

点支承を持ち集中荷重を受けるはりおよび板の解析

ANALYSIS OF POINT SUPPORTED BEAMS AND PLATES UNDER CONCENTRATED LOADS

久保 慶三郎*・吉田 裕**

By Keizaburo Kubo and Yutaka Yoshida

1. はじめに

面に垂直な荷重を受ける平面構造は構造系の中でひんぱんに用いられ、また重要な位置を占めているため、これまで数多くの研究がなされてきた。その応用に関する研究はぼう大な数にのぼるが、実際問題としてこれを考えるとき、種々の問題点が残し、設計等に際して困難を感じる場合が多々あるのが実状である。特に多数の点支承を持ち集中荷重を受けるような板に関しては、その境界条件の複雑さのゆえに、ごく特殊な場合を除いて全く未解決のまま残されている。ところが実際の床版橋等を考えると、点支承を持ち集中荷重が作用する板の荷重点および支承付近の応力分布がどのようになるか、とか多数の点支承で支持された構造の支点反力がどのように配分されるか、といった問題が重要な問題となって提起される。

最近、行列によって構造物を解析することがさかんに行なわれている。これは、電子計算機が広く普及し、行列の演算が容易になったためであることはいまでもない。行列による方法は、骨組構造のように個々の構造要素が明確に分離できるような問題に対しては特に有利である。板のように連続した構造の場合には、これを骨組構造に置換したり、微分方程式を階差式に展開して解析する方法が採られる。

階差式による方法は、解法が機械的であり、計算的には非常に有利であるが、集中荷重が作用する場合のように、特異点や反曲線の多い問題には、あまりよい精度が得られないということが通説になっている。

しかし、点支承を持ち集中荷重を受ける構造を、その根本にさかのぼって考察するとき、このような問題に対しては、通説とは逆に階差法が非常に精度よく適用できることがわかる。さらに、このような問題に対しては、高精度階差法といった問題はほとんど意味を持たなくなること、また一般にいわれるように、曲げモーメントは、たわみの2次微係数で表わされるから、曲げモーメントの誤差は、たわみの誤差より大きくなるといった論議は全く成り立たず、むしろ曲げモーメントの値に対して意義の明確な値が得られることがわかる。

ここでは、はりおよび板の問題について上記の諸点を

* 正会員 工博 東京大学教授 生産技術研究所

** 正会員 工修 東京大学助手 生産技術研究所

説明し、実際の計算結果と実験結果を比較検討する。

2. 集中荷重を受けるはり

点支承を持ち集中荷重を受けるはりは、支点反力を含めて多数の集中荷重が作用してつりあいを保っている。このようなはりの曲げモーメント分布は、各荷重作用点の曲げモーメントの値を直線で結んだものとなる。いまはりの部分を取り出した図-1 についてつりあいを考えると、集中荷重は

$$S_{i,i+1} \lambda_{i,i+1} + M_i - M_{i+1} = 0$$

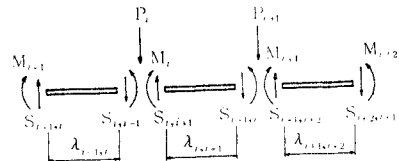
$$S_{i,i-1} \lambda_{i-1,i} + M_{i-1} - M_i = 0$$

$$P_i = S_{i,i-1} - S_{i,i+1}$$

より

$$P_i = -\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} M_{i-1} + \left(\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} + \frac{1}{\lambda_{i,i+1}} \right) M_i - \frac{1}{\lambda_{i,i+1}} M_{i+1} \dots \dots \dots (1)$$

図-1



と表わされる。これは、当然のことであるが図-2のような曲げモーメント図の直線の勾配の変化量によって、集中荷重の大きさが表わされることを示している。これはまた、連続した荷重 $p(x)$ に対しては

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x)$$

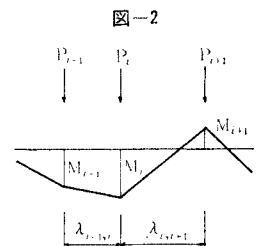
と表わされる関係が有限の間隔で作用する集中荷重の場合には、やはり有限の間隔を有する点の曲げモーメントの値によって正しく表わされることを示している。

