

## せん断力を受ける舗装の応力について

STUDIES ON THE STRESS DISTRIBUTION IN PAVEMENTS  
SUBJECTED TO SHEAR LOADS

木 村 孟\*

By Tsutomu Kimura

**要 旨** 本文は、境界面が完全に粗であるような弾性二層系地盤の表面に一方向せん断力が働いた場合について、応力の表示式を求め、道路の舗装に例をとって実用的な範囲で数値計算を行ない、上層と下層との弾性係数比  $E_1/E_2$  を大きくすることによって下層に働くせん断応力を大幅に減らし得ることを示したものである。

## 1. 概 論

二層系地盤に関する研究は、古くから多くの人々によって行なわれてきた。松村博士<sup>1)</sup>は主として、弾性地盤の表面沈下という観点から二層系地盤を考察し、ある程度の数値計算を行なって、基礎地盤の沈下計算にこれを利用してゐる。Marguerre, K.<sup>2)</sup> は二層の境界面が滑らかな場合についてきわめて数学的に取り扱い、若干の数値計算を行なって、境界面が粗である場合よりも計算が容易であると述べている。Spangler, M.G.<sup>3)</sup> は、載荷中心点下の路盤上の応力式を実験的に求め、これと Holl, H.D. の提案した応力式を用いて、路盤上の応力を舗装厚の関数で表わした。

さらに Burmister, D.M.<sup>4),5)</sup> は、弾性二層系地盤の表面に一樣な垂直力が働いた場合について多くの数値計算を行なって、数表および図表を作製した。彼は、これを用いて飛行場や道路などの実際の例についてかなりくわしい解析を試み、上層と下層との弾性係数比  $E_1/E_2$  を大きくすることによって下層へ伝達される応力を減らすことはできるが、その効果は載荷半径と上層の厚さとの比  $a/h$  および弾性係数比  $E_1/E_2$  の変化によって大きな影響を受けることを示した。また、彼<sup>6)</sup> は、表面に垂直力が働いた場合に弾性体内に起こるせん断力を数値的に求め垂直応力との関係を示し、弾性係数比  $E_1/E_2$  を大きくすることによって下層に伝わる応力を減らすことはできるが、上層のせん断応力が増加し、上層がくり返し荷重によって破壊する危険があるので、舗装の構造としては、弾性係数比のあまり変わらない材料を順次積み上げていくのが望ましいと結論している。

以上述べた例はいずれも表面に垂直力が働いた場合に関する解析であり、表面にせん断力のような水平な荷重が働く場合について解析を試みたものはあまり見当らない。

Barber, E.S.<sup>7)</sup> は舗装の表面には、つぎに述べるよう

な二種類のせん断力が働くといっている。すなわち、車両の空気タイヤは空気圧によって大きなプレストレスを受けているが、これが路面に接し車体からの垂直な荷重を受けるとタイヤは横方向に伸びプレストレスが少なくなって、路面にはタイヤの伸びた方向と逆方向つまり載荷面の中心に向ってせん断力が働く。また路面とタイヤとの間にはかなりの摩擦があるから、垂直力の分力としてふつつ、車の進行方向あるいはこれとほぼ直角な方向に水平力すなわちせん断力が働く。前者を求心的せん断力、後者を一方向せん断力と名づけている。

Marwick, A.H.D.<sup>8)</sup> や Bonse, P.H.<sup>9)</sup> は路面に働く求心的せん断力は、垂直力と同じくらいの大きさになることを報告している。また最近では車両が非常に高速化しているためにすべりに対する安全性が非常に問題となり、舗装面に少しでも大きなすべり抵抗性をもたせようとする傾向にある。したがって路面の摩擦係数を測定したデータには、1.0 に非常に近い値があることもまればないといわれていることから、曲線部を車両が通過する時や、加速・制動を行なう時に路面に働く一方向せん断力も垂直力と同じくらいの大きさになり得ると考えられる。このように垂直力について解析を行なうことと同様に、表面にせん断力が働く場合について解析することは非常に重要であると思われる。

牟岐教授<sup>10)</sup> は、表面に一樣な一方向せん断力を受ける均一な弾性地盤内の応力および変位成分の表示式を求め、表面に働くせん断力がどのように地盤内に分散するかを数値的に検討した。

Barber, E.S.<sup>7)</sup> は、先に述べたような二種類のせん断力を考え、それぞれの力が均一な弾性地盤の表面に働いた場合について数値解析を試み、垂直応力は垂直力だけが働くことと仮定した場合よりもかなり大きくなることを指摘し Meyerhoff の求めた支持力式を用いて、水平荷重の垂直荷重に対する比が増すにつれて支持力が減少することを示している。

上にあげた例はいずれも均一な地盤に関する研究であり、二層系以上の多層構造として取り扱った例はほとんど見当らないので、一応厳密な解析を行なって基本的知識を整えておくことの必要性が認められよう。

本論文では、道路の構造を理想化し、路盤以下の層といわゆる舗装とがその境界面が完全に粗 (rough) となるように組み合わせられたものであると考え、この表面に

\* 正会員 東京工業大学助手 工学部土木工学科

一様な方向せん断力が働いた場合にその力が舗装および地盤内でどのように分布するかを数値計算によって明らかにした。

さらに、表面に垂直力が働いた場合とせん断力が働いた場合とについて、載荷面の中心軸上で最大せん断応力を数値的に求め、両者における分布形状の差異を調べ、またこれらと均一地盤における応力とを比較検討した。

