

# 平行弦連続ワレントラスの一計算法

A SOLUTION OF CONTINUOUS WARREN TRUSS WITH PARALLEL CHORDS

熊野 哲 幹\*・成 岡 昌 夫\*

By Noriyoshi Kumano and Masao Naruoka

**要 旨** Prof. S. Falk の提唱した、はり・格子桁・ラーメンなどの解析に対する還元法の考え方で、トラスの弾性変形に対する図解法とを結びつけて、トラスの弾性変形、および、部材力を、電子計算機で求めようとしたものである。

## 1. はしがき

トラスの解法には種々の方法がある。このうち、変形法による解法は、一般の教科書・参考書に見あたらないので、文献1),2)に述べた。この方法では、トラスの節点の変位が、連立多元一次方程式の解として求められ、ついで、部材力が求められる。しかし、この方法では、一つの節点に二つの変位があるから、支点を含めて  $n$  個の節点をもつ単純トラスでは、 $(2n-3)$  元の連立多元一次方程式を解く必要がある。節点の数が多くなると、電子計算機の助けを借りても、方程式の解法には多少の時間を必要とすることになり、高次不静定の場合ならいざ知らず、低次不静定の場合には、必ずしも有利でない。

連続ばりの解法として、最近注目されているものに、S. Falk 教授の提唱した還元法がある(文献3),4)）。この方法は、さらにさかのぼると、M. Hetenyi 教授が1941年に考えた method of initial conditions を、マトリックスを用いてさらに発展させたものと考えられることができる。これらの方法は、「初期(左端)の未知量および途中の未知量をそのまま右端へ移行させ、最後に、右端条件と途中の条件を用いて解く」方法である。Falk は、Feldmatrix, Punktmatrix (かけあわせて、Übertragungsmatrizen という)を用いて、連続ばり、ラーメン、格子桁などを解いている。

Williot-Mohr の変位図によってトラスの変形を求める場合、両支点をとりあえず自由端と仮定し、任意の一部材の方向を不変とし、かつ、そのうちの任意の一つの節点を不動点と仮定して出発し、変位図を作成する。しかる後、二つの支点の条件を満足するように、変位図を修正する。

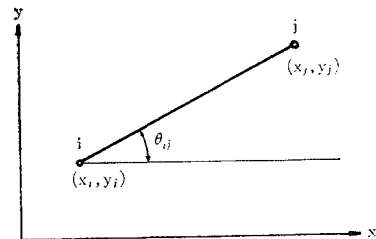
この Williot-Mohr の変位図の書き方と還元法における任意量の決定が相似しているから、双方を組み合わせることを考えよう。Williot-Mohr の変位図の作成にあたって、ある一つの節点の変位  $(u, v)$  とこれに隣る節点

の一つの変位  $(u)$  との3つを任意量として出発し、変位図の作図をすべて計算機で行なう。このようにして得られたトラスの右端支点の変位は、与えられた支点条件とことなるので、はりの還元法の場合と同様に、修正する。このようにして、すべての節点の変位が求められるはずであり、節点の変位が求められると、部材力はただちに求められる。この方法は、すべての安定な、内的静定(外的に不静定であってもよしい)トラスに適用することができる。ここでは、説明の便宜上、鉛直材を欠く平行弦ワレントラスを例にとり、説明したいと思う。

## 2. 部材力の変位による表示、および、節点におけるつりあい条件式

トラスの部材のうち、一つの部材  $(ij)$  を考える(図1)。節点を  $i, j$ 、その座標値を  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ 、部材の長さを  $l_{ij}$ 、断面積を  $A_{ij}$  とする。部材が外力の作用によって生じた部材力  $S_{ij}$  のもとに  $\Delta l_{ij}$  だけ変形し、両節点が  $(u_i, v_i), (u_j, v_j)$  だけの変位をしたものとすれば、Hooke の法則により、部材力  $S_{ij}$  はつぎのように表わされる。

図-1



$$\begin{aligned}
 S_{ij} &= \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \Delta l_{ij} \\
 &= \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \left\{ \frac{(u_j - u_i)(x_j - x_i)}{l_{ij}} + \frac{(v_j - v_i)(y_j - y_i)}{l_{ij}} \right\} \\
 &= (EA_{ij}/l_{ij}) \{ (u_j - u_i) \cos \theta_{ij} + (v_j - v_i) \sin \theta_{ij} \}
 \end{aligned}$$

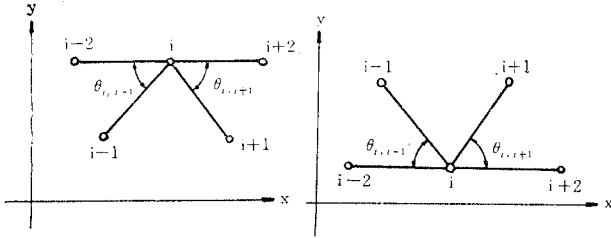
さらに  $(EA_{ij}/l_{ij}) = (EA/l)_{ij}$  と表わし、 $(EA/l)_{ij}/(EA/l)_c = k_{ij}$  とし、実際の変位  $(u, v)$  の  $(EA/l)_c$  倍を新しく変位と考える(単位は力となる)と、

$$S_{ij} = k_{ij} \{ (u_j - u_i) \cos \theta_{ij} + (v_j - v_i) \sin \theta_{ij} \} \dots\dots\dots (1)$$

いま、平行弦ワレントラスを対象にして、節点のつりあい方程式を考えると、つぎの2つの場合に分かれ

\* 正会員 三菱重工業KK広島造船所鉄構部  
\* 正会員 工博 名古屋大学教授工学部土木工学科

図-2



る(図-2 参照)。

(1)  $i=2n$  (偶数) の場合 (上弦節点)

つりあい方程式はつぎようになる。

$$\sum F_{i,x}=0: -S_{i,i-2} \cdot \cos \theta_{i,i-2} - S_{i,i-1} \cdot \cos \theta_{i,i-1} + S_{i,i+1} \cdot \cos \theta_{i,i+1} + S_{i,i+2} \cdot \cos \theta_{i,i+2} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)_1$$

$$\sum F_{i,y}=0: S_{i,i-1} \cdot \sin \theta_{i,i-1} + S_{i,i+1} \cdot \sin \theta_{i,i+1} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)_2$$

