lambda}=g_{\mu\nu}\alpha^{\kappa\mu}\beta^{\nu\lambda}$

iii）外　積

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　　$c_{\kappa}=e_{\kappa\lambda\mu}a^{\lambda}b^{\mu}$

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}$　　　$\gamma_{\kappa}{}^{\lambda}=e_{\kappa\mu\nu}a^{\mu}\beta^{\nu\lambda}$

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{b}$　　　$\gamma^{\kappa}{}_{\lambda}=e_{\lambda\mu\nu}\alpha^{\kappa\mu}b^{\nu}$

iv）二重積*

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\cdot\boldsymbol{\beta}$　　　$c=g_{\kappa\lambda}g_{\mu\nu}\alpha^{\kappa\mu}\beta^{\lambda\nu}$

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\times\boldsymbol{\beta}$　　　$c_{\alpha}=g_{\kappa\lambda}e_{\alpha\mu\nu}\alpha^{\kappa\mu}\beta^{\lambda\nu}$

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\alpha}\times\cdot\boldsymbol{\beta}$　　　$c_{\alpha}=e_{\alpha\kappa\lambda}g_{\mu\nu}\alpha^{\kappa\mu}\beta^{\lambda\nu}$

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\times\boldsymbol{\beta}$　　　$\gamma_{\alpha\beta}=e_{\alpha\kappa\lambda}e_{\beta\mu\nu}\alpha^{\kappa\mu}\beta^{\lambda\nu}$

ここに，$e_{\kappa\lambda\mu}$ は

$$e_{\kappa\lambda\mu}=\sqrt{g}\,\varepsilon_{\kappa\lambda\mu} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.3)$$

で，$g=|g_{\kappa\lambda}|$，$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu}$ は Eddington のイプシロン（$\kappa\lambda\mu$ が 123 の偶順列なら1，奇順列なら −1，その他の場合0を示す）である。2次元の場合は $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu}$ の指標が一つ減るので，演算 × の結果は1次元低い量となる。

以上のように，乗積は成分を用いて定義されているが，結果は座標系のとり方に関係しない量であることに注意する。

（2）場としての考察

本論文で取り扱うような変形を表現する量は，物体の点の関数量（material 量）であって，物体の点に配置されたスカラー，ベクトル―，テンソル―場として考察される。しかし，その物体点自身が変形の前後で位置を変えているので，上記の場も，変形前で考えるか変形後で考えるかによって，仮に各点に配置される量は同一であっても空間の場としては異なったものとなる（以下，変形前，後で考えられた場をそれぞれ $\underset{0}{F}$, F で示すことにする**）けれども，われわれの考察する物体（$n(\leqq 3)$ 次元多様体）は一つの 3 次元 Euclid 空間 E の中に含まれているので，$\underset{0}{F}$ も F も共通の包括空間 E の中で考えることができる。このことから，場合によって，$\underset{0}{F}$ の点 $\underset{0}{P}$ の量を F の点 P に移して考えたり，$\underset{0}{F}$ の点 $\underset{0}{P}$ の量と F の点 P の量との間で演算を行なったりすることができるのである。また，量によっては，本来，$\underset{0}{F}$, F どちらの場の量とも考えることのできるものもある。

たとえば，変位ベルトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\underset{0}{\boldsymbol{r}}$ で与えられ，始点 $\underset{0}{P}$，終点 P のベクトルで $\underset{0}{P}$, P いずれの量とも考えることができる。式 (6.12), (6.13) では，$\boldsymbol{u}$ をそれぞれ $\underset{0}{P}$, P の量として扱っている。また，変換テンソル $\boldsymbol{J}$ は $d\boldsymbol{r}=d\underset{0}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}$ で与えられるから，前指標について $\underset{0}{P}$，後指標については P の量と考えることができる。このように，2種類の場にまたがる量は *connecting tensor* と呼ばれている。なお，式 (3.4) のような取り扱いは，$\boldsymbol{J}$ の後指標について P の量を $\underset{0}{P}$ に移して考察していることに相当する。

（3）material 表現と spatial 表現

material 表現は，物体点に固有な座標 C^{κ} を対応させ，一方，座標関数 r^{κ} が変形前後で変化するものである。したがって，$\underset{0}{F}$ の $\underset{0}{P}$, F の P はそれぞれ

$$\underset{0}{r}^{\kappa}=C^{\kappa},\quad r^{\kappa}=C^{\kappa} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.4)$$