2. 解析方法および結果

(1) 基本解

三次元の弾性方程式は、変位成分  $u, v, w$  を応力関数  $\Phi, \psi$  によって

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v &= -\frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ w &= 2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.1)$$

ただし、 $\nu$  は Poisson 比

と表わす<sup>10)</sup>と、つぎの陪調和関数および調和関数に帰結される。すなわち

$$\nabla^4 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0 \dots\dots\dots(1.2)$$

また応力成分はつぎのごとくに書き表わされる<sup>10)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \sigma_\theta &= 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \\ \tau_{\theta z} &= 2\mu \frac{\partial}{r \partial \theta} \{ (1-\nu) \nabla^2 \Phi \} \\ \tau_{zr} &= 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} + \frac{\partial^2 \psi}{r \partial \theta \partial z} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m + 2 E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m - 2 F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m - 2 E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m + 2 F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \cos m \theta \\ v &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m + 2 E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m - 2 F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m - 2 E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m + 2 F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \sin m \theta \\ w &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \{ (-A_m \xi^2 + 2 B_m \xi \overline{1-2\nu} - B_m z \xi^2) e^{\xi z} \right. \\ &\quad \left. - (C_m \xi^2 + 2 D_m \xi \overline{1-2\nu} + D_m z \xi^2) e^{-\xi z} \} \xi J_m(\xi r) d\xi \right] \cos m \theta \\ \sigma_r &= 2\mu \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi^3 + B_m \xi^2 \overline{1+2\nu} + B_m z \xi^3) e^{\xi z} - (C_m \xi^2 - D_m \xi^2 \overline{1+2\nu} + D_m z \xi^3) e^{-\xi z} \} \xi J_m(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{m+1}{2r} \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m + 2 E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m + 2 F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{m-1}{2r} \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m + 2 E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m + 2 F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \cos m \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} \left\{ \frac{\Phi}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \dots\dots\dots(1.3)$$

ただし、 $\mu$  は Lamé の定数。

$\Phi, \psi$  をそれぞれ

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(r, z) \cos m \theta \\ \psi(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(r, z) \sin m \theta \end{aligned}$$

と分離し、 $\Phi_m(r, z)$  および  $\psi_m(r, z)$  の Hankel Transform<sup>11)</sup> を

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} r \Phi_m(r, z) J_m(\xi r) dr &= G_m(\xi, z) \\ \int_0^{\infty} r \psi_m(r, z) J_m(\xi r) dr &= H_m(\xi, z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.4)$$

と書けば、式(1.2)を解くことはつぎの微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) G_m(\xi, z) &= 0 \\ \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) H_m(\xi, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.5)$$

を解くことと同じになり、解は

$$\left. \begin{aligned} G_m(\xi, z) &= (A_m + B_m z) e^{\xi z} + (C_m + D_m z) e^{-\xi z} \\ H_m(\xi, z) &= E_m e^{\xi z} + F_m e^{-\xi z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.6)$$

となる。ここに、 $A_m, B_m, \dots, F_m$  は境界条件から求まる定数である。

つぎに式(1.4)の逆変換を行なうと

$$\begin{aligned} \Phi_m(r, z) &= \int_0^{\infty} \xi G_m(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \\ \psi_m(r, z) &= \int_0^{\infty} \xi H_m(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \end{aligned}$$

となって  $\Phi_m(r, z)$  と  $\psi_m(r, z)$  とが決まる。したがってこれを式(1.1)および式(1.3)に代入すれば変位成分と応力成分の一般式はつぎのごとくなる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta &= 2\mu \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} (2B_m \xi^2 e^{\xi z} + 2D_m \xi^2 e^{-\xi z}) \xi J_m(\xi z) d\xi \right. \\
 &\quad + \frac{m+1}{2r} \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m + 2E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m - 2F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \\
 &\quad \left. + \frac{m-1}{2r} \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m - 2E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m + 2F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \cos m\theta \\
 \sigma_z &= 2\mu \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \{ (-A_m \xi + B_m \overline{1-2\nu} - B_m z \xi) e^{\xi z} + (C_m \xi + D_m \overline{1-2\nu} + D_m z \xi) e^{-\xi z} \} \xi^3 J_m(\xi r) d\xi \right] \cos m\theta \\
 \left. \begin{aligned}
 \tau_{\theta z} \\
 \tau_{rz}
 \end{aligned} \right\} &= \mu \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m \overline{2\nu + \xi z} + E_m) e^{\xi z} + (C_m \xi - D_m \overline{2\nu - \xi z} - F_m) e^{-\xi z} \} \xi^3 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\
 &\quad \left. \pm \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m \overline{2\nu + \xi z} - E_m) e^{\xi z} + (C_m - D_m \overline{2\nu - \xi z} + F_m) e^{-\xi z} \} J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{cases} \\
 \tau_{r\theta} &= \mu \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} (E_m e^{\xi z} + F_m e^{-\xi z}) \xi^3 J_m(\xi r) d\xi \right. \\
 &\quad - \frac{m+1}{2r} \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m + 2E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m - 2F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \\
 &\quad \left. + \frac{m-1}{2r} \int_0^{\infty} \{ (A_m \xi + B_m z \xi + B_m - 2E_m) e^{\xi z} - (C_m \xi + D_m z \xi - D_m + 2F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \sin m\theta \Bigg\} \dots\dots\dots(1.7)
 \end{aligned}$$