式(2)<sub>1</sub>では  $\cos \theta_{i,i-2} = \cos \theta_{i,i+2} = 1$  であるので、省略してさしつかえないが、式の構成の都合上、そのまま用いることとする。

式(2)に式(1)を代入するにあたって、

$$b = k \cos^2 \theta, \quad c = k \sin \theta \cdot \cos \theta, \quad d = k \cdot \sin^2 \theta \quad \dots (3)$$

なる記号を用いることとすれば、

$$\{b_{i,i-2} \cdot u_{i-2} + b_{i,i-1} \cdot u_{i-1} - (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2}) u_i + b_{i,i+1} \cdot u_{i+1} + b_{i,i+2} \cdot u_{i+2}\} + \{c_{i,i-1} \cdot v_{i-1} - (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) v_i - c_{i,i+1} \cdot v_{i+1}\} = 0 \quad \dots \dots \dots (4)_1$$

$$-c_{i,i-1} \cdot u_{i-1} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) u_i + c_{i,i+1} \cdot u_{i+1} - d_{i,i-1} \cdot v_i + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1}) v_i - d_{i,i+1} \cdot v_{i+1} = 0 \quad \dots \dots \dots (4)_2$$

(2)  $i=2n+1$  (奇数) の場合 (下弦節点)

つりあい方程式はつぎようになる。

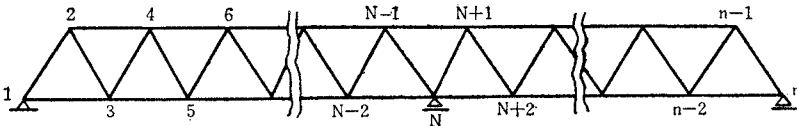
$$\sum F_{i,x}=0: -S_{i,i-2} \cdot \cos \theta_{i,i-2} - S_{i,i-1} \cdot \cos \theta_{i,i-1} + S_{i,i+1} \cdot \cos \theta_{i,i+1} + S_{i,i+2} \cdot \cos \theta_{i,i+2} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)_1$$

$$\sum F_{i,y}=0: S_{i,i-1} \cdot \sin \theta_{i,i-1} + S_{i,i+1} \cdot \sin \theta_{i,i+1} - W_i = 0 \quad \dots \dots \dots (5)_2$$

式(5)に式(1)を代入して、

$$\{b_{i,i-2} \cdot u_{i-2} + b_{i,i-1} \cdot u_{i-1} - (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2}) u_i + b_{i,i+1} \cdot u_{i+1} + b_{i,i+2} \cdot u_{i+2}\} + \{-c_{i,i-1} \cdot v_{i-1} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) v_i + c_{i,i+1} \cdot v_{i+1}\} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)_1$$

図-3



$$-c_{i,i-1} \cdot u_{i-1} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) u_i + c_{i,i+1} \cdot u_{i+1} + \{d_{i,i-1} \cdot v_{i-1} - (d_{i,i-1} + d_{i,i+1}) v_i + d_{i,i+1} \cdot v_{i+1}\} - W_i = 0 \quad \dots \dots \dots (6)_2$$

### 3. おおのの節点の変位の初期値による表示

平行弦連続ワレントラスの(図-3)の任意の節点の変位を求めよう。式(4)<sub>1</sub>, (4)<sub>2</sub> から、

a)  $i=2n$  の場合

$$u_{i+2} = \{-b_{i,i-2} \cdot u_{i-2} - b_{i,i-1} \cdot u_{i-1} + (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2}) u_i - b_{i,i+1} \cdot u_{i+1} - c_{i,i-1} \cdot v_{i-1} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) \cdot v_i + c_{i,i+1} \cdot v_{i+1}\} / b_{i,i+2} \quad \dots \dots \dots (7)_1$$

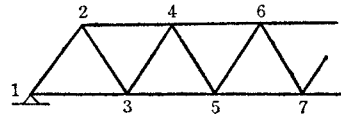
$$v_{i+1} = \{-c_{i,i-1} \cdot u_{i-1} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) u_i + c_{i,i+1} \cdot u_{i+1} - d_{i,i-1} \cdot v_{i-1} + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1}) v_i\} / d_{i,i+1} \quad \dots \dots \dots (7)_2$$

b)  $i=2n+1$  の場合

$$u_{i+2} = \{-b_{i,i-2} \cdot u_{i-2} - b_{i,i-1} \cdot u_{i-1} + (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2}) u_i - b_{i,i+1} \cdot u_{i+1} + c_{i,i-1} \cdot v_{i-1} - (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) v_i - c_{i,i+1} \cdot v_{i+1}\} / b_{i,i+2} \quad \dots \dots \dots (8)_1$$

$$v_{i+1} = \{c_{i,i-1} \cdot u_{i-1} - (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) u_i - c_{i,i+1} \cdot u_{i+1} - d_{i,i-1} \cdot v_{i-1} + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1}) v_i + W_i\} / d_{i,i+1} \quad \dots \dots \dots (8)_2$$

図-4



式(7), (8)によって、つぎのことがわかる。すなわち、 $n=2$  として、 $i=4$  の場合(図-4 参照)を考えよう。式(7)<sub>2</sub> から、 $(u_3, u_4, u_5), (v_3, v_4)$  を既知として  $v_5$  が求められる。式(7)<sub>1</sub> から  $(u_2, u_3, u_4, u_5), (v_3, v_4, v_5)$  を既知として、 $u_6$  が求められる。つぎに、 $i=5$  の場合を考えると、式(8)<sub>2</sub> から、 $(u_4, u_5, u_6), (v_4, v_5)$  を既知として、 $v_6$  が求められる。さらに、式(8)<sub>1</sub> から  $(u_3, u_4, u_5, u_6), (v_4, v_5, v_6)$  を既知として、 $u_7$  が求められる。以下 cyclic となるのであるが、 $(u_2, u_3, u_4, u_5), (v_3, v_4)$  のすべてを既知とするのではなく、以下述べるように、 $(u_2, u_3), (v_2)$  の3つのみを初期値として与えると、 $(u_4, u_5), (v_3, v_4)$  は求められるのである。これを示そう。ただし、左支点において、 $u_1 = v_1 = 0$  とする。

