

二層粘弾性地盤内の応力とその舗装体への適用法

A STUDY ON STRESSES IN TWO-LAYER VISCOELASTIC SYSTEM AND ITS APPLICATIONS TO PAVEMENT PROBLEMS

石原 研 而*

By Kenji Ishihara

1. まえがき

道路の舗装体を二層または三層の弾性体とみなして、表面沈下や内部応力分布を計算し、それが許容沈下または破壊応力以内はおさまるように舗装厚さや材料を選択する方法が考えられる。舗装体の層系を弾性論によって取り扱う試みは Burmister¹⁾ や L. Fox²⁾ によってすでになされており、それを実験的に検討して設計に役立てようとする努力は竹下一岩間³⁾および Sower & Vesic⁴⁾ によって相当程度なされてきている。しかしアスファルト、コンクリート、土等の路体材料は弾性体というよりも粘弾性体に近く、粘弾性論に立脚した考え方にしたがう方が、より実状に近い結果がえられると期待される。弾性解は粘弾性解の特別な場合と見なせるので、今まで発展してきた弾性論の結果を、さらに一般的な粘弾性論の立場から眺めて見ることは、考え方を整理する意味でも興味のあることであろう⁵⁾。そこで、本論文においては、舗装体が種々の粘弾性モデルで表わされると仮定して、二層半無限体内の応力と表面沈下をまず理論的に求めてみた。応力および沈下の時間的変化特性について物理的解釈を与え若干の数値計算を行なってそれを確かめた。計算の結果を具体的な設計にいかに関用するかについてはここでのべることができないが、応用の見通しを立てる意味で計算式に用うべき材料の粘弾性定数の決め方について後半に触れることにする。そして最後に舗装体の応力を載荷時間に応じて求める方法を示すことにする。

2. 序 論

粘弾性モデルとしては2要素モデルと1要素モデルのすべての組み合わせから成る16種類の二層系について計算を行なった。すなわち、Voigtモデル、Maxwellモデル、スプリング、ダッシュポットの4つのモデルを想定し表-1に示すような組み合わせの二層系について計算を行なった。計算の方法は inertia の影響が無視できる quasi-static な問題に対して E.H. Lee⁶⁾ の提案した“弾性体との対応原理”(Corresponding principle)にもとづくものである。これを要約するとつぎのようである。いま、ある形状と境界条件をもった粘弾性体の問題の解を求めようとする場合、これと同じ形状と境界条件

表-1

Number	Model types of surface layer	Model types of lower layer	Symbolic expressions
1	elastic	elastic	E/E
2	viscous	viscous	V/V
3	elastic	viscous	E/V
4	viscous	elastic	V/E
5	elastic	Voigt type	E/VE_v
6	viscous	Voigt type	V/VE_v
7	Voigt type	elastic	VE_v/E
8	Voigt type	viscous	VE_v/V
9	elastic	Maxwell type	E/VE_m
10	viscous	Maxwell type	V/VE_m
11	Maxwell type	elastic	VE_m/E
12	Maxwell type	viscous	VE_m/V
13	Voigt type	Voigt type	VE_v/VE_v
14	Maxwell type	Maxwell type	VE_m/VE_m
15	Voigt type	Maxwell type	VE_v/VE_m
16	Maxwell type	Voigt type	VE_m/VE_v

をもつ弾性体の問題に対応させて考える。粘弾性体の問題は弾性体の問題と同じように、つりあい方程式、適合条件式、応力-ひずみ関係式および境界条件を連立させて解くのであるが、粘弾性問題とそれに対応する弾性体の問題とを比較してみると、応力-ひずみ関係式のみが異なっていて他の式は全く同じものであることがわかる。しかし粘弾性体の問題において全部の変数にLaplace transform⁷⁾をほどこしてしまうと、応力-ひずみ関係式の中に入っている時間微分が隠されて変換パラメーターだけが残ることになるので、形式的に定数係数で結ばれた弾性体の応力-ひずみ関係式と同じになってしまう。したがって、対応する弾性体の問題の解がわかっているならばその式の中の弾性定数の部分を変換パラメーターを含んだ粘弾性定数で置きかえ、それに Laplace の inverse transform をほどこせば 所望の粘弾性体の解がえられることになるのである。したがって、弾性解がすでに求められているすべての問題に対して粘弾性とした時の解を求めることは原理的に可能であるが、実際には inverse transform を求めることかなりの困難が伴うものである。われわれがいま考えている問題では、この inverse transform が容易に求まるので、上記の対応原理を用いると要領よく二層系の問題を解くことができる。二層半無限体として 図-17 のような軸対称な地盤を考え、表面の半径 a なる円形領域に一様分布荷重 p_0 が時間 $t=0$ に加わったとしよう。両層の境界面では鉛直方向の応力

* 正会員 東京大学助教授 工学部土木工学科

と変位が一致し、 r 軸上のせん断力が0になるという仮定をもうける。せん断力を0にすることは境界面上での水平方向の滑動を許すことに相当する。せん断力を0にする代りに二層のせん断力と水平方向の変位が一致するという仮定をもうけることも可能であるが、計算はやや複雑になる。実際の状態はこの2つの場合の間にあると想像されるのでせん断力を0と置いて大きな誤差を生ずることはないであろう。

3. 理論結果

さて、以上のような境界条件に対応する二層弾性体の解はすでに求められているので、その中の弾性定数を変換パラメーターを含んだ粘弾性定数おきかえるとつぎのような応力および変位の式がえられる。

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{a}{h} \bar{P}(\rho) \int_0^\infty \frac{E+RH}{A+RB} J_1(sm) J_0(\rho m) dm \dots\dots\dots(1)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{a}{h} \bar{P}(\rho) \int_0^\infty \frac{K}{A+RB} J_1(sm) J_0(\rho m) dm \dots\dots\dots(2)$$

$$\bar{v} = \frac{a}{\mu_1(\rho)} \bar{P}(\rho) \int_0^\infty \frac{D+RA}{A+RB} J_1(sm) J_0(\rho m) dm \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 $\bar{\sigma}_1$: 上層の中の鉛直方向応力に Laplace 変換を施したもの

$\bar{\sigma}_2$: 下層の中の鉛直方向応力に Laplace 変換を施したもの

\bar{v} : 地表面の鉛直方向変位に Laplace 変換を施したもの

$\bar{P}(\rho)$: 表面の鉛直荷重に Laplace 変換を施したもの

$$R = \mu_1(\rho) / \mu_2(\rho)$$

$\mu_1(\rho)$: Laplace 変換を施した上層の粘弾性定数

$\mu_2(\rho)$: Laplace 変換を施した下層の粘弾性定数





$J_1(sm), J_0(\rho m)$: Bessel 関数

$$S = a/h, \rho = r/h, q = z/h,$$

p : Laplace 変換のパラメーター

とする。なお、 A, B, E, H, K, D は表-3 の下方に示すような関数である。いま問題にしている4種の粘弾性モデルについて、Laplace 変換を施した粘弾性定数を表示すると表-2 のごとくなる。表-1 に示したような各モデルの組み合わせに対して $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho)$ の値を表-2 からえらんで式(1)~(3)に代入し、 $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{v}$ に inverse transform を施すと表-3 のような結果がえられる。たとえば、上層が Maxwell 型、下層が Voigt 型の粘弾性で表わせるような二層系の解を求めたいならば $\mu_1(\rho) = p/p/V + 1/V', \mu_2(\rho) = \mu + \mu'p$ とえらんで式(1)~(3)に代入すればよい。なお、 $\bar{P}(\rho)$ は $t=0$ に一定荷重 p_0 が加わった場合の Laplace 変換であるから