(2) 二層半無限体の表面にせん断力が働く場合

ここでは、せん断力として図-1 に示すとき一様な一方向せん断力を考える。上層の関数、定数には suffix 1, 下層のそれらには suffix 2 をつけて表わすことにする。

無限遠では、応力および変位成分が消滅してしまわねばならないから、式(1.5)の解は各層に対してつぎのごとくとられねばならない。すなわち

○上層

$$\left. \begin{aligned}
 G_{m1}(\xi, z) &= (A_{m1} + B_{m1} z) e^{\xi z} + (C_{m1} + D_{m1} z) e^{-\xi z} \\
 H_{m1}(\xi, z) &= E_{m1} e^{\xi z} + F_{m1} e^{-\xi z}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.1)$$

○下層

$$\left. \begin{aligned}
 G_{m2}(\xi, z) &= (C_{m2} + D_{m2} z) e^{-\xi z} \\
 H_{m2}(\xi, z) &= F_{m2} e^{-\xi z}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.2)$$

境界条件は、表面で垂直応力が働かないことおよび境界面上で応力と変位の成分が連続であることからつぎのように与えられる。

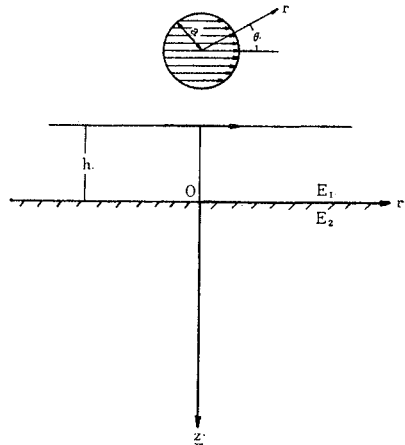
$$\left. \begin{aligned}
 z = -h \text{ で} \\
 \sigma_z &= 0 \\
 \tau_{\theta z} &= -P_0 [1 - S_a(r)] \sin \theta \\
 \tau_{rz} &= P_0 [1 - S_a(r)] \cos \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 z = 0 \text{ で} \\
 u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2 \\
 \sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

○上層

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{z1} &= p P_0 \left[ \int_0^{\infty} \frac{N^2 e^{-2x} + 2x^\alpha (1+\alpha)x - N \{ (x+x\alpha - 2x^2\alpha) e^{2x\alpha} + (x+x\alpha + 2x^2\alpha) e^{-2x} \} + x(1+\alpha)}{N^2 e^{-4x} - 2N e^{-2x} (2x^2 + 1) + 1} \right. \\
 &\quad \left. \times e^{-x(1+\alpha)} J_1(sx) J_1(px) dx \right] \cos \theta
 \end{aligned} \right\}$$

図-1 二層地盤のモデル



ただし

$$P_0 = \frac{P}{\pi a^2}, \quad S_a(r) = \begin{cases} 1; & r < a \\ 0; & r > a \end{cases}$$

とする。

これらの9個の条件を用いれば、9個の定数 ( $A_{m1}$ ,  $B_{m1}$ ,  $\dots$ ,  $C_{m2}$ ,  $\dots$ ,  $F_{m2}$ ) を決める9元一次方程式が得られる。これを解いて式(2.1), (2.2)に入れさらに式(1.7)に代入すると変位および応力成分の表示式が求められる。いま上層と下層との Poisson 比を 1/2 と仮定し、さらに

$$\xi h = x, \quad \alpha = \frac{z}{h}, \quad s = \frac{r}{h}, \quad p = \frac{a}{h} \dots\dots\dots(2.5)$$

とおくと、本論文で必要なる応力成分  $\tau_{\theta z}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\sigma_z$  はつぎのごとくに表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \tau_{\theta z_1} \\ \tau_{r z_1} \end{aligned} \right\} &= \frac{pP_0}{2} \left[ - \int_0^\infty \left[ \frac{N^2 e^{-2x+2x\alpha}(1+x+x\alpha) + N\{(2x^2\alpha+x-x\alpha-1)e^{2x\alpha} + (2x^2\alpha+x\alpha-x-1)e^{-2x}\} + \{1-x(1+\alpha)\}}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1-Ne^{2\alpha x}}{1-Ne^{-2x}} \right] e^{-x(1+\alpha)} J_2(sx) J_1(px) dx \right. \\ &\quad \left. \mp \int_0^\infty \left[ \frac{N^2 e^{-2x+2x\alpha}(1+x+x\alpha) + N\{(2x^2\alpha+x-x\alpha-1)e^{2x\alpha} + (2x^2\alpha+x\alpha-x-1)e^{-2x}\} + \{1-x(1+\alpha)\}}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-Ne^{2\alpha x}}{1-Ne^{-2x}} \right] e^{-x(1+\alpha)x} J_0(sx) J_1(px) dx \right] \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

○下層

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_2} &= pP_0 \left[ - \int_0^\infty \frac{Ne^{-2x}\{x+x\alpha+2x^2\alpha\} - x(1+\alpha)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} (1-N)e^{-x(1+\alpha)} J_1(sx) J_1(px) dx \right] \cos \theta \\ \left. \begin{aligned} \tau_{\theta z_2} \\ \tau_{r z_2} \end{aligned} \right\} &= \frac{pP_0}{2} \left[ - \int_0^\infty \left[ \frac{Ne^{-2x}(2x^2\alpha+x\alpha-x-1) - (x\alpha+x-1)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} - \frac{1}{1-Ne^{-2x}} \right] \right. \\ &\quad \left. \times (1-N)e^{-x(1+\alpha)} J_2(sx) J_1(px) dx \right. \\ &\quad \left. \mp \int_0^\infty \left[ \frac{Ne^{-2x}(2x^2\alpha+x\alpha-x-1) - (x\alpha+x-1)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} + \frac{1}{1-Ne^{-2x}} \right] \right. \\ &\quad \left. \times (1-N)e^{-x(1+\alpha)} J_0(sx) J_1(px) dx \right] \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.7)$$