①  $i=2$  の場合:

式(7)<sub>2</sub> から、

$$v_3 = \{(c_{2,1} - c_{2,3}) u_2 + c_{2,3} \cdot u_3 + (d_{2,1} + d_{2,3}) v_2\} / d_{2,3} \quad \text{となるから、}$$

$$v_3 = \alpha_{3,1} \cdot u_2 + \alpha_{3,2} \cdot u_3 + \alpha_{3,3} \cdot v_2 + \alpha_{3,4}$$

とおくことができる。式 (7)<sub>1</sub> から、

$$u_4 = \{(b_{2,1} + b_{2,3} + b_{2,4})u_2 - b_{2,3} \cdot u_3 + (c_{2,1} - c_{2,3})v_2 + c_{2,3} \cdot v_3\} / b_{2,4}$$

となるが、 $v_3$  にさきに求めた式を代入すると、

$$u_4 = \beta_{4,1} \cdot u_2 + \beta_{4,2} \cdot u_3 + \beta_{4,3} \cdot v_2 + \beta_{4,4}$$

とおくことができる。

②  $i=3$  の場合：式 (8)<sub>2</sub>, (8)<sub>1</sub> から、まったく同様にして、

$$v_4 = \alpha_{4,1} \cdot u_2 + \alpha_{4,2} \cdot u_3 + \alpha_{4,3} \cdot v_2 + \alpha_{4,4}$$

$$u_5 = \beta_{5,1} \cdot u_2 + \beta_{5,2} \cdot u_3 + \beta_{5,3} \cdot v_2 + \beta_{5,4}$$

とおくことができる。

以上のようにして、 $v_3, u_4, v_4, u_5$  は初期値 ( $u_2, u_3, v_2$ ) のみをもって、表わすことができる。

$\alpha_{3,1} \sim \alpha_{3,4}, \alpha_{4,1} \sim \alpha_{4,4}, \beta_{4,1} \sim \beta_{4,4}, \beta_{5,1} \sim \beta_{5,4}$  の詳細については説明すべきであるが、便宜上、省略させていただく。

③ 連続スパンの第1スパン(最左スパン)の格点の変位の初期値による表示：

上記の ①, ②, および、式 (7), (8) より考えて、最左スパンのすべての  $v_{i+1}, u_{i+2}$  は、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} v_{i+1} &= \alpha_{i+1,1} \cdot u_2 + \alpha_{i+1,2} \cdot u_3 + \alpha_{i+1,3} \cdot v_2 + \alpha_{i+1,4} \\ u_{i+2} &= \beta_{i+2,1} \cdot u_2 + \beta_{i+2,2} \cdot u_3 + \beta_{i+2,3} \cdot v_2 + \beta_{i+2,4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

式 (9) の  $\alpha, \beta$  はつぎのように定義される。

a)  $i=2n$  の場合

$$\alpha_{i+1,j} = \{-c_{i,i-1} \cdot \beta_{i-1,j} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) \beta_{i,j} + c_{i,i+1} \cdot \beta_{i+1,j} - d_{i,i-1} \cdot \alpha_{i-1,j} + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1}) \alpha_{i,j}\} / d_{i,i+1} \quad (j=1 \sim 4) \dots\dots\dots(10)_1$$

$$\beta_{i+2,j} = \{-b_{i,i-2} \cdot \beta_{i-2,j} - b_{i,i-1} \cdot \beta_{i-1,j} + (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2}) \beta_{i,j} - b_{i,i+1} \cdot \beta_{i+1,j} - c_{i,i-1} \cdot \alpha_{i-1,j} + [c_{i,i-1} - c_{i,i+1}] \alpha_{i,j} + c_{i,i+1} \cdot \alpha_{i+1,j}\} / b_{i,i+2} \dots\dots\dots(10)_2$$

b)  $i=2n+1$  の場合

$$\alpha_{i+1,j} = \{c_{i,i-1} \cdot \beta_{i-1,j} - (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) \beta_{i,j} - c_{i,i+1} \cdot \beta_{i+1,j} - d_{i,i-1} \cdot \alpha_{i-1,j} + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1}) \alpha_{i,j}\} / d_{i,i+1} \quad (j=1 \sim 3) \dots\dots\dots(11)_1$$

$$\alpha_{i+1,4} = \{c_{i,i-1} \cdot \beta_{i-1,4} - (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) \beta_{i,4} - c_{i,i+1} \cdot \beta_{i+1,4} - d_{i,i-1} \cdot \alpha_{i-1,4} + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1}) \alpha_{i,4} + W_i\} / d_{i,i+1} \dots\dots\dots(11)_2$$

$$\beta_{i+2,j} = \{-b_{i,i-2} \cdot \beta_{i-2,j} - b_{i,i-1} \cdot \beta_{i-1,j} + (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2}) \beta_{i,j} - b_{i,i+1} \cdot \beta_{i+1,j} + c_{i,i-1} \cdot \alpha_{i-1,j} \dots\dots\dots(12)$$

$$- (c_{i,i-1} - c_{i,i+1}) \alpha_{i,j} - c_{i,i+1} \cdot \alpha_{i+1,j}\} / b_{i,i+2} \quad (j=1 \sim 4) \dots\dots\dots(11)_3$$

ただし、

$$\beta_{1,1} = \beta_{1,2} = \beta_{1,3} = \beta_{1,4} = 0$$

$$\beta_{2,1} = 1, \beta_{2,2} = \beta_{2,3} = \beta_{2,4} = 0$$

$$\beta_{3,1} = 0, \beta_{3,2} = 1, \beta_{3,3} = \beta_{3,4} = 0$$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{1,4} = 0$$

$$\alpha_{2,1} = 0, \alpha_{2,2} = 0, \alpha_{2,3} = 1, \alpha_{2,4} = 0$$

である。

④ 連続スパンの第2スパン目以降(図-3 参照)