表-2

Description	Model representation	p -varying moduli
elastic.		$\mu \dots\dots\dots(3.4)$
viscous.		$\mu' p \dots\dots\dots(3.5)$
Voigt' type.		$\mu + \mu' p \dots\dots\dots(3.6)$
Maxwell type.		$\frac{p}{\frac{1}{V}p + \frac{1}{V'}} \dots\dots\dots(3.7)$

p_0/p と置けばよい。表-3 に示した結果では全部に共通な乗数と積分記号を省略してあるので、たとえば弾性解の時には(表-3-1)、つぎのように書き直すと正しい結果となる。

$$\sigma_1 = \frac{a}{h} p_0 \int_0^\infty \frac{E+CH}{A+CB} J_1(sm) J_0(\rho m) dm \dots\dots(4)$$

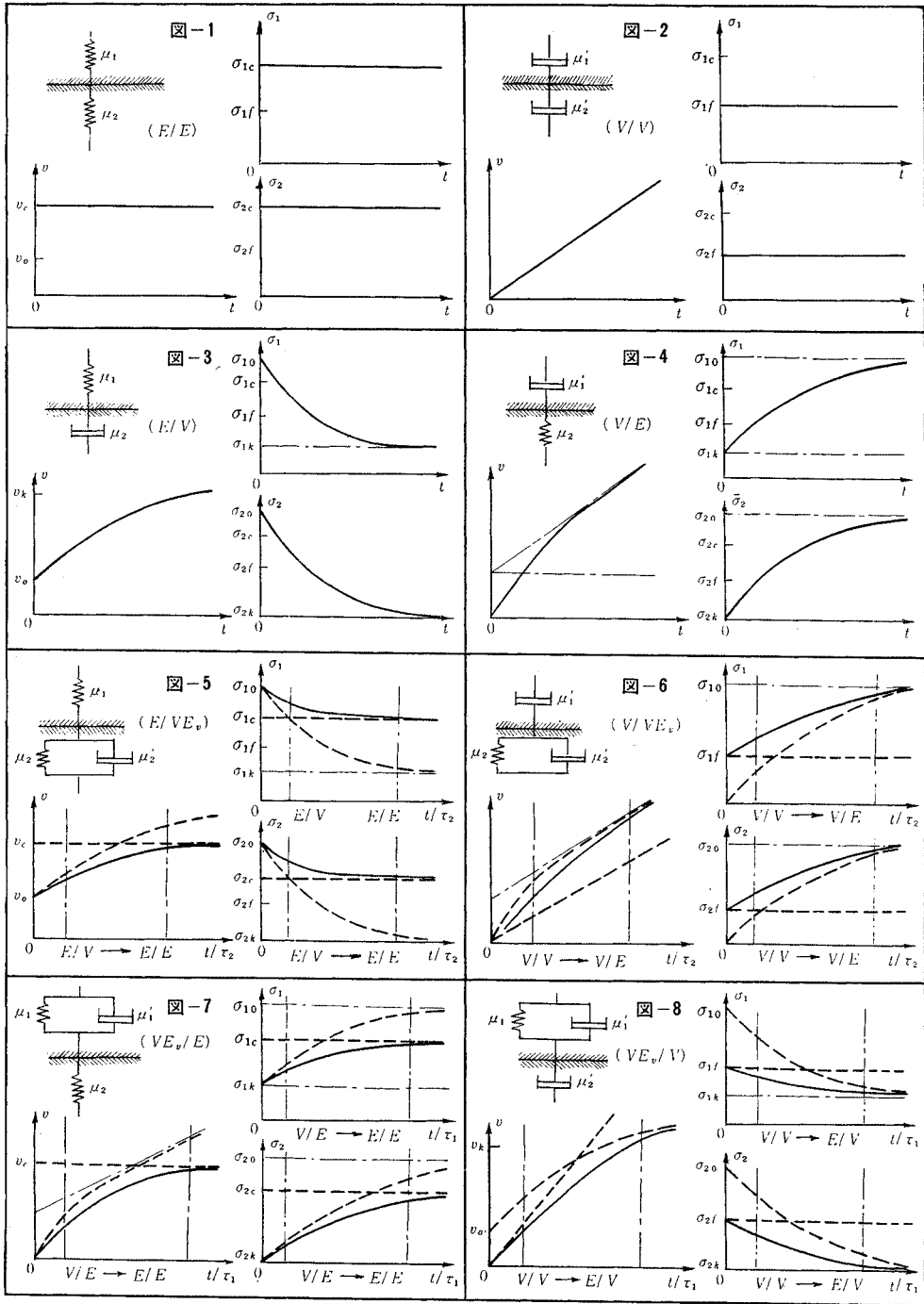
$$\sigma_2 = \frac{a}{h} p_0 \int_0^\infty \frac{K}{A+CB} J_1(sm) J_0(\rho m) dm \dots\dots(5)$$

$$v = a p_0 \int_0^\infty \frac{D+CA}{A+CB} J_1(sm) J_0(\rho m) dm \dots\dots(6)$$

他のモデルの組み合わせの解に対しても同様なことがいえる。表-3 の式の中で c は上層の弾性定数と下層の弾性定数の比で“弾性定数比”と呼ぶことにする。また f は上層の粘性定数と下層の粘性定数の比で“粘性定数比”と呼ぶことにする。 c および f の値はえらんだモデルの組み合わせに応じて違った記号で表わされるが、表-3 の下方に示したようにおのおの4つの場合がある。また τ_1 は上層の粘弾性が Voigt 型で表わされるとした場合には retardation time を表わし、Maxwell モデルで表わされるとした場合には relaxation time を表わすものとする。 τ_2 は下層材料に対する retardation time または reaxation time である。 τ_1, τ_2 の定義は表-3 の下方に記してある。

4. Four elementary systems

図-1~4 には最も簡単なモデルの組み合わせから成る二層系地盤内の応力および表面変位の時間的変化の特性が示されている。図-1 は二層とも弾性体から成る場合で、Burmister らが求めた解に相当し、当然のことながら時間的には変化しない。図-2 は二層が粘性物質からできている場合で、応力は時間的に不変であるが表面変位は時間とともに直線的に増加する。表-3-1 と表-3-2 の応力式を比較してみると明らかなように、粘性地盤内の応力は弾性体の応力式中の弾性定数比 c を形式的に粘性比 f で置きかえたものに等しくなる。図-3 は上層が弾性で下層が粘性の場合の特性曲線であるが $t \rightarrow \infty$ において下層の応力が0になることが特徴的である。これは、弾性体から成る上層が有限の変位しか起こしえな