ただし,  $N = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$

(3) 結果の検討

前項で求めた表示式について少し検討を行なってみる。z = -h すなわち α = -1 とおくと式 (2.6) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_1} &= 0 \\ \left. \begin{aligned} \tau_{\theta z_1} \\ \tau_{r z_1} \end{aligned} \right\} &= \mp pP_0 \int_0^\infty J_0(sx) J_1(px) dx \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \mp P_0 [1 - S_a(r)] \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}^{(13)}$$

となり, z=0 すなわち α=0 とおくと式 (2.6), (2.7) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_1} &= pP_0 \left[ - \int_0^\infty \frac{(Ne^{-2x}-1)(1-N)xe^{-x}}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} J_1(sx) J_1(px) dx \right] \cos \theta = \sigma_{z_2} \\ \left. \begin{aligned} \tau_{\theta z_1} \\ \tau_{r z_1} \end{aligned} \right\} &= \frac{pP_0}{2} \left[ - \int_0^\infty \left[ \frac{Ne^{-2x}(1+x) + (x-1)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} + \frac{1}{1-Ne^{-2x}} \right] (1-N)e^{-x} J_2(sx) J_1(px) dx \right. \\ &\quad \left. \pm \int_0^\infty \left[ \frac{Ne^{-2x}(1+x) + (x-1)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} - \frac{1}{1-Ne^{-2x}} \right] (1-N)e^{-x} J_0(sx) J_1(px) dx \right] \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

また, ここでは省略したが変位も連続であることは容易に証明できるから, (2) で求めた解は境界条件(2.3), (2.4) を満足している。

つぎに, 二層の場合の解を適当に変形して一層の場合の解を求めてみる。式(2.6)の τ<sub>θz1</sub>, τ<sub>rz1</sub> の式を式(2.5)で変換する前の形にもどして z=z'-h とおいて h → ∞ とすると

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z_1} \\ \tau_{r z_1} \end{aligned} \right\} = \frac{aP_0}{2} \left[ \int_0^\infty \xi z' e^{-\xi z'} J_1(a\xi) J_2(r\xi) d\xi \right. \\ \left. \pm \int_0^\infty (\xi z' - 2) e^{-\xi z'} J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi \right] \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

となつて, 牟岐教授の求めた一層の場合の解と等しい解

が得られる。他の応力成分および変位成分についても同様にして一層の場合の解が求められる。

ここで垂直力とせん断力とが舗装に与える影響がどのように異なるかを知るために, 載荷中心点での最大せん断応力の表示式を求めてみた。せん断力が働く場合には τ<sub>max</sub> = τ<sub>rz</sub> であり, 垂直応力が働く場合には τ<sub>max</sub> = (σ<sub>z</sub> - σ<sub>r</sub>)/2 であるから, θ = 0 のときに最大となり

$$\left. \begin{aligned} \text{a) せん断力が働くとき} \\ \text{一層: } \tau_{\max} &= \frac{P_0}{2} \left[ \int_0^\infty (2-x\delta) e^{-x\delta} J_1(x) dx \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

ただし, δ = z/a

$$\left. \begin{aligned} \text{二層} \left\{ \begin{aligned} \text{上層: } \tau_{\max} &= \frac{pP_0}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{N^2 e^{-2x+2x\alpha}(1+x+x\alpha) + N\{(2x^2\alpha+x-x\alpha-1)e^{2x\alpha} + (2x^2\alpha-x+x\alpha-1)e^{-2x}\} + \{1-x(1+\alpha)\}}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-Ne^{2\alpha x}}{1-Ne^{-2x}} \right] \times e^{-x(1+\alpha)} J_1(px) dx \\ \text{下層: } \tau_{\max} &= \frac{pP_0}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{Ne^{-2x}(2x^2\alpha+x\alpha-x-1) - (x\alpha+x-1)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} + \frac{1}{1-Ne^{-2x}} \right] \\ &\quad \times (1-N)e^{-x(1+\alpha)} J_1(px) dx \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

b) 垂直力が働くとき

$$\text{一層: } \tau_{\max} = P_0 \int_0^{\infty} (1 + \delta x) J_1(x) dx \dots\dots\dots (3.3)$$

ただし,  $\delta = z/a$

$$\left. \begin{array}{l} \text{上層: } \tau_{\max} = -\frac{3pP_0}{4} \int_0^{\infty} \left[ \frac{N^2 e^{-2x+2x\alpha}(x+x\alpha) - N\{(2x^2\alpha+x+x\alpha)e^{2x\alpha} + (2x^2\alpha-x-x\alpha)e^{-2x}\} - x(1+\alpha)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} \right] \\ \quad \times e^{-x(1+\alpha)} J_1(px) dx \\ \text{下層: } \tau_{\max} = \frac{3pP_0}{4} \int_0^{\infty} \left[ \frac{Ne^{-2x}(2x^2\alpha-x-x\alpha) + x(1+\alpha)}{N^2 e^{-4x} - 2Ne^{-2x}(2x^2+1) + 1} \right] (1-N)e^{-x(1+\alpha)} J_1(px) dx \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3.4)$$