外力によって生ずる中間支点の反力を  $R_N$  とし、支点での鉛直方向のつりあい条件式を求めて整理すると、つぎのようになる。

$$v_{N+1} = \{c_{N,N-1} \cdot u_{N-1} - (c_{N,N-1} - c_{N,N+1}) u_N - c_{N,N+1} \cdot u_{N+1} - d_{N,N-1} \cdot v_{N-1} + (d_{N,N-1} + d_{N,N+1}) v_N + W_N - R_N\} / d_{N,N+1}$$

ここで、 $R_N$  は未知量であるので、初期値  $u_2, u_3, v_2$  と同様の考え方をすると、つぎのように表わすことができる。

$$v_{N+1} = \alpha_{N+1,1} \cdot u_2 + \alpha_{N+1,2} \cdot u_3 + \alpha_{N+1,3} \cdot v_2 + \alpha_{N+1,4} + p_{N+1} \cdot R_N$$

ここに、 $\alpha_{N+1,1} \sim \alpha_{N+1,4}$  は式 (11)<sub>1-2</sub> において定義されているものであり、 $p_{N+1}$  はつぎのようである。

$$p_{N-1} = -1/d_{N,N+1}$$

また、支点  $N$  における水平方向のつりあい条件式を求めて整理すると、つぎのようになる。

$$u_{N+2} = -\{ -b_{N,N-2} \cdot u_{N-2} - b_{N,N-1} \cdot u_{N-1} + (b_{N,N-2} + b_{N,N-1} + b_{N,N+1} + b_{N,N+2}) u_N - b_{N,N+1} \cdot u_{N+1} + c_{N,N-1} \cdot v_{N-1} - (c_{N,N-1} - c_{N,N+1}) v_N - c_{N,N+1} \cdot v_{N+1}\} / b_{N,N+2}$$

上式の  $v_{N+1}$  にさきに求めた式を代入して、 $u_{N+2}$  を初期値と未知量  $R_N$  によって表わせば、つぎのようになる。

$$u_{N+2} = \beta_{N+2,1} \cdot u_2 + \beta_{N+2,2} \cdot u_3 + \beta_{N+2,3} \cdot v_2 + \beta_{N+2,4} + q_{N+2} \cdot R_N$$

ここに、 $\beta_{N+2,1} \sim \beta_{N+2,4}$  は、式 (11)<sub>3</sub> によって、定義されているものであり、 $q_{N+2}$  はつぎのように定義される。

$$q_{N+2} = -c_{N,N+1} \cdot p_{N+1} / b_{N,N+2}$$

したがって、いま中間支点の節点番号を左から  $N(1), N(2), \dots, N(k), \dots, N(K)$  とすれば、左から  $(k+1)$  スパン目では、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} v_{i+1} &= \alpha_{i+1,1} \cdot u_2 + \alpha_{i+1,2} \cdot u_3 + \alpha_{i+1,3} \cdot v_2 + \alpha_{i+1,4} + p_{i+1,1} \cdot R_{N(1)} + \dots + p_{i+1,k} \cdot R_{N(k)} \\ u_{i+2} &= \beta_{i+2,1} \cdot u_2 + \beta_{i+2,2} \cdot u_3 + \beta_{i+2,3} \cdot v_2 + \beta_{i+2,4} + q_{i+2,1} \cdot R_{N(1)} + \dots + q_{i+2,k} \cdot R_{N(k)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここで、 $p, q$  はつぎのように表わされる。

a)  $i=2n$  の場合：

$$p_{i+1,k} = \{-c_{i,i-1} \cdot q_{i-1,k} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1})q_{i,k} + c_{i,i+1} \cdot q_{i+1,k} - d_{i,i-1} \cdot p_{i-1,k} + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1})p_{i,k}\} / d_{i,i+1} \quad (k=1, 2, \dots, K) \dots\dots\dots(13)_1$$

$$q_{i+2,k} = \{-b_{i,i-2} \cdot q_{i-2,k} - b_{i,i-1} \cdot q_{i-1,k} + (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2})q_{i,k} - b_{i,i+1} \cdot q_{i+1,k} - c_{i,i-1} \cdot p_{i-1,k} + (c_{i,i-1} - c_{i,i+1})p_{i,k} + c_{i,i+1} \cdot p_{i+1,k}\} / b_{i,i+2} \quad (k=1, 2, \dots, K) \dots\dots\dots(13)_2$$

b)  $i=2n+1$  の場合：

$$p_{i+1,k} = \{c_{i,i-1} \cdot q_{i-1,k} - (c_{i,i-1} - c_{i,i+1})q_{i,k} - c_{i,i+1} \cdot q_{i+1,k} - d_{i,i-1} \cdot p_{i-1,k} + (d_{i,i-1} + d_{i,i+1})p_{i,k}\} / d_{i,i+1} \quad (k=1, 2, \dots, K) \dots\dots\dots(14)_1$$

$$q_{i+2,k} = \{-b_{i,i-2} \cdot q_{i-2,k} - b_{i,i-1} \cdot q_{i-1,k} + (b_{i,i-2} + b_{i,i-1} + b_{i,i+1} + b_{i,i+2}) \cdot q_{i,k} - b_{i,i+1} \cdot q_{i+1,k} + c_{i,i-1} \cdot p_{i-1,k} - (c_{i,i-1} - c_{i,i+1})p_{i,k} - c_{i,i+1} \cdot p_{i+1,k}\} / b_{i,i+2} \quad (k=1, 2, \dots, K) \dots\dots\dots(14)_2$$