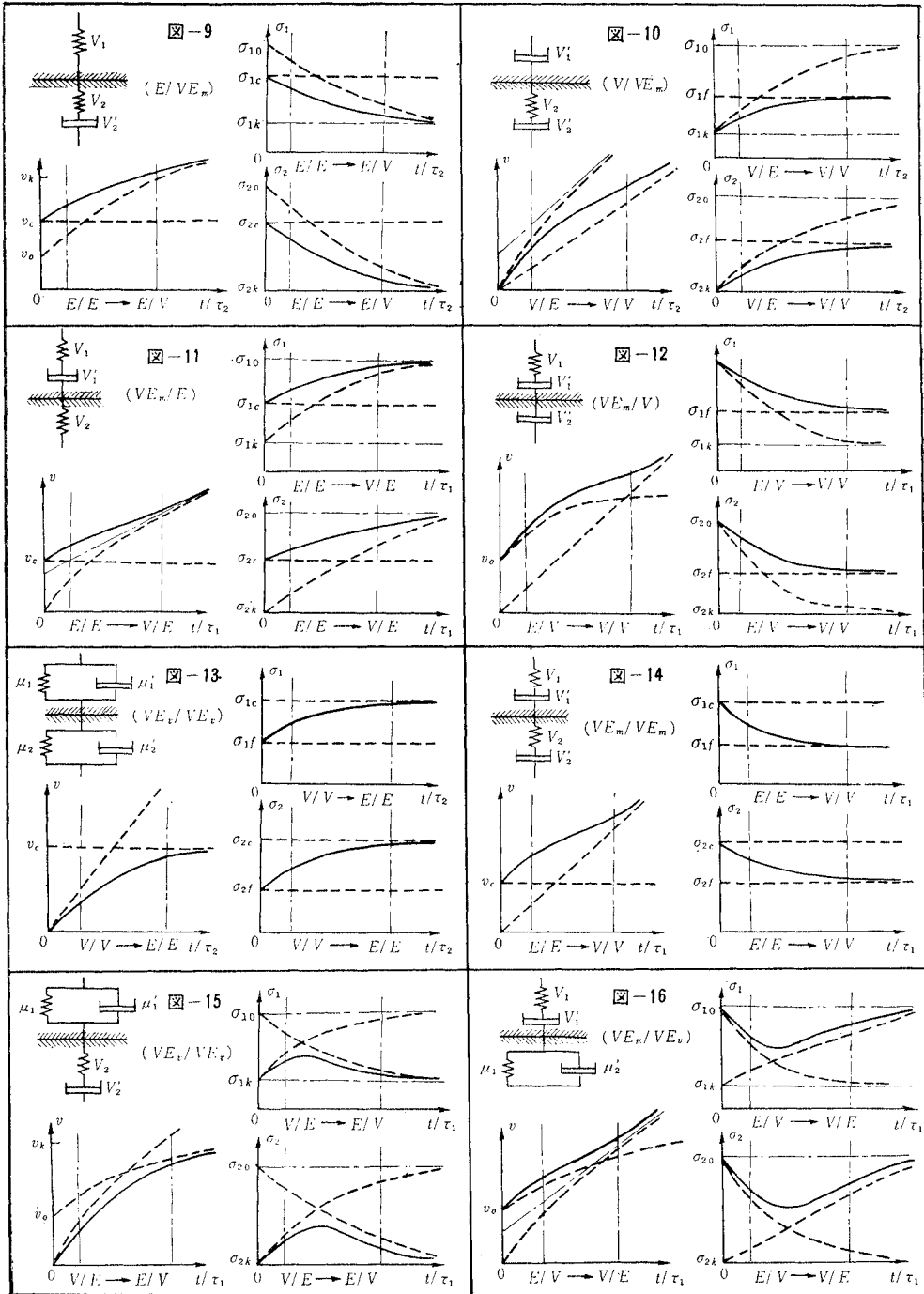


表-3

	1	2	3	4
	E/E	V/V	E/V	V/E
σ_1	$\frac{E+cH}{A+cB}$	$\frac{E+fH}{A+fB}$	$\frac{H}{B} + \frac{BE-AH}{AB} e^{-\frac{A}{B} \frac{\mu_1}{\mu_2'} t}$	$\frac{E}{A} - \frac{BE-AH}{AB} e^{-\frac{A}{B} \frac{\mu_2}{\mu_1'} t}$
σ_2	$\frac{K}{A+cB}$	$\frac{K}{A+fB}$	$\frac{K}{A} e^{-\frac{B}{A} \frac{\mu_1}{\mu_2'} t}$	$\frac{K}{A} - \frac{K}{A} e^{-\frac{A}{B} \frac{\mu_2}{\mu_1'} t}$
v	$\frac{D+cA}{\mu_1(A+cB)}$	$\frac{t}{\mu_1'} \frac{D+fA}{A+fB}$	$\frac{A}{\mu_1 B} - \frac{A^2-BD}{\mu_1 AB} e^{-\frac{B}{A} \frac{\mu_1}{\mu_2'} t}$	$\frac{D}{A} \frac{t}{\mu_1'} + \frac{A^2-BD}{\mu_2 A^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{A}{B} \frac{\mu_2}{\mu_1'} t}\right)$
	5	6	7	8
	E/VE_0	V/VE_0	VE_0/E	VE_0/V
σ_1	$\frac{E+cH}{A+cB} \times \left[1 + \frac{c(BE-AH)}{A(E+cH)} e^{-\frac{A+cB}{A} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{B}{A} \times \left[1 - \frac{f(BE-AH)}{(A+fB)E} e^{-\frac{A}{A+fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{E+cH}{A+cB} \times \left[1 - \frac{BE-AH}{B(E+cH)} e^{-\frac{A+cB}{cB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{H}{B} \times \left[1 + \frac{BE-AH}{H(A+fB)} e^{-\frac{fB}{A+fB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$
σ_2	$\frac{K}{A+cB} \left[1 + \frac{cB}{A} e^{-\frac{A+cB}{A} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{K}{A} \left[1 - \frac{fB}{A+fB} e^{-\frac{A}{A+fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{K}{A+cB} \left[1 - e^{-\frac{A+cB}{cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{K}{A+fB} e^{-\frac{fB}{A+fB} \frac{t}{\tau_1}}$
v	$\frac{1}{\mu_1} \frac{D}{A} + \frac{A^2-BD}{\mu_2 A(A+cB)} \times \left[1 - e^{-\frac{A+cB}{A} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{D}{A} \frac{t}{\mu_1'} + \frac{A^2-BD}{\mu_2 A^2} \times \left[1 - e^{-\frac{A}{A+fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{D}{\mu_1 A} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{A^2-BD}{\mu_2 A(A+cB)} \times \left[1 - e^{-\frac{A+cB}{cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{1}{\mu_1} \frac{D}{A} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{A^2-BD}{\mu_1 AB} \times \left[1 - e^{-\frac{fB}{A+fB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$
	9	10	11	12
	E/VE_m	V/VE_m	VE_m/E	VE_m/V
σ_1	$\frac{H}{B} \times \left[1 + \frac{BE-AH}{H(A+cB)} e^{-\frac{cB}{A+cB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{E+fH}{A+fB} \times \left[1 - \frac{BE-AH}{B(E+fH)} e^{-\frac{fB}{A+fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{E}{A} \times \left[1 - \frac{c(BE-AH)}{E(A+cB)} e^{-\frac{A}{A+cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{E+fH}{A+fB} \times \left[1 + \frac{f(BE-AH)}{A(E+fH)} e^{-\frac{A+fB}{A} \frac{t}{\tau_1}}\right]$
σ_2	$\frac{K}{A+cB} e^{-\frac{cB}{A+cB} \frac{t}{\tau_2}}$	$\frac{K}{A+fB} \left[1 - e^{-\frac{A+fB}{fB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{K}{A} \left[1 - \frac{eB}{A+cB} e^{-\frac{A}{A+cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{K}{A+fB} \left[1 + \frac{fB}{A} e^{-\frac{A+fB}{A} \frac{t}{\tau_1}}\right]$