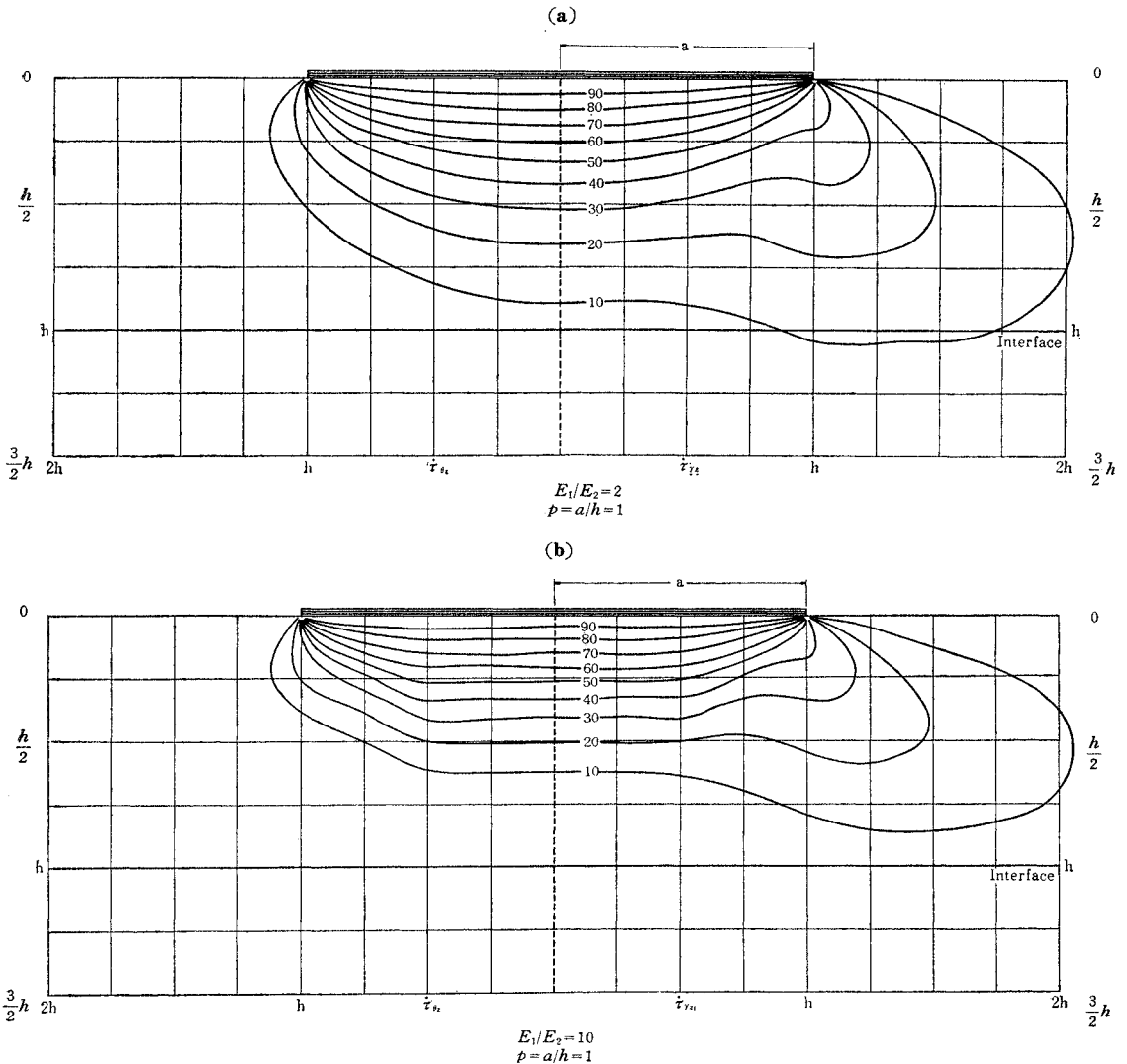
(4) 数値計算

表面に働くせん断力の分布を明らかにするために式(2.6)および式(2.7)の  $\tau_{\theta z}$ ,  $\tau_{rz}$  の式を, 載荷面の半径と上層厚さとの比  $p=a/h$  が 1, 2, 弾性係数比  $E_1/E_2$  が 2, 5, 10, 50, 100, 1000 の場合について積分し, これを 図-2 (a)~(f) にまとめた。なお図中の  $\bar{\tau}_{\theta z}$  および  $\bar{\tau}_{rz}$  は, それぞれ  $\tau_{\theta z}/P_0$  および  $\tau_{rz}/P_0$  の最大値を表わ