ただし、

$$q_{N(k)-1,k} = q_{N(k)}, k = q_{N(k)+1,k} = 0$$

である。

なお、式(14)<sub>1</sub>、(14)<sub>2</sub>は中間支点上では成立しないから、 $i=N(k)$ の場合には、常に、

$$p_{N(k)+1,k} = -1/d_{N(k),N(k)+1} \\ q_{N(k)+2,k} = -c_{N(k),N(k)+1} \cdot p_{N(k)+1} / b_{N(k),N(k)+2}$$

以上により、すべての節点の変位は、初期値  $u_2, u_3, v_2$  と、荷重、および、中間支点の反力  $R_{N(k)}$  によって、表わされることになる。

つぎに、初期値  $u_2, u_3, v_2$  と中間支点反力  $R_{N(k)}$  を決定することを考えよう。

4. 初期値と中間支点反力の決定

ここで、これまでに使用されていないつりあい方程式はつぎの3つである(図-3参照)。

$$\sum F_{n-1,y} = 0, \sum F_{n-1,x} = 0, \sum F_{n,x} = 0$$

すなわち、つぎのようである。

$$\begin{aligned} & -c_{n-1,n-2} \cdot u_{n-2} + (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})u_{n-1} \\ & + c_{n-1,n} \cdot u_n - d_{n-1,n-2} \cdot v_{n-2} \\ & + (d_{n-1,n-2} + d_{n-1,n})v_{n-1} = 0 \\ & b_{n-1,n-3} \cdot u_{n-3} + b_{n-1,n-2} \cdot u_{n-2} \\ & - (b_{n-1,n-3} + b_{n-1,n-2} + b_{n-1,n})u_{n-1} + b_{n-1,n} \cdot u_n \\ & + c_{n-1,n-2} \cdot v_{n-2} - (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})v_{n-1} = 0 \\ & b_{n,n-2} \cdot u_{n-2} + b_{n,n-1} \cdot u_{n-1} - (b_{n,n-2} + b_{n,n-1}) \cdot u_n \\ & - c_{n,n-1} \cdot v_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

以上の3つの式も、それぞれ、初期値  $u_2, u_3, v_2$  と中間支点の反力  $R_{N(k)}$  によって、つぎのように表わすこ

とができる。

$$\begin{aligned} & \{-c_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,1} + (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})\beta_{n-1,1} \\ & + c_{n-1,n}\beta_{n,1} - d_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,1} \\ & + (d_{n-1,n-2} + d_{n-1,n})\alpha_{n-1,1}\} u_2 \\ & + \{-c_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,2} + (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})\beta_{n-1,2} \\ & + c_{n-1,n} \cdot \beta_{n,2} - d_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,2} \\ & + (d_{n-1,n-2} + d_{n-1,n})\alpha_{n-1,2}\} u_3 \\ & + \{-c_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,3} + (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})\beta_{n-1,3} \\ & + c_{n-1,n} \cdot \beta_{n,3} - d_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,3} \\ & + (d_{n-1,n-2} + d_{n-1,n})\alpha_{n-1,3}\} v_2 \\ & + \{-c_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,4} + (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})\beta_{n-1,4} \\ & + c_{n-1,n} \cdot \beta_{n,4} - d_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,4} \\ & + (d_{n-1,n-2} + d_{n-1,n})\alpha_{n-1,4}\} \\ & + \sum_{k=1}^K \{-c_{n-1,n-2} \cdot q_{n-2,k} \\ & + (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})q_{n-1,k} + c_{n-1,n} \cdot q_{n,k} \\ & - d_{n-1,n-2} \cdot p_{n-2,k} \\ & + (d_{n-1,n-2} + d_{n-1,n})p_{n-1,k}\} R_{N(k)} = 0 \dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{b_{n-1,n-3} \cdot \beta_{n-3,1} + b_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,1} \\ & - (b_{n-1,n-3} + b_{n-1,n-2} + b_{n-1,n})\beta_{n-1,1} \\ & + b_{n-1,n} \cdot \beta_{n,1} + c_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,1} \\ & - (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})\alpha_{n-1,1}\} u_2 + \{b_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-3,2} \\ & + b_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,2} - (b_{n-1,n-3} + b_{n-1,n-2} \\ & + b_{n-1,n})\beta_{n-1,2} + b_{n-1,n} \cdot \beta_{n,2} + c_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,2} \\ & - (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})\alpha_{n-1,2}\} u_3 \\ & + \{b_{n-1,n-3} \cdot \beta_{n-3,3} + b_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,3} \\ & - (b_{n-1,n-3} + b_{n-1,n-2} + b_{n-1,n})\beta_{n-1,3} \\ & + b_{n-1,n} \cdot \beta_{n,3} + c_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,3} \\ & - (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})\alpha_{n-1,3}\} v_2 \\ & + \{b_{n-1,n-3} \cdot \beta_{n-3,4} + b_{n-1,n-2} \cdot \beta_{n-2,4} \\ & - (b_{n-1,n-3} + b_{n-1,n-2} + b_{n-1,n})\beta_{n-1,4} \\ & + b_{n-1,n} \cdot \beta_{n,4} \\ & + c_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-2,4} - (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n}) \cdot \alpha_{n-1,4}\} \\ & + \sum_{k=1}^K \{b_{n-1,n-3} \cdot q_{n-3,k} + b_{n-1,n-2} \cdot q_{n-2,k} \\ & - (b_{n-1,n-3} + b_{n-1,n-2} + b_{n-1,n})q_{n-1,k} \\ & + b_{n-1,n} \cdot q_{n,k} + c_{n-1,n-2} \cdot p_{n-2,k} \\ & - (c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n})p_{n-1,k}\} R_{N(k)} = 0 \dots\dots(16) \end{aligned}$$