v	$\frac{1}{\nu_1} \frac{A}{B} - \frac{A^2-BD}{\nu_1 B(A+cB)} e^{-\frac{cB}{A+cB} \frac{t}{\tau_2}}$	$\frac{D+fA}{A+fB} \frac{t}{\nu_1'} + \frac{A^2-BD}{\nu_2(A+fB)^2} \left[1 - e^{-\frac{A+fB}{fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{1}{\nu_1} \frac{D+cA}{A+cB} + \frac{D}{A} \frac{t}{\nu_1'} + \frac{cB(A^2-BD)}{\nu_2 A^2(A+cB)} \left[1 - e^{-\frac{A}{A+cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{1}{\nu_1} \frac{D}{A} + \frac{D+fA}{A+fB} \frac{t}{\nu_1'} + \frac{f^2}{\nu_1} \times \frac{(A^2-BD)B}{(A+fB)^2 A} \left[1 - e^{-\frac{A+fB}{A} \frac{t}{\tau_1}}\right]$
	13	14	15	16
	VE_0/VE_0	VE_m/VE_m	VE_0/VE_m	VE_m/VE_0
σ_1	$\frac{E+cH}{A+cB} \times \left[1 + \frac{c(1-\tau_1/\tau_2)(BE-AH)}{(A+fB)(E+cH)} \times e^{-\frac{A+cB}{A+fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{E+fH}{A+fB} \times \left[1 + \frac{c(\tau_1/\tau_2-1)(BE-AH)}{(A+cB)(E+fH)} \times e^{-\frac{A+fB}{A+cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{H}{B} \left[1 + \frac{\nu_2(BE-AH)}{\mu_1' HB(U-W)}\right] \times (e^{-Wt} - e^{-Ut})$	$\frac{E}{A} \left[1 + \frac{\nu_1}{\mu_2'} \frac{BE-AH}{AE(M-N)}\right] \times (e^{-Mt} - e^{-Nt})$
σ_2	$\frac{K}{A+cB} \left[1 + \frac{c(1-\tau_1/\tau_2)B}{A+fB} \times e^{-\frac{A+cB}{A+fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{K}{A+fB} \left[1 + \frac{c(\tau_1/\tau_2-1)B}{A+cB} \times e^{-\frac{A+fB}{A+cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{K}{B} \frac{\nu_2}{\mu_1'} \frac{1}{U-W} \times (e^{-Wt} - e^{-Ut})$	$\frac{K}{A} \left[1 + \frac{\nu_1}{\mu_2'} \frac{B}{A(M-N)}\right] \times (e^{-Mt} - e^{-Nt})$
v	$\frac{D}{\mu_1 A} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{A^2-BD}{\mu_2 A(A+cB)} \times \left[1 - e^{-\frac{A+cB}{A+fB} \frac{t}{\tau_2}}\right]$	$\frac{1}{\nu_1} \frac{D+cA}{A+cB} + \frac{D+fA}{A+fB} \frac{t}{\nu_1'} + \frac{(c-f)^2}{\nu_1} \times \frac{B(A^2-BD)}{(A+cB)(A+fB)^2} \times \left[1 - e^{-\frac{A+fB}{A+cB} \frac{t}{\tau_1}}\right]$	$\frac{D}{\mu_1 A} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{A^2-BD}{\mu_1' AB(U-W)} \left[\frac{U-L'}{U} \times (1 - e^{-Ut}) - \frac{W-L'}{W} \times (1 - e^{-Wt})\right]$	$\frac{D}{A} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{t}{\nu_1'}\right) + \frac{A^2-BD}{\mu_2' A^2(M-N)} \times \left[\frac{M-L}{M} (1 - e^{-Mt}) - \frac{N-L}{N} (1 - e^{-Nt})\right]$

$A = sh m ch m + m$
 $B = sh^2 m - m^2$

$c = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\nu_1}{\nu_2}, \frac{\nu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_1}{\nu_2}$

$D = sh^2 m$

$f = \frac{\mu_1'}{\mu_2'}, \frac{\nu_1'}{\nu_2'}, \frac{\nu_1'}{\mu_2'}, \frac{\mu_1'}{\nu_2'}$

$E = (sh m + m ch m) ch qm sh m sh qm$

$H = m[q ch qm (sh m + m ch m) + qm sh m sh qm]$
 $- [sh m + m ch m] \cdot sh qm$

$K = (1 + qm)(sh m + m ch m) e^{-qm}$

$BE - AH = (sh m + m ch m)[-qm sh m ch(1+q)m - qm^2 ch m]$
 $+ (sh^2 m - m^2) ch qm + (sh m ch m + m) sh qm]$

$A^2 - BD = (sh m + m ch m)^2$

It should be noted that; $A^2 - BD \geq 0, BE - AH \geq 0,$
 for $(0 \leq m < \infty, -1 \leq q \leq 0$

$\tau_1 = \frac{\mu_1'}{\mu_1}, \frac{\nu_1'}{\nu_1}$; retardation, or relaxation time of surface layer.

$\tau_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\nu_2'}{\nu_2}$; retardation, or relaxation time of lower layer.