つぎに、はりのたわみ δ について考察する。

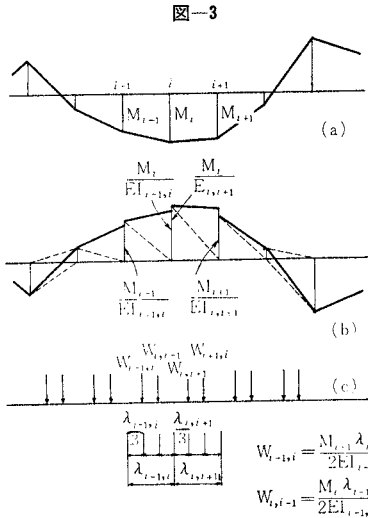
微小変位の場合には、曲げモーメントとたわみ δ との間に

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

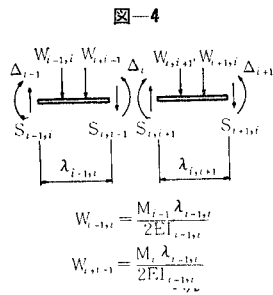
の関係が成立し、たわみ δ を求めることは、 $\frac{M}{EI}$ なる



荷重を受けるはりの曲げモーメントを求めることに等値である。これは、Mohr の定理として、周知の事実である。そこで、連続して分布する $\frac{M}{EI}$ なる弾性荷重を受けるはりの曲げモーメントを求めることを考えてみる。先にも述べたように、集中荷重が作用するはりの曲げモーメント分布は、図-3 (a) のように各荷重作用点の曲げモーメントの値を直線で結んだものとなる。



いま、各荷重作用点間(たとえば i と $i+1$ の間)では曲げ剛性 $EI_{i,i+1}$ が一定であるものとすれば、弾性荷重は、図-3 (b) のようになる。図-3 (c) の系は図-3 (b) の系の連続した荷重を、点線と実線で区切られた三角形荷重に分解し、各荷重をその重心の位置に作用する集中荷重に置き換えたものである。ここで、図-3 (b) の系と (c) の系によってはりの各点の曲げモーメントを求めることを考えてみると、 $i, i+1, \dots$ 等の各切断点の曲げモーメントを求める場合にかぎり (b), (c) 二つの荷重系は全く同等であることは明白である。そこで、図-3 (c) の系のつりあいを考える。図-4 を参照して、各点の曲げモーメント M とたわみ d との関係式はつぎのようになる。



$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{i-1,i}}{6EI_{i-1,i}} M_{i-1} + \left(\frac{\lambda_{i-1,i}}{3EI_{i-1,i}} + \frac{\lambda_{i,i+1}}{3EI_{i,i+1}} \right) M_i \\ & + \frac{\lambda_{i,i+1}}{6EI_{i,i+1}} M_{i+1} \\ & = -\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} d_{i-1} + \left(\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} + \frac{1}{\lambda_{i,i+1}} \right) d_i \\ & - \frac{1}{\lambda_{i,i+1}} d_{i+1} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

いま、式 (1) および式 (2) によってはりを解析する場合には、各切断点の曲げモーメント M およびたわみ d の値は正解となる。また変断面のはりの解析も容易である。

つぎに、このような問題を普通の階差式に展開して解くことの意義について考察する。説明の便宜のために、曲げ剛性が一定で等間隔に荷重が作用する場合について考える。集中荷重系 P と曲げモーメント系 M (図-5 (a), (b)) は式 (1) において $\lambda = \text{一定}$ として、次式の関係にある。

$$P_i = \frac{1}{\lambda} (-M_{i-1} + 2M_i - M_{i+1}) \dots \dots \dots (3)$$

図-5 (c) の連続した弾性荷重系における各斜線の部分の荷重を集中荷重に置換した系が図-5 (d) である。この集中荷重系 W と曲げモーメント系(すなわちたわみ系) d との間に次式の関係が成り立つことは、 P と M の関係から明らかである。すなわち、

$$W_i \left(= \frac{\lambda}{EI} M_i \right) = \frac{1}{\lambda} (-d_{i-1} + 2d_i - d_{i+1}) \dots (4)$$