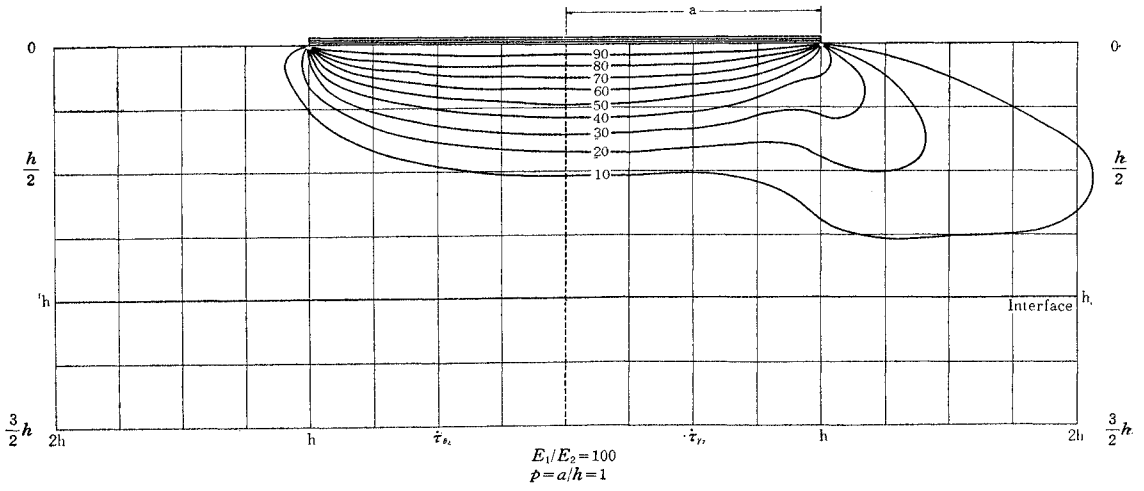
すものであり, 圧力球根上の数値は作用した外力に対する百分率を示すものである。

また式(3.2)と(3.4)を  $p=1, 2$ ,  $E_1/E_2=2, 10, 100$  の条件のもとに積分し, 式(3.1)および(3.3)を積分した結果と総合して 図-3 (a)~(b) に示した。計算には, 東京大学大型計算機センターの HITAC 5020 を利用した。

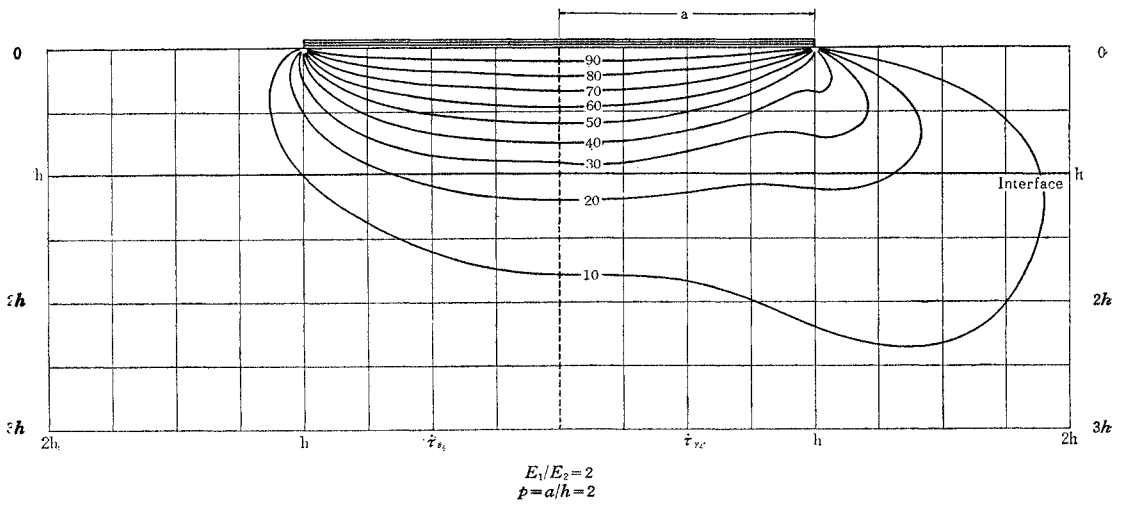
図-2 (a)~(f) 表面に一樣なせん断力を受けた場合の等せん断力図



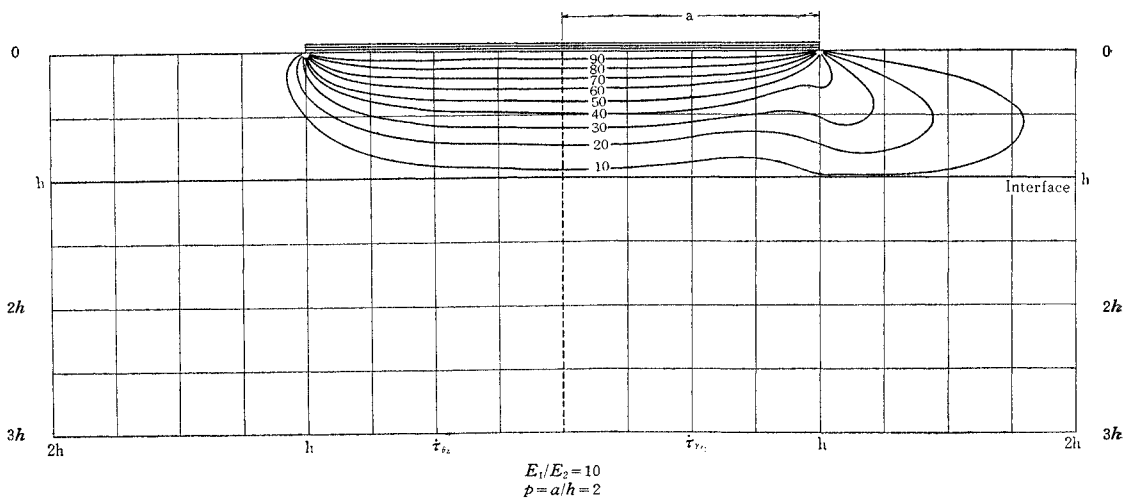
(c)



(d)



(e)