つぎに、中間支点のたわまない条件から、次式が成立

$$\{b_{n,n-2} \cdot \beta_{n-2,1} + b_{n,n-1} \cdot \beta_{n-1,1} - (b_{n,n-2} + b_{n,n-1})\beta_{n,1} - c_{n,n-1} \cdot \alpha_{n-1,1}\} u_2 + \{b_{n,n-2} \cdot \beta_{n-2,2} + b_{n,n-1} \cdot \beta_{n-1,2} - (b_{n,n-2} + b_{n,n-1})\beta_{n,2} - c_{n,n-1} \cdot \alpha_{n-1,2}\} u_3 + \{b_{n,n-2} \cdot \beta_{n-2,3} + b_{n,n-1} \cdot \beta_{n-1,3} - (b_{n,n-2} + b_{n,n-1})\beta_{n,3} - c_{n,n-1} \cdot \alpha_{n-1,3}\} v_2 + \{b_{n,n-2} \cdot \beta_{n-2,4} + b_{n,n-1} \cdot \beta_{n-1,4} - (b_{n,n-2} + b_{n,n-1})\beta_{n,4} - c_{n,n-1} \cdot \alpha_{n-1,4}\} + \sum_{k=1}^K \{b_{n,n-2} \cdot q_{n-2,k} + b_{n,n-1} \cdot q_{n-1,k} - (b_{n,n-2} + b_{n,n-1})q_{n,k} - c_{n,n-1} \cdot p_{n-1,k}\} \cdot R_{N(k)} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

する。

$$\left. \begin{aligned}
 v_{N(1)} &= \alpha_{N(1),1} \cdot u_2 + \alpha_{N(1),2} \cdot u_3 \\
 &\quad + \alpha_{N(1),3} \cdot v_2 + \alpha_{N(1),4} = 0 \\
 v_{N(2)} &= \alpha_{N(2),1} \cdot u_2 + \alpha_{N(2),2} \cdot u_3 + \alpha_{N(2),3} \cdot v_2 \\
 &\quad + \alpha_{N(2),4} + \rho_{N(2),1} \cdot R_{N(1)} = 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 v_{N(K)} &= \alpha_{N(K),1} \cdot u_2 + \alpha_{N(K),2} \cdot u_3 + \alpha_{N(K),3} \cdot v_2 \\
 &\quad + \alpha_{N(K),4} + \rho_{N(K),1} \cdot R_{N(1)} + \dots \\
 &\quad + \rho_{N(K),K-1} \cdot R_{N(K-1)} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

したがって、式(15),(16),(17),(18)を連立多元一次方程式として解けば、初期値  $u_2, u_3, v_2$  と中間支点反力  $R_{N(k)}$  が得られる。

これが求められると、すでに計算されている  $\alpha, \beta, \rho, q$  を用いて、式(9)、および、式(12)によって、すべての節点の変位が求められ、さらに、式(1)によって、すべての部材力が求められる。

5. Flow Chart

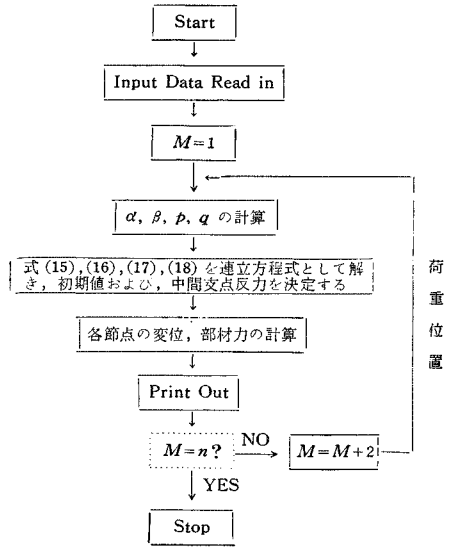
上記の計算式を、IBM 7090 に対して、プログラムした。図-5 に、その Flow Chart を示す。

6. 計算例

計算例として使用した平行弦連続ワレントラスを、図-6 に示す。図-7 (a) は  $A_{ij}$  の値を、また、図(b)には部材 15-17, 17-19 の  $(EA/l)_c = 479\ 204.8\ \text{kg/cm}$  の値を標準にとった場合の、各部材の  $k$  の値を示す。

Input Data は、つぎのようである。

図-5 Flow Chart



- (1) スパン数、および、各支点の格点番号
- (2) 上、下弦材の剛比
- (3) 斜材の剛比
- (4) 各スパンの斜材の長さ×cos θ
- (5) 各スパンの斜材の長さ
- (6) トラスの高さ、および、定数  $(EA/l)_c$

すなわち、図-6,7 の場合は、Input Data は表-1 のようになる。これを説明すると、つぎのようである。

表-1 において、第1行の3はスパンの数、17,33,49 は中間支点、および、右端支点の格点番号である。さて、以下の5行(0.431~0.431)は、上、下弦材の剛比で、