いま、式 (3) は、微分方程式

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x)$$

を普通の階差式に展開し、

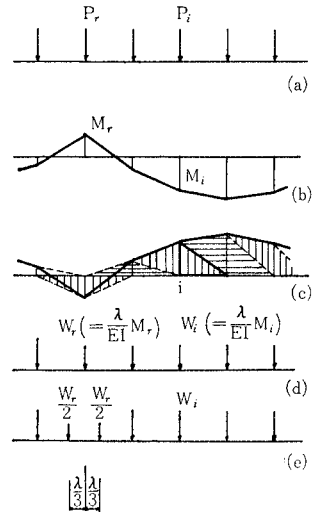
$$p_i \lambda = P_i$$

と置いたものに等しく、また、式 (4) は

$$\frac{d^2 d}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

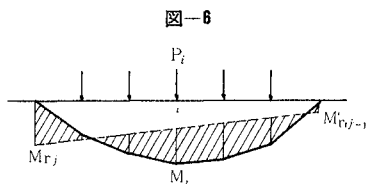
を階差式に展開したものに等しい。すなわち、集中荷重が作用するはりの問題を普通の階差式に展開して解くことは、式 (3) および式 (4) によって解くことに相当する。いま、式 (3) は正しい関係式であるから、この両式によって解いた解と正しい解との間の相違は、図-5 (c) の系を (d) の系に置換する際に生ずる。そこで、(c) および (d) の系によって d_i を求めることを比較してみる。明らかに、(d) の系では (c) の系における太線内の三角形の荷重による i 点に関する曲げモーメントを考慮していないことがわかる。これが、階差式に展開して解く際に、たわみ d_i に含まれる誤差である。

図-5



いま、連続ばりの支点の変位 d_r が 0 であるという条件で問題を解くものとすれば、以上の理由から、支点の曲げモーメント M_r には、当然誤差が含まれてくる。したがって、はりの中間の曲げモーメント M_i にも誤差が含まれてくる。このような表現をするのは以下の理由による。すなわち、たわみ d_i の誤差と曲げモーメント M_i の誤差の性質を考えると、先に考察したように、たわみの誤差は本質的なものであり、曲げモーメントの大きな部分では、それだけたわみの絶対誤差が大きくなる。

一方、集中荷重の大きさによって、曲げモーメント線の勾配の変化量が決まるから、各支点間のように、作用荷重の大きさが既知の部分では、曲げモーメント線の形は決まってしまう。すなわち、曲げモーメント M_i の誤差は、支点の曲げモーメント M_r の誤差のために図-6 に点線で示した基準線がずれることによって生ずる誤差である。



それゆえに、集中荷重を受けるはりを階差式に展開して解析する際には、一般にいわれるように、曲げモーメントはたわみの 2 次微係数で表わされるから曲げモーメントの誤差はたわみの誤差より大きくなるといった論議は全く成り立たなくなる。

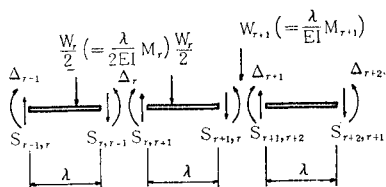
いま、図-5 (d) の系において、支点 r の部分だけ弾性荷重を二つの集中荷重に分解して作用させた図-5(e) の系を考えてみよう。この (e) の系によれば、 d_r を正しく評価することができることは明白である。この部分のつりあいを考えて M と d の関係を求めると図-7 を参照して次式を得る。すなわち、

$$\frac{2\lambda}{3EI} M_r = \frac{1}{\lambda} (-d_{r-1} + 2d_r - d_{r+1}) \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\lambda}{6EI} M_r + \frac{\lambda}{EI} M_{r+1} = \frac{1}{\lambda} (-d_r + 2d_{r+1} - d_{r+2}) \dots\dots\dots (6)$$

r 点とその前後の $r-1$, $r+1$ 点以外の中点では当然、式 (4) の関係となる。この関係式によって問題を解く

図-7

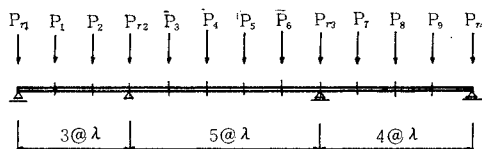


場合には、求められる各点のたわみ d_i は誤差の含まれた値となるが、曲げモーメント M_i の値は正解となることは明らかである。

つぎに、計算例によって上記諸点を具体的に示す。

図-8 のような 3 径間連続ばりを解くものとする。式 (3) より M と P は行列によって正しくつぎのように表わされる。

図-8



$$\begin{pmatrix} 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ \vdots \\ -1, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{r2} \\ \vdots \\ M_9 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_{r2} \\ \vdots \\ P_9 \end{pmatrix} \dots\dots (a)$$