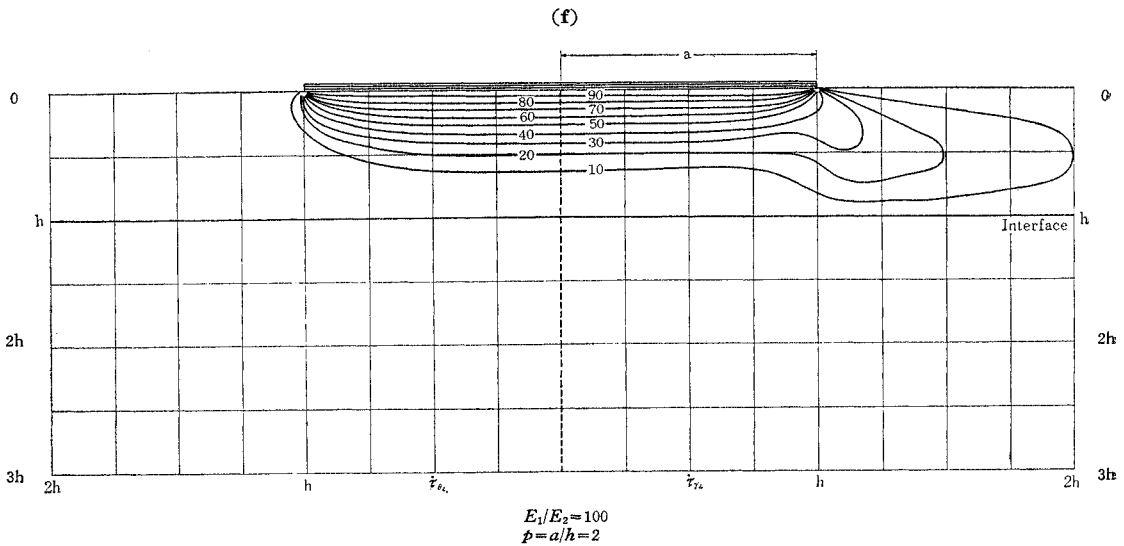


図-3 表面に一樣な垂直力が働いた場合と一樣なせん断力が働いた場合における載荷面中心下の最大せん断応力の分布

### 3. 結 語

表面に働くせん断力によるせん断応力の舗装および地盤内における分散形状に関しては、

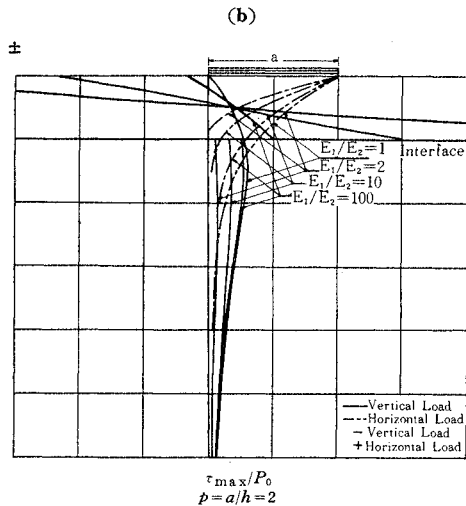
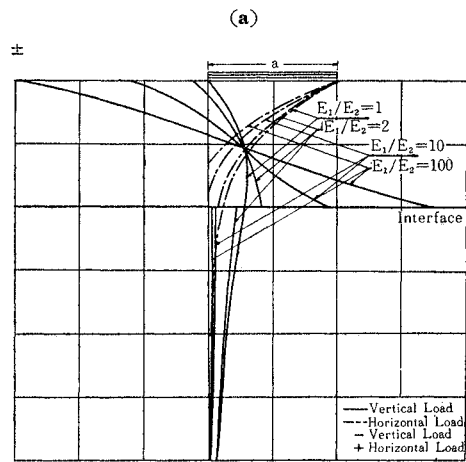
(1) 垂直荷重が働いた場合の垂直応力の分散形状<sup>12)</sup>と異なり、せん断荷重によるせん断応力は深さ方向へはあまり分散せず、むしろ表面に近いところで著しく横方向に分散している。いわば荷重の作用する方向に拡がって行くものと考えられる。

(2)  $\dot{\tau}_{\theta z}$  は  $\dot{\tau}_{rz}$  にくらべて横への分散の仕方がきわめて少ない。これは  $\dot{\tau}_{rz}$  が荷重方向の応力であり、 $\theta=0$  のときには表面では載荷応力がそのまま  $\tau_{rz}$  になるからであろう。

(3) 均一な層の場合とくらべると、二層の場合にははなはだしく上層へ応力集中を起こしており、それが弾性係数比  $E_1/E_2$  によって大きく影響を受けることは垂直力が働いた場合に Burmister, D.M.<sup>5)</sup> が報告した結果と同じであるが、応力集中の程度は垂直力が働いた場合よりも著しいようである。また横方向への分散は  $E_1/E_2$  の値によってほとんど影響を受けていない。

(4) 載荷面積を一定と考えると、上層が薄い場合にはせん断応力の縦方向への分散は少なくなるが横方向にはそれ程大きな差異が見られない。また  $E_1/E_2$  が大きくなると載荷面積の影響はほとんどなくなるようである。