$\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{1}{2\tau_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} + 1 + \frac{fB}{A}\right) \mp \frac{1}{2\tau_1} \sqrt{\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} + 1 + \frac{fB}{A}\right)^2 - 4\tau_1/\tau_2}$

$\left(\frac{U}{W}\right) = \frac{1}{2\tau_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} + 1 + \frac{A}{B}\right) \pm \frac{1}{2\tau_1} \sqrt{\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} + 1 + \frac{A}{B}\right)^2 - 4\tau_1/\tau_2}$

$L = \frac{\nu_1}{\nu_1'} = \frac{1}{\tau_1}, L' = \frac{\nu_2}{\nu_2'} = \frac{1}{\tau_2}, \frac{L}{MN} = \tau_2, \frac{L'}{UW} = \tau_1$

$\sigma_{1,c} = \frac{E+cH}{A+cB}, \sigma_{1,f} = \frac{E+fH}{A+fB}, \sigma_{1,0} = \frac{E}{A}, \sigma_{1,k} = \frac{H}{B}$

$\sigma_{2,c} = \frac{K}{A+cB}, \sigma_{2,f} = \frac{K}{A+fB}, \sigma_{2,0} = \frac{K}{A}, \sigma_{2,k} = 0$

$v_c = \frac{D+cA}{\mu_1(A+cB)}, v_f = \frac{t}{\mu_1'} \frac{D+fA}{A+fB}, v_0 = \frac{D}{\mu_1 A}$

$v_k = \frac{1}{\mu_1} \frac{A}{B} = \infty$

いのに対し、粘性をもっている下層が載荷時間とともに無限の変位を起こしうるために、最初誘起された下層内の応力が全部緩和されてしまうことを物語っている。 $t=0$ の時の応力は E/E -system において $\mu_2 \rightarrow \infty$ とした場合の解と一致していることが容易にわかる。つまり、載荷直後では rigid base 上に横わる有限厚さ h の帯状弾性体に対する解と一致することになる。これは、 $t=0$ においては下層の粘性体が変形を起こさず剛体としての性質を呈することによるものである。つぎに、図-4 には上層が粘性で下層が弾性体の場合の特性曲線が示してある。今度は $t=0$ において $\sigma_{2K}=0$ となっている。これは、載荷時において粘性的な上層体の変位しえないのに対し、弾性をもつ下層が変位をいくらかでも起こしうるために、soft base の上に rigid body がのっているような状態になり、載荷重が上層の全領域に拡がって、下層の一点では非常に小さくなっていくことを示している。 $t \rightarrow \infty$ においては、上層が無限に変位しているのに反し、下層の変位が有限なので、この時、ちょうど rigid base の上に soft body がのっかっているような状態になる。したがって図-4 で下層の応力は σ_{20} となり E/V -system の初期の値と等しくなっている。以上を要約すると、載荷初期においては弾性体は soft body のようになり $t \rightarrow \infty$ では rigid body のような挙動をすと考えればよい。粘性体はその道で、これを表示すると表-4 のようになる。

表-4 載荷時間の差違による弾性および粘性体の挙動の特色

	$t=0$	$t=\infty$
elasticity	soft	rigid
viscosity	rigid	soft

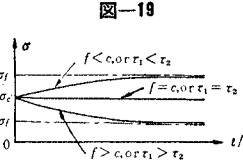
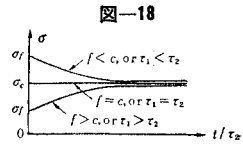
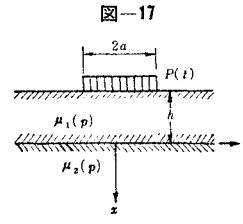
5. 両層とも Voigt モデルで表わされる二層系

この場合の応力と変位の時間的変化特性は図-13 に示してある。応力は $t=0$ においては V/V -system の応力と一致し、 $t \rightarrow \infty$ においては E/E -system の応力に合致することがわかる。したがって、 σ_f の値と σ_c の値の大小に応じて、応力が載荷時間とともに増える場合と減

る場合の両方が起こりうる。

$c(\tau_1/\tau_2 - 1) = f - c \dots \dots \dots (7)$

なる関係があるから、 $f > c$ または $\tau_1 > \tau_2$ の時に応力は時間とともに増加し、 $f < c$ または $\tau_1 < \tau_2$ の時に減ってくる。これを物理的にいうと、上層材料の retardation time τ_1 が下層物質の retardation time τ_2 より大きい場合には、応力は常に Burmister らが求めた弾性解より小さく、載荷時間とともに増加して弾性解に接近してくる。あるいは、粘性定数比 f が弾性定数比 c より大きい場合には応力が弾性解より小さく時間とともに増加するといってもよい。つまり上層材料として粘性の大きいものを用いると応力を舗装体の広い部分に分散させる効果がより大きくなるということになる。上述の場合とは逆に $f < c$ または $\tau_1 < \tau_2$ であると、上の効果は逆になってくる。両層の retardation time が互いに等しい場合には、応力は変化せず弾性解にいつも等しくなってくる。以上のことを図示すると図-18 のようになる。



6. 両層とも Maxwell モデルで表わされる二層系

この時には、載荷初期の応力は E/E -system の応力に合致し、 $t \rightarrow \infty$ の時の応力は V/V -system の応力に一致することになる。応力は各層の弾性、粘性の大小に応じて載荷時間とともにふえたり減ったりする。この場合の応力と変位の式は表-3-14 に示してあり、これをグラフに表わしたものが図-14 である。 $\tau_1 > \tau_2$ または $f > c$ の時には常に弾性解より応力は小さくなり、載荷時間と

ともに σ_c より減少して σ_f にいたる。すなわち上層の relaxation time が下層のそれより大きい場合には応力が減少してくる。この時にも、上層材料に粘性の大きいものを使用すると載荷重が広い範囲に分散して伝えられるために上層のもつ reinforcing effect が大きくなるのである。 $\tau_1 < \tau_2$ または $f < c$ の場合には上述のことと逆のことが起こることになる。このような事情は 図-19 を参考にするとよく理解できよう。

7. その他のモデルの組み合わせから成る二層系

つぎに上層が Voigt 型で下層が Maxwell 型で表わされる二層系を考えてみよう。応力と変位の式は表-3-15 に示してあり、この特性を図示したものが 図-15 である。この場合、 $t=0$ 付近の挙動は前述の four elementary systems 中の V/E -system の初期の曲線で近似でき、 $t=\infty$ 付近では E/V -system の曲線で近似できる。このことを示すために 図-15 の横軸に $V/E \rightarrow E/V$ の記号が入れている。他の図の場合もすべて同様で、その系の初期の値と終期の値を近似できる four elementary system が $V/E \rightarrow E/V$ のような形式で書き入れている。いまの場合、応力は一見増加して再び減少して行く。この最大値がいくらかになるかは数値計算を行なってみないとわからない。

つぎに表層が Maxwell 型、下層が Voigt 型で表わされる二層系の応力と変化特性を知るために 表-3-16 と 図-16 を考察してみよう。この場合には初期の値は E/V -system の曲線で近似でき、 $t=\infty$ の時の値は V/E -system の値に漸近して行く。応力は一見減って再びふえることになり、どこかに最小値が存在するけれど、その値は数値計算によらないとわからない。

以上のべてきた二層系以外のもの、つまり 図-5 から 図-12 までに示してあるものは、上記の二層系の特別な場合と見なせるものである。おのおのの場合の応力と変位の式に 表-2-5 から 表-2-12 にわたって示してある。いままでのべてきた考え方を念頭において解釈を下すと、おのおの場合の物理的意味は容易に理解できるので、重複を避ける意味でくわしい説明は省略することにする。