で与えられる。自然標構（natural frame）は，$\underset{0}{F}$ と F とで2種類考えられ

$$\underset{0}{\boldsymbol{e}}_{\kappa}=\frac{\partial}{\partial C^{\kappa}}\underset{0}{\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{e}_{\kappa}=\frac{\partial}{\partial C^{\kappa}}\boldsymbol{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.5)$$

となる。したがって，指標 $\underset{0}{\kappa}$, κ によって場 $\underset{0}{F}$ で考えているか，F で考えているかがわかる。また，座標変換 $\kappa\rightarrow\lambda$ に対し，座標変換マトリックス

$$A_{\lambda}^{\kappa}=\frac{\partial C^{\kappa}}{\partial C^{\lambda}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.6)$$

は指標 $\underset{0}{\kappa}$, κ のいずれにも適用される。material 表現による量は座標 C^{κ} の関数と考えられている。

これに対し，spatial 表現では，空間に座標を固定し，物体点の位置の変化は

$$r^{\kappa}=\underset{0}{C}^{\kappa},\quad r^{\kappa}=C^{\kappa} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.7)$$

で示される。したがって，spatial 表現による量は，$\underset{0}{F}$ では $\underset{0}{C}^{\kappa}$ の関数，F では C^{κ} の関数と考える。自然標構は，$\underset{0}{F}$, F の両方に

$$\boldsymbol{e}_{\kappa}=\frac{\partial}{\partial C^{\kappa}}\boldsymbol{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,1.8)$$

が適用されるので，指標 κ だけからは，$\underset{0}{F}$, F いずれで考えられているのかがわからないことになる。このような不便があるので，本論文では特に断らない限り，material 表現を用いている。

Appendix 2. 変形にともなう微分

変形を調べる場合の微分としては，位置に関する微分 d と変形のパラメーター（ここでは時間 t とする）に関する微分 D とを区別して用いる。D は注目している物体の点に配置されている量 $\boldsymbol{X}$ が時間とともにいかに変化するかを示すもので，同じ量 $\boldsymbol{X}$ が spatial に

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},\ t)$$

と表現されているとすれば，

$$\begin{aligned}D\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}+D\boldsymbol{r},\,t+Dt)-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},\,t)\\&=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}Dt+D\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{X}\\&=\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{X}\right)Dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\,2.1)\end{aligned}$$

となる。ここに，右辺の第1項は点を spatial に固定して考えたときの時間微分，第2項は物体点の Dt 時間内の移動 $D\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}Dt$ に対する微分である。

この他，2次テンソル $\boldsymbol{X}$ に対しては Jaumann[1] の微分といわれるものがある。これは Dt 時間内に P から P' まで移動すると変形にともなって回転を生じるので，P' の量 $\boldsymbol{X}+D\boldsymbol{X}$ を P の量 $\boldsymbol{X}$ と比較するとき，この回転の分だけ元にもどして考察するのである。そのため式(5.3)の第2項――無限小回転――を用いる。Jaumann の微分を D_J とおけば，

---

* 二重積は $\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}\dot{\times}\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}\underset{\cdot}{\times}\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{\beta}$ のようにも記される。

** 従来，変形前，変形後の場で考察することを，それぞれ Lagrange の方法，Euler の方法と呼んでいる。しかし，この区別と material (Lagrange), spatial (Euler) 表現の区別とは別のものと考える方がよいと思う。

$$D_J X = \left(I - \frac{1}{2} I \times DW\right) \cdot (X + DX) \cdot \left(I + \frac{1}{2} I \times DW\right) - X$$
$$= DX + \frac{1}{2}(X \times DW - DW \times X) \quad \cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,2.2)$$

である。D_J を用いると

$$D_J \boldsymbol{\varepsilon} = (DE) - (DE)\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}\cdot(DE) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,2.3)$$

などの関係を導くことができる[15]。

Appendix 3. exp X, log X

X を一つのテンソルとするとき，exp X, log X はそれぞれ

$$\exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,3.1)$$

$$\log X = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (I - X)^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,3.2)$$

で定義される。式(A 3.1)は任意の X に対して，また式(A 3.2)は $|I-X| < 1$ の X に対して定義可能である（もちろん X がベキ零で級数が有限項で切れればこの制限は不要)。これらについてつぎの諸式が成り立つ。

$$\exp(\log X) = \log(\exp X) = X \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,3.3)$$

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp(X + Y) \quad (X\cdot Y = Y\cdot X \text{ の条件の下に}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,3.4)$$

$$\log(X\cdot Y) = \log X + \log Y \quad (\quad 〃 \quad) \cdots (\mathrm{A}\,3.5)$$