(5)  $\dot{\tau}_{rz}$  の圧力球根はある応力以下になると中心軸から少し離れたところつまり載荷円の端部付近で下にふくれているが、これはある深さの水平面上で考えると最大応力が中心軸から少し離れた所で生ずることを示している。Barber, E.S.<sup>7)</sup> が述べているように、この応力は舗装を層構造とした場合には bond stress として働くと考えられるから層間の接着性がこの応力を越えないようしなければならないものと思われる。



また最大せん断応力に関しては、

(1) せん断荷重の場合には、最大せん断力は  $E_1/E_2$  の値のいかんにかかわらず上層に集中する傾向があり、ことに  $E_1/E_2$  が大きくなると下層にはほとんど応力が働かなくなる。垂直荷重の場合には、最大せん断応力の集中の程度は  $E_1/E_2$  の値によってはなほだしく影響を受けるようである。

(2) 垂直荷重の場合には、上層の応力は  $E_1/E_2$  の値にかかわらず、下層の応力は  $E_1/E_2$  の大きいところで、層厚の影響をかなり受けるが、せん断荷重の場合にはこのような傾向があまり見られない。したがってせん断荷重に対処するためには層厚を増してもさ程効果がないものと推察される。また垂直荷重の場合には、 $E_1/E_2$  が大きくなると下層の応力は減少するが上層の応力が増加し、ことに上層の厚さが減ると応力が急激に増加するから、弾性係数の大きな材料を舗装に使用するからといって厚さを薄くすることは安全な方法とはいえないであろう。

(3) 竹下教授<sup>13)</sup>は、アスファルト舗装厚の決定法の一つとして、均一弾性地盤の表面に垂直応力  $P_0$  が働いた場合の中心軸上の最大せん断応力を考え、その最大値の80%の応力のところまでをアスファルト混合物の層の中に入れ、路盤中には最大応力の80%以下しか働かせないような考え方を提案している。この方法によって舗装厚を求めると  $1/p=h/a=1.25$  くらいとなり、路盤中の最大応力はほぼ  $0.23 P_0$  程度となる。つぎにこれを二層地盤の場合にあてはめてみると、アスファルト舗装の場合には実用的には  $E_1/E_2=2\sim 20$  と考えられるから、路盤中に働く最大せん断応力は大略  $0.15\sim 0.18 P_0$  となり、竹下教授の示した値よりも小さくなっている。したがって舗装厚を  $h=1.51 a$  とするのは少し大きすぎ、図-2によれば  $h=a$  くらいが適当であると思われる。

(4) いま述べたごとく実用的にはアスファルト舗装では  $E_1/E_2=2\sim 20$  であるのに対し、コンクリート舗装では  $E_1/E_2=100\sim 500$  と考えられるから、外力の大きさがせん断力および垂直力とで等しいとすれば、アスファルト舗装はせん断荷重に対して危険であり、コンクリート舗装は垂直荷重に対して危険であるといえる。したがって、アスファルト舗装では、交差点などの車輛の始動・制動によるせん断荷重の多く働く場所で表面に波を生じやすく破壊しやすいことも当然のことであるといえよう。

(5) 舗装の手軽な補修法としてアスファルト混合物によるオーバーレイングがさかんに行なわれているが破壊されている例がきわめて多い。これはオーバーレイングの厚さが薄いために在来舗装との接着部にかなり大きなせん断応力が働くことが原因と思われる。したがってこれを有効に行なうためには、接着性のよい材料を用いるか厚さを増すかして大きなせん断応力に耐え得るような構造にしなければならないものと思われる。

終りに、本研究にあたって終始ご指導と御援助を戴いた東京大学の最上教授、中央大学の竹下教授および東京工業大学の山口教授に対し深く感謝申し上げる次第であります。

#### 参考文献

- 1) 松村孫治：“弾性地盤における基礎の沈下に関する理論的研究”，土木学会誌，17巻9号，1931。
- 2) Marguerre, K.：“Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der kontinuierlich gestuetzten Platte”，Ingenieur-Archiv, Vol. IV, 1933.
- 3) Spangler, M.G.：“The Structural Design of Flexible Pavements”，Proceedings of H.R.B., Vol. 23, 1943.
- 4) Burmister, D.M.：“The Theory of Stresses and Displacements in Layered System and Applications to Airport Runways”，Proceedings of H.R.B., Vol. 23, 1943.
- 5) Burmister, D.M.：“The General Theory of Stresses and Displacements in Layered System”，Journal of Applied Physics, Vol. 16, 1945.
- 6) Burmister, D.M.：“Applications of Layered System Concepts and Principles to Interpretations and Evaluations of Asphalt Pavement Performances and to Design and Construction”，Proceedings of 1st International Conference on the Structural Design of the Asphalt Pavements. Michigan, 1962.
- 7) Barber, E.S.：“Shear Loads on Pavements”，Proceedings of 1st International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements. Michigan, 1962.
- 8) Marwick, A.H.D. and Starks, H.J.H.：“Stresses between Tire and Load”，Journal, Inst. of Civil Engineers, 16 (7), 1941.
- 9) Bonse, R.P.H. and Kuhn, S.H.：“Dynamic Forces Exerted by Moving Vehicles on a Road Surface” Bull. H.R.B., 1959.
- 10) Muki, R.：“Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-finite solid and a thick plate”，Progress in Solid Mechanics. Vol. 1.
- 11) Sneddon, I.N.：“Fourier Transforms”，New York, 1951.
- 12) “Bituminous Materials in Road Construction”，Road Research Laboratory, London, 1962.
- 13) 竹下春見：“アスファルト舗装に関する対数グラフの応用”，道路，40年9月

(1966.3.26・受付)