8. 数値計算

表-3 に示してある諸式の中で、下層の応力 σ_2 を VE_m/VE_m -system に対して数値計算した結果が 図-20 ~ 24 に示してある。これは境界面における 載荷中心直下の鉛直応力であるから $\rho=0, q=0$ の場合に相当する。なお式 (4)~(6) は軸対称な載荷に対する表式であるが $SJ_1(sm) J_0(pm)$ を $\frac{2}{\pi m} \sin sm \cos pm$ によって置きかえれば平面的問題、つまり紙面に直角方向に幅 $2a$ の帯状荷重が無限に加わった場合の解がえられる。図-20 ~ 24 に示してあるのはこのような平面的問題に対する数値計算結果である。計算は東京大学の OKITAC 型の電子計算機を用いて行なったものである。弾性定数比 c が 0, 5, 50, 100, 500 の時の応力を縦軸にとり、載荷時間の対数を横軸にとり、粘性定数比 f をパラメーターとして図を描いた。 f は 0, 2, 5, 10, 50, 100, 500 の 7 段階

図-20 VE_m/VE_m または VE_v/VE_v -system における下層の鉛直方向応力

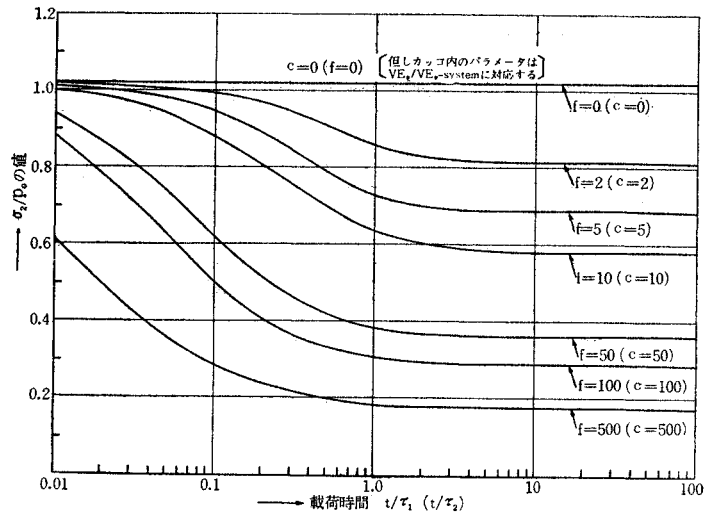


図-21 VE_m/VE_m または VE_v/VE_v -system における下層の鉛直方向応力

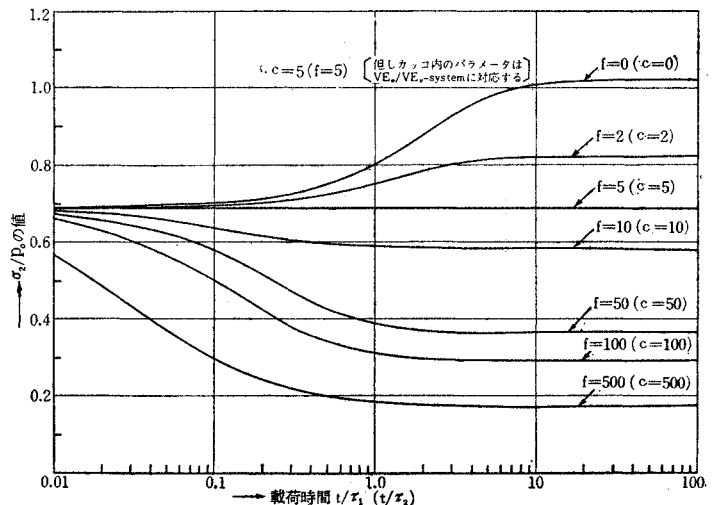


図-22 VE_m/VE_m または VE_v/VE_v -system における下層の鉛直方向応力

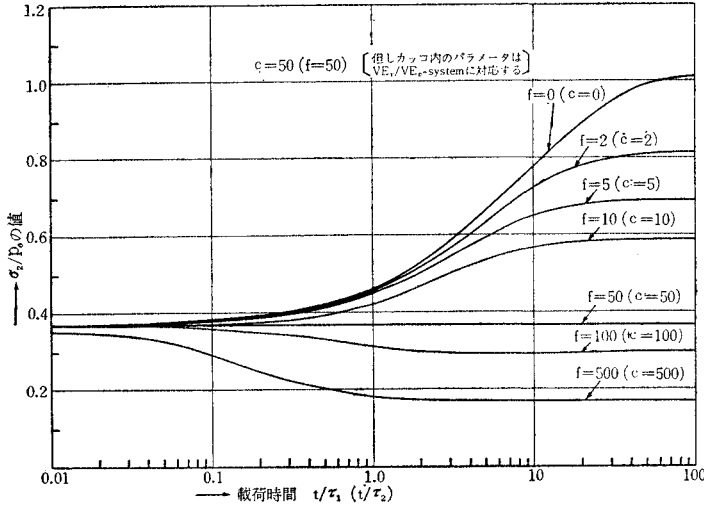


図-23 VE_m/VE_m または VE_v/VE_v -system における下層の鉛直方向応力

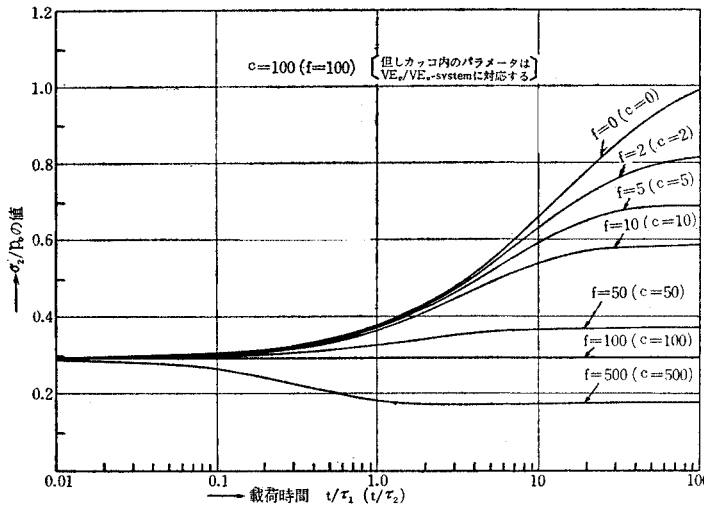
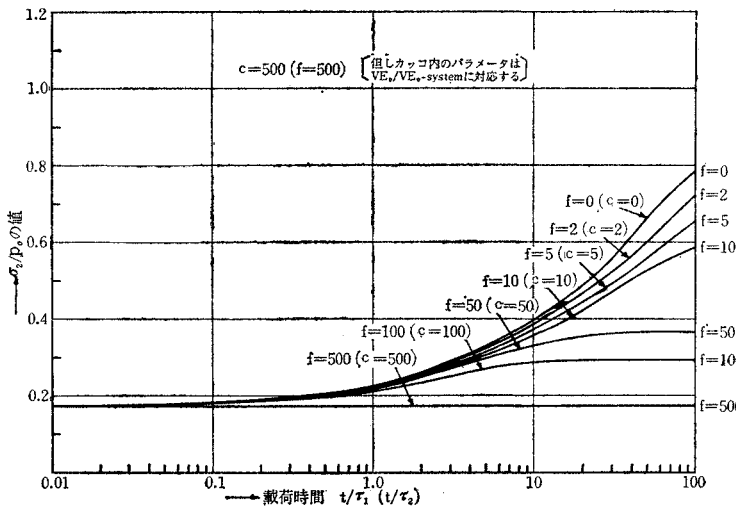