また，X と DX とが可換の条件の下に

$$D(\exp X) = \exp X \cdot DX = DX \cdot \exp X \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,3.6)$$

$$D(\log X) = X^{-1} \cdot DX = DX \cdot X^{-1} \quad (X^{-1} \text{ が存在すれば}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,3.7)$$

などが成り立つ。

Appendix 4. 群論的考察[19]

一般に n 次元の斉1次変換の全体は内積について一つの群をつくっている。これを斉1次変換群と称し，$GL(n, R)$ と記す。2次元の場合，**表―1** の A は同種類のもの同士の場合に可換であり，その場合に限って，$\boldsymbol{\Phi}_1$, $\boldsymbol{\Phi}_2$ の可換性から

$$\exp(\boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2) = \exp \boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \exp \boldsymbol{\Phi}_2 = \exp \boldsymbol{\Phi}_2 \cdot \exp \boldsymbol{\Phi}_1 \cdots (\mathrm{A}\,4.1)$$

すなわち，J の可換性が成立する。したがって，**表―1** i～iv の J はそれぞれ $GL(2, R)$ の可換な部分群をつくっていることがわかる。これらを膨張群，回転群，第1，第2すべり変形群などと呼ぶ。また $|\exp \boldsymbol{\Phi}| = \exp(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Phi})$ であるから，ii～iv については

$$|J| = 1, \quad \mathrm{tr}\, A = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{A}\,4.2)$$

が成り立つ。行列式1の斉1次変換全体は $GL(2, R)$ の部分群 $SL(2, R)$ をつくり，回転群 $SO(2)$ やすべり変形群はさらにその部分群となっているのである。また，i～iv の A は和についてそれぞれ一つの可換群をつくっている。さらに一般的にいえば，$GL(n, R)$ の一つの部分群 (Lie 群) G に対してそれぞれ一つの Lie 環 $\mathfrak{g}$ が対応しているのである。

参 考 文 献

1) Jaumann, G. : Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, Akad. Wiss. Wien Sitzber. (Ⅱa) **120** (1911), 385–530.
2) Seth, B.R. : Finite strain in elastic problems, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **234** (1935), 231–264.
3) Weissenberg, K. : La mécanique des corps déformables, Arch. Sci. Phys. Nat. Genève (5) **17** (1935), 44–106, 130–171.
4) Murnaghan, F.D. : Finite deformation of an elastic solid, Amer. J. Math. **59** (1937), 235–260.
5) Mooney, M. : A theory of large elastic deformation, J. Appl. Phys. **11** (1940), 582–592.
6) Rivlin, R.S. : Large elastic deformations of isotropic materials Ⅰ～Ⅷ, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **240** (1948), 459–490, 491–508, 509–525, **241** (1948) 379–397. Proc. Roy. Soc. London (A) **195** (1949), 463–473, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **242** (1949), 173–195, **243** (1951), 251–288, 289–298.
7) Richter, H. : Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor bei endlichen Formänderungen, Z. Angew. Math. Mech. **29** (1949), 65–75.
8) Seth, B.R. : Some recent applications of the theory of finite elastic deformation, Proc. Symp. Appl. Math. Ⅲ Elasticity, McGraw-Hill (1950), 67–84.
9) Murnaghan, F.D. : Finite Deformation of an Elastic Solid, John Wiley & Sons (1951).
10) Truesdell, C. : The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, J. Rat. Mech. Anal. **1** (1952), 125–300, corrections and additions. **2** (1953), 593–616.
11) 吉村慶丸：塑性力学，応用力学講座，共立 (1957).
12) 吉村慶丸：連続体の力学，特に有限変形理論の根本問題 Ⅰ，Ⅱ，日本機械学会論文集（Ⅰ）25 巻 151 号 (1959), 122–129, 129–132.
13) 吉村慶丸：非線形，有限変形弾性理論（Ⅰ)，(Ⅱ)，日本機械学会論文集（Ⅰ）26 巻 167 号 (1960), 988–994, 995–1004.
14) Green, A.E. and Adkins, J.E. : Large Elastic Deformations, Oxford (1960).
15) Prager, W. : Introduction to Mechanics of Continua, Ginn (1961).
16) Sedov, L.I. : Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium (translated from the Russian), Addison-Wesley (1965).
17) Schouten, J.A. : Tensor Analysis for Physicists, 2 nd ed., Oxford (1954).
18) 矢野健太郎：幾何学，現代応用数学，岩波 (1957).
19) 山内恭彦，杉浦光夫：連続群論入門，培風館 (1960).

(1965.12.2・受付)