図-6 計算を対象とした3スパン連続トラス

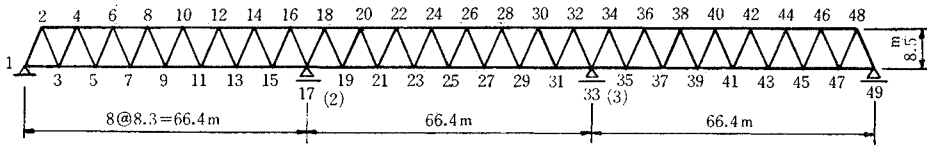


図-7 部材の性質

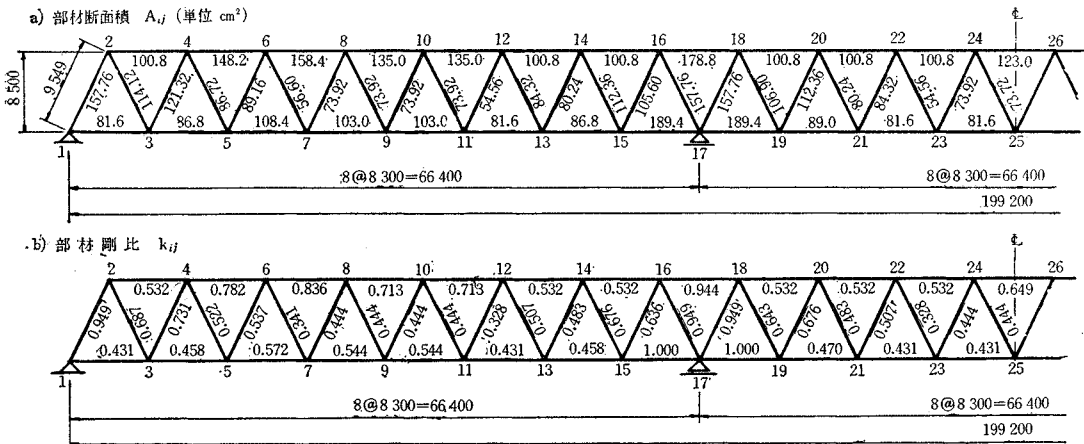


表-1 図-6.7 のトラスに対する Input Data

3	17	33	49								
0.431	0.532	0.458	0.782	0.572	0.836	0.544	0.713	0.544	0.713	0.431	
0.532	0.458	0.532	1.000	0.944	1.000	0.532	0.470	0.532	0.431	0.532	
0.431	0.649	0.431	0.532	0.431	0.532	0.470	0.532	1.000	0.944	1.000	
0.532	0.458	0.532	0.431	0.713	0.544	0.713	0.544	0.836	0.572	0.782	
0.458	0.532	0.431									
0.949	0.687	0.731	0.522	0.537	0.341	0.444	0.444	0.444	0.444	0.328	
0.507	0.483	0.676	0.636	0.949	0.949	0.643	0.676	0.483	0.507	0.328	
0.444	0.444	0.444	0.444	0.328	0.507	0.483	0.676	0.643	0.949	0.949	
0.636	0.676	0.483	0.507	0.328	0.444	0.444	0.444	0.444	0.341	0.537	
0.522	0.731	0.687	0.949								
415.0	415.0	415.0									
945.9	945.9	945.9									
850.0	479 204.8										

部材 1~3, 2~4, 3~5, 4~6 の順にならべてある。つぎの5行(0.949~0.949)は斜材の剛比で、部材 1~2, 2~3, 3~4, ... の順にならべてある。415.0 は、各スパンの(斜材長 × cos θ)であり、943.9 は各スパンの斜材長、850.0 はトラスの高さ、479 204.8(kg/cm) は定数(EA/l)<sub>c</sub>(部材 15~17, 17~19 に対する値)である。

つぎに、outputの一部、すなわち、荷重 1.0 が格点 9 に作用する場合の output を表-2 に示す。

ここで、REA は支点反力、DFH は水平方向の変位、DFV は鉛直方向の変位、AFH は上・下弦材の軸方向力、AFD は斜材の軸方向力を示す。軸方向力は格点番号の右側のもを表わしている。

さて、式(15),(16),(17),(18)に相当する式は表-3 のようである(実際には必要ないので output しなくてもよいが、説明の便宜上求めたものである)。

最後の項の前に=が入る。この5元の連立方程式を解いて、

$$u_2 = -0.83600489D-01, u_3 = -0.31391926D-00,$$

$$v_2 = 0.44432909D-01, R_{17} = -0.84411586D-00,$$

$$R_{33} = 0.14458826D-00$$

となる。これらの初期値、および、中間の支点反力の値が基礎となって、他のすべての値が求められるのである。ただし、これらの u, v の値は、実変位の(EA/l)<sub>c</sub>倍が求められているので、実変位は計算値を 479 204.8 で割って求められる。これが output されている。また R

表-2 単位荷重が格点 9 に作用する場合の Output

9	REA				
1	0.406074D 00				
2	0.710261D 00				
3	-0.138745D 00				
4	0.224098D -01				
9	DFH	DFV	AFH	AFD	
1	-0.	-0.	0.198260D 00	-0.451889D 00	
2	0.215293D -04	-0.116172D -04	-0.396320D 00	0.451889D 00	
3	0.959923D -06	-0.231874D -04	0.584780D 00	-0.451889D 00	
4	0.199740D -04	-0.339063D -04	-0.793039D 00	0.451889D 00	
5	0.366992D -05	-0.438768D -04	0.991299D 00	-0.451889D 00	
6	0.178577D -04	-0.527579D -04	-0.118956D 01	0.451889D 00	
7	0.728642D -05	-0.609966D -04	0.138782D 01	-0.451889D 00	
8	0.148884D -04	-0.670717D -04	-0.158608D 01	0.451889D 00	
9	0.126101D -04	-0.705475D -04	0.129610D 01	0.660934D 00	
10	0.102463D -04	-0.659366D -04	-0.100613D 01	-0.660934D 00	
11	0.175820D -04	-0.588982D -04	0.716152D 00	0.660934D 00	
12	0.730158D -05	-0.491995D -04	-0.426177D 00	-0.660934D 00	
13	0.210494D -04	-0.394601D -04	0.136202D 00	0.660934D 00	
14	0.562989D -05	-0.287540D -04	0.153774D 00	-0.660934D 00	
15	0.216700D -04	-0.186522D -04	-0.443749D 00	0.660934D 00	
16	0.623307D -05	-0.870205D -05	0.733725D 00	-0.660934D 00	
17	0.207440D -04	-0.900773D -18	-0.676926D 00	-0.129461D 00	
18	0.785503D -05	0.597604D -05	0.620127D 00	-0.129461D 00	
19	0.193314D -04	0.111116D -04	-0.563328D 00	-0.129461D 00	
20	0.102875D -04	0.150824D -04	0.506529D 00	0.129461D 00	
21	0.168302D -04	0.176544D -04	-0.449730D 00	-0.129461D 00	
22	0.122744D -04	0.192857D -04	0.392930D 00	0.129461D 00	
23	0.146527D -04	0.195303D -04	-0.336131D 00	-0.129461D 00	
24	0.138157D -04	0.192619D -04	0.279332D 00	0.129461D 00	
25	0.130253D -04	0.181989D -04	-0.222533D 00	-0.129461D 00	
26	0.147138D -04	0.166973D 04	0.165734D 00	0.129461D 00	
27	0.119478D -04	0.146698D 04	-0.108935D -00	-0.129461D 00	
28	0.153639D -04	0.120853D -04	0.521362D -01	0.129461D 00	
29	0.114204D -04	0.956696D -05	0.466288D -02	-0.129461D 00	
30	0.156688D -04	0.691910D -05	-0.614619D -01	0.129461D 00	
31	0.114411D -04	0.445906D -05	0.118261D 00	-0.129461D 00	
32	0.153277D -04	0.209391D -05	-0.175060D 00	0.129461D -00	
33	0.116879D -04	-0.142344D -17	0.164119D 00	0.249381D -01	
34	0.149407D -04	-0.152715D -05	-0.153178D 00	-0.249381D -01	
35	0.129303D -04	0.285705D -05	0.142236D 00	0.249381D -01	
36	0.143399D -04	-0.389899D -05	-0.131295D 00	-0.249381D -01	
37	0.126784D -04	-0.459025D -05	0.120354D 00	0.249381D -01	
38	0.138249D -04	-0.503581D -05	-0.109413D 00	-0.249381D -01	
39	0.132611D -04	-0.513449D -05	0.984713D -01	0.249381D -01	
40	0.135047D -04	-0.512296D -05	-0.875300D -01	-0.249381D -01	
41	0.136389D -04	-0.492700D -05	0.765888D -01	0.249381D -01	
42	0.132485D -04	-0.460596D -05	-0.656475D -01	-0.249381D -01	
43	0.139327D -04	-0.414149D -05	0.547063D -01	0.249381D -01	
44	0.130846D -04	-0.355761D -05	-0.437650D -01	-0.249381D -01	
45	0.141323D -04	-0.293827D -05	0.328238D -01	0.249381D -01	
46	0.129678D -04	-0.225882D -05	-0.218825D -01	-0.249381D -01	
47	0.142818D -04	-0.153806D -05	0.109413D -01	0.249381D -01	
48	0.128820D -04	-0.770327D -06	0.	-0.349381D -01	
49	0.143348D -04	-0.	0.	0.	