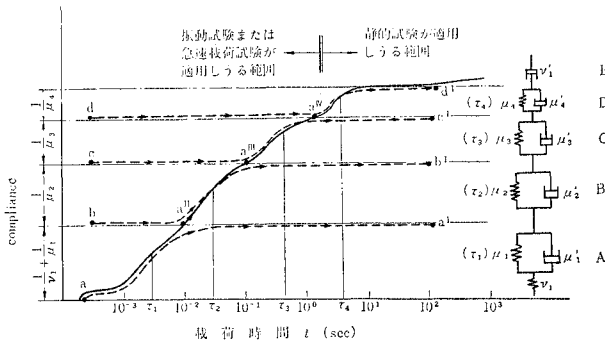
図-24 VE_m/VE_m または VE_v/VE_v -system における下層の鉛直方向応力



に変化させた。図-20 は $c=V_1/V_2=0$, つまり $V_2 \rightarrow \infty$ の場合であるから VE_m/VE_m -system の特別な場合で VE_m/V -system に関する数値計算結果に相当し、図-12 からわかるように f のすべての値に対して時間とともに応力は減少している。 $f=V_1/V_2$ であるから $f=0$ は $V_2 \rightarrow \infty$ に相当し、 $c=0, f=0$ の時の曲線は rigid body の上に横わる厚さ h の帯状弾性体に対する解になってくる。これは図-1~16 で σ_{20} と書いた応力に相当する。図-21 は $c=5$ の場合で $c > f$ のとき応力は時間とともに増加し $c < f$ のとき減少していることがわかり、図-19 の一般的傾向と一致している。図-22~24 までも同様に解釈してよい。図-20~24 において $c \approx 0, f=0$ の曲線を一括して眺めると、これは VE_m/VE_m の特別な場合で VE_m/E -system の応力を表わしていることがわかる。図-11 から明らかなように応力は常に σ_{2c} の値から σ_{20} の値にまで増加している。

さて、以上は VE_m/VE_m -system の応力の変化特性を数値計算結果にもとづいて考察したのであるが、実はこれらの図は同時に VE_v/VE_v -system の応力を求めるのにもそのまま使えるのである。表-3-13 の σ_2 の式において $c(1-t/\tau_2) \equiv f(\tau_1/\tau_2 - 1) \dots (8)$ なる恒等式を用いて、カッコの中の表現を書き直してから表-3-14 の σ_2 の式と比較してみると両者が非常に類似していることに気付く。つまり VE_m/VE_m -system の σ_2 の式の中で、 f の位置と c の位置を入れかえ、 t/τ_1 を t/τ_2 におきかえれば VE_v/VE_v -system に対する式がえられることがわかる。したがって、図-20~24 の結果から VE_v/VE_v -system の応力を求めるには横軸を t/τ_2 とし、パラメーター c と f を入れかえて考察して行けばよいことになる。このことを示すために図中で c または f の傍に、カッコで VE_v/VE_v -system の場合のパラメーターの取り方、を書き入れておいた。このような見方でまず 図-20 を眺めると、

図-25 クリープ曲線の分解とそれに対応するモデル



$f = \mu_1 / \mu_2'$ であるから $f=0$ は $\mu_1' = 0$ に相当し、この図は実は E/VE_p -system の特性曲線でもあることがわかる。図-5 からも明らかなように応力は常に σ_0 から σ_{2c} の値まで減少して行くのである。つぎに 図-21~24 において $c=0$ に相当する曲線を一括して眺めてみると、これは $c = \mu_1 / \mu_2 = 0$ 、つまり $\mu_1 = 0$ に相当するから V/VE_p -system の応力を表わしていることになる。図-6 の特性曲線からも明らかなように応力は時間とともに増加することが知れる。

9. 粘弾性モデルの選択と定数の決定法

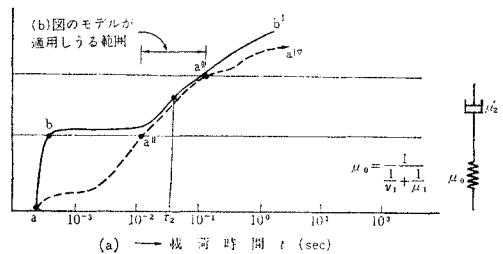
道路の舗装体を二層系地盤と考えた場合、以上の 16 種類のどのモデル系を選んで用いるべきか、またはその時の粘弾性定数をいかにして決めるかという問題について考えてみる。

アスファルト、土、コンクリート等の粘弾性質を表-2 のような簡単なモデルで表現することは厳密にいうと一般に不可能である。パネやダッシュポットがもっと沢山くっついた複雑なモデルを用いなくてはならない。しかし、つぎのように考えると多くの場合、近似的に表-2 のような単純なモデルが用いられることが理解される⁸⁾。材料の粘弾性を求めるための実験としては、普通、クリープ試験、応力緩和試験、急速載荷試験、および振動的載荷試験等が採用される。一定荷重を加えて時間とともにひずみを測定するクリープ試験、または一定ひずみを与えておいて応力の変化を時間的に測定する応力緩和試験は、載荷してから数秒後からでないといひずみや応力を測ることができない。その意味では載荷時間が数秒以上における材料の性質しか測定できないのである。数秒より小さい載荷時間における材料の性質を知るためには、振動試験、または急速載荷試験によらねばならない。このような 2 種類の 実験よりたとえば 図-25 の実験のようなクリープ曲線がえられたとしよう。横軸には時間の対数をとってあり、縦軸には弾性定数の逆数の dimension をもつ compliance と呼ばれる量がとってある。載荷時間が 10^{-3} から 10^3 sec 位の広範囲にわたる response

がこの 1 本の曲線で表わされているが、実際の構造物では載荷時間はその用途によってと狭い範囲に限られてくる。たとえば地震荷重を対象とした構造物では載荷時間は大体 0.25~1.0 sec 位だと考えてよいし、静荷重による数カ月のクリープ変形を問題にする時には $10^6 \sim 10^7$ sec 位の載荷時間となる。したがって、ある限られた載荷時間をもつ構造物の計算をしようとする場合には、図-25 のクリープ曲線のほんの一部だけを用いればよいことになる。いま 図-25 のクリープ曲線の compliance を 5 つの部分にわけておののを A, B, C, D, E と呼ぶことにする。各部分に