表-3

-0.86928227D 02	0.27562201D 02	-0.16204577D 03	0	0	-0.19445609D 03
-0.80982880D 03	0.10567339D 03	-0.16266855D 04	0.28381236D 03	0	-0.73037196D 03
-0.21303949D 04	0.17957592D 03	-0.43266757D 04	0.17185024D 04	0.18597228D 03	-0.28945718D 04
-0.10489022D 04	0.87675300D 03	-0.21303949D 04	0.85465707D 03	0.98609995D 02	-0.14317851D 04
-0.10487196D 04	-0.88106300D 02	0.21300207D 04	-0.85465707D 03	-0.98609995D 02	0.14317851D 04

はそのままの値が出ている。

表-2 はこのようにして求めた実変位、および、軸方向力である。計算上出てくる支点反力は  $R_2=R_{17}$ 、および、 $R_3=R_{33}$  のみであるが、体裁をととのえるため、 $R_1(\text{左支点})=-S_{1-2} \cdot \sin \theta$ 、 $R_4(\text{右支点})=R_{47}=-S_{46-47} \cdot \sin \theta$  より、 $R_1$ 、 $R_4$  を求めて  $R_2$ 、 $R_3$  に追加してある。

実際の計算においては、最初に、荷重項係数  $\alpha_{i,4}$ 、 $\beta_{i,4}$  以外のすべての  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $p$ 、 $q$  を計算しておき、その後、荷重位置が移動するごとに、 $\alpha_{i,4}$ 、 $\beta_{i,4}$  を計算してゆき、5元1次方程式を解くことになる。その後の操作は上に述べたとおりである。

この計算例に使用した平行弦ワレントラス(図-7)の data は古雪橋のものである。本橋は、文献 5) によって自動設計されたのであるが、影響線の計算は弾性荷重を用いて性状係数を計算する弾性方程式法によっている。支点反力、軸方向力の影響線については、双方の計算結果は完全に一致している。

また、この計算例において、下弦節点合計 21 個の荷重状態(それぞれの節点に単位集中荷重)についてのすべての演算時間は約 1.5 分、output の印刷を含め、4.5 分であった。

## 7. む す び

計算例に示した平行弦ワレントラスの解析にあたっては、弾性荷重法と弾性方程式法とを用いて、まず、中間支点の反力を求め、ついで、各部材の軸方向力を求めるのが普通である。しかし、この研究では、このような伝統的な方法によらず、また、変形法の単なる応用によらず、還元法の考え方を用いて解くことを考え、その方

法を詳述した。ただ、連続ばりの還元法による計算のように、マトリックスの掛算による演算が行なわれないのが欠点である。しかし、変形法の単なる応用によれば、matrix inversion を行なわなければならないので、ばく大な記憶容量を必要とするが、この方法では、記憶容量をきわめて節約できるので、medium size の記憶容量の計算機にも応用しうる利点がある。また、支点反力、部材力の影響線と同時に、格点の変位の影響線が求められるのも、大きな長所であろう。

この研究にあたっては、UNICOM (University Computer, 大学共同利用計算機-IBM 7090) を用いた。プログラムの検閲には、日本 IBM 社 Data Center の西辻彦氏のご援助を得、また、若干の追加計算については、日本 IBM 社のご好意によった。ここに記して、感謝の意を表したい。

## 参 考 文 献

- 1) K. Mise : Elastic Distorsions of Framed Structures, Memoirs of Faculty of Engineering, Kyushu Imperial University, 4,2 (1922), p. 175.
- 2) 成岡・山本 : 変形法による滑節構造物の解法, 土木学会誌, 46,12 (昭 36.12), p. 9.
- 3) M. Naruoka : Formulation of Equilibrium Equations for Pin-Jointed Structures, Publications of International Association for Bridge and Structural Engineering, 21(1961), p. 179.
- 4) 熊野・成岡 : Reduction 法と、それによる振り剛性のない格子桁の解法, 土木学会誌, 50,7 (昭 40.7), p. 93.
- 5) 森脇・成岡 : 電子計算機による 3 スパス 連続平行弦ワレントラスの自動設計に関する研究, 土木学会誌, 48, 10 (昭 38.10), p. 40.

(1965.12.12・受付)