図-25 の右端のようなモデルを対応させて考えると、実線のクリープ曲線は、このおのおのモデルの変形-時間曲線を加え合わせたものであると解釈してよい。モデル A のクリープ曲線は $a \rightarrow a'$ であり、モデル B のクリープ曲線は $b \rightarrow b'$ である。この例では、全体のクリープ曲線を 5 つに分割したが、この分割の個数は任意である。分割数が多ければ多いほど正確になるが同時にモデルの数もふえるので複雑になる。この分割された一つ一つの Voigt 要素を“retardation spectrum”と呼んでいる。いま考えている構造物の載荷時間が与えられたとすると、その付近の retardation spectrum をえらんでモデルを組み立てればよい。たとえば $10^{-2} < t < 10^{-1}$ sec 位の載荷時間が与えられた時には、その載荷時間の範囲内においては実際のクリープ曲線と一致するが、それ以外の所では一致しなくてもよい 図-26 の実線のようなクリープ曲線 $a-b-a''-a'''-b'$ をえらべばよいのである。図で点線で示したのは 図-26 のクリープ曲線をそのままつしたものである。実線で示したクリープ曲線を用いるとそれに対応するモデルは 図-26 (b) のような簡単な Maxwell 型モデルになるので計算は著しく簡単になる。図-26 (b) のようなモデルを用いてよいことの物理的意味はつぎのごとくである。問題にしている載荷時間の下限つまり 10^{-2} sec だけ載荷時間で経過した時には 図-26 (a) のモデル A は retardation time τ_1 が 10^{-2} sec より小さいのでこのモデルはすでに変形し終えていて粘性の影響が表われなくなっており、 μ_0 たる強さのパネとしての効果しか持たなくなっているので

図-26 計算に用いるべき簡単なモデルのえらび方



ある。また載荷時間の上限つまり 10^{-1} sec 以上の時間で載荷することはないと考えているので 10^{-1} sec より大きい retardation time を有する C, D, E の Voigt 要素が変形することは実際には起こりえないから μ_2' の dashpot の変形でおきかえても差しつかえないことになる。結局、問題にしている載荷時間の範囲では 図-26 (b) のような Maxwell モデルを用いても十分な近似がえられることになるわけである。一般的にいって、ある任意の載荷時間の範囲が与えられた場合、上記のような考え方にもとづいて Maxwell モデルをえらびだすことが可能である。さらに 図-25 のようなクリープ曲線において、曲線が水平になっている部分の載荷時間に対しては材料を弾性であると仮定してよいかからモデルは最も簡単な1個のパネになってしまう。このようにして組み立てたモデルについてその粘弾性定数を求め、それを前にのべた二層系の応力変位の計算式に用いるべきであろう。

10. 舗装体内の応力の推定

複雑な粘弾性モデルで表わされるべき材料の性質も、載荷時間を限定することにより、Maxwell モデルまたはスプリングモデルで近似的に表わしうることがわかった。そこで舗装体が荷重を受ける時間が指定されれば二層系の力学を適用することが可能になって来る。舗装体の載荷時間はその舗装の使用目的に応じて大体つぎの2つに大別されよう。

a) 高速走行荷重 これは、自動車の走行速度 V が $10\sim 80$ km/h 程度の高速道路の舗装体の場合であり、載荷時間は $2a/V$ (a はタイヤの接地直径) で与えられると考えれば $0.01\sim 0.1$ sec の範囲にある。

b) 駐車荷重 これは、駐車場等のように比較的長時間荷重が加わっている舗装体の場合であり、載荷時間は大体 $1/4$ 時間ないし数時間のオーダーである。

以上のように舗装の使用目的に応じた載荷時間を採用して二層系の力学を適用するのが合理的であろうと思われる。

さらに二層粘弾性理論を用いるとつぎのような実験事実がうまく説明できる⁹⁾。実測によると自動車の速度が増せば増すほど路床または路盤内の鉛直応力が減少してることが知られている。これは舗装体が粘弾性的性質をもつ材料からできているためと考えられる。いま簡単のために、アスファルトまたはコンクリートの舗装部分

を表層とみなし、路盤・路床を一層にして下層とみなして二層系の理論を適用することにする。下層も当然粘弾性体とみなすべきであろうが、載荷点から遠方にあるから材料の性質の表現方法を rough にとってもその誤差が全体の誤差におよぼす影響は小さいであろうと考えて、これを弾性で表わすとす。また上層は Maxwell 型の粘弾性モデルで表わされると仮定する。さらに載荷時間を $t=2a/V$ であるとすれば、この場合に適用する下層の鉛直応力は表-3-11 の VE_m/E -system に対する式より、

$$\frac{\sigma_2}{p_0} = \frac{a}{h} \int_0^{\infty} \frac{K}{A} \left[1 - \frac{CB}{A+CB} e^{-\frac{A}{A+CB} \frac{2a}{\tau_1 V}} \right] \cdot$$

$$J_0(\rho m) J_1(sm) dm \dots \dots \dots (9)$$

によって与えられる。この式の特性曲線は 図-11 に示してあるが、 σ_2/p_0 の値は $2a/V$ の増加とともにふえてくる。これは速度がおそくなると下層の応力が増加し、逆に速度が増すと応力が減少してくることを意味し、既知の実測事実の傾向をうまく説明しうるものである。さらにくわしい数値的な検討を将来行なってみると面白いと思われる。

参考文献

- 1) Burmister, D.M. : "The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems", Journal of Applied Physics, Vol 16. No. 2, pp. 89~96, No. 3, pp. 126~167. No. 5, pp. 296~302 (1945)
- 2) Fox, L. : "Computation of Traffic Stresses in a Simple Road Structure", Proc. 2nd Interna. Conf. Soil Mech. and Found. Engrg. Vol. II, pp. 236~246 (1948)
- 3) 竹下春見・岩間 滋 : "道路舗装の設計", オーム社
- 4) Sowers, G. F. and Vesic A.B. : "Stress Distribution beneath Pavements of Different Rigidities", Proc. 5th Interna. Conf. Soil Mech. and Found. Engrg Vol. II, pp. 327~331 (1961)
- 5) Ishihara, K. : "The General Theory of Stresses and Displacements in Two-layer Viscoelastic Systems" Soil and Foundation Vol II. No. 2, pp. 51~68 (1962)
- 6) Lee, E.H. : "Stress Analysis in Viscoelastic Bodies" Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 13, pp. 183~190 (1955)
- 7) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. : Operational Methods in Applied Mathematics.
- 8) Ishihara, K. : "Effect of Rate of Loading on the Modulus of Deformation of Materials Exhibiting Viscoelastic Behaviors", Trans. of Japan Soc. of Civil Engineers, No. 117, pp. 35~50. (1965)
- 9) "Road Test One-MD" Highway Research Board Special Report 4. (1952)

(1966.2.3・受付)