また、 M と d の関係は、式 (2) によれば正しくつぎのように表わされる。

$$\frac{\lambda^2}{EI} \begin{pmatrix} 2/3, 1/6 \\ 1/6, 2/3, 1/6 \\ 1/6, 2/3, 1/6 \\ \vdots \\ 1/6, 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{r2} \\ \vdots \\ M_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ \vdots \\ -1, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_{r2} \\ \vdots \\ d_9 \end{pmatrix} \dots\dots (b)$$

式 (4) によれば、 M と d の関係はつぎのようになる。

$$\frac{\lambda^2}{EI} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{r2} \\ \vdots \\ M_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ \vdots \\ -1, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_{r2} \\ \vdots \\ d_9 \end{pmatrix} \dots\dots (c)$$

また、式 (5)、式 (6) により、 $r-1$, r , $r+1$ の点だけ修正した関係は、つぎのようになる。

$$\frac{\lambda^2}{EI} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & 1/6 & & & & & & & \\ & & 2/3 & & & & & & & \\ & & & 1/6 & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & 1/6 & \\ & & & & & & & & 2/3 & \\ & & & & & & & & & 1/6 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{r_2} \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_{r_3} \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2, -1 \\ -1, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_{r_2} \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_{r_3} \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (d)$$

表-1 式(a)と式(b)による解

	P-1	P-2	P-3	P-4	P-5	P-6	P-7	P-8	P-9
d-1=	.36333	.28749	-.17845	-.22104	-.17440	-.08517	.04436	.05070	.03169
d-2=	.28749	.31770	-.22307	-.27630	-.21800	-.10646	.05545	.06337	.03961
d-3=	-.17845	-.22307	.46074	.64038	.52299	.25929	-.13574	-.15513	-.09696
d-4=	-.22104	-.27630	.64038	1.14433	1.04477	.54124	-.28745	-.32852	-.20532
d-5=	-.17440	-.21800	.52299	1.04477	1.17171	.67688	-.37129	-.42433	-.26521
d-6=	-.08517	-.10646	.25929	.54124	.67688	.49724	-.30342	-.34677	-.21673
d-7=	.04436	.05545	-.13574	-.28745	-.37129	-.30342	.47053	.59728	.38371
d-8=	.05070	.06337	-.15513	-.32852	-.42433	-.34677	.59728	.96831	.68853
d-9=	.03169	.03961	-.09696	-.20532	-.26521	-.21673	.38371	.68853	.60741
M-1=	.60583	.25729	-.13384	-.16578	-.13080	-.06388	.03327	.03802	.02376
M-2=	.21166	.51458	-.26768	-.33156	-.26160	-.12776	.06654	.07605	.04753
M-r ₂ =	-.18251	-.22814	-.40152	-.49734	-.39240	-.19163	.09981	.11407	.07129
M-3=	-.13587	-.16984	.44776	.13643	.00122	-.02266	.01597	.01825	.01141
M-4=	-.08923	-.11153	.29703	.77019	.39483	.14631	-.06787	-.07757	-.04848
M-5=	-.04259	-.05323	.14631	.40395	.78844	.31529	-.15171	-.17338	-.10837
M-6=	.00406	.00507	-.00441	.03772	.18205	.48426	-.23555	-.26920	-.16825
M-r ₃ =	.05070	.06337	-.15513	-.32852	-.42433	-.34677	-.31939	-.36502	-.22814
M-7=	.03802	.04753	-.11635	-.24639	-.31825	-.26008	.51046	.22624	.07890
M-8=	.02535	.03169	-.07757	-.16426	-.21217	-.17338	.34030	.81749	.32593
M-9=	.01267	.01584	-.03878	-.08213	-.10608	-.08669	.01705	.40875	.69297

(× $\frac{\lambda^3}{EI}$)

表-2 式(a)と式(c)による解

	P-1	P-2	P-3	P-4	P-5	P-6	P-7	P-8	P-9
d-1=	.47801	.34752	-.17305	-.21560	-.17163	-.08511	.03972	.04539	.02837
d-2=	.34752	.43440	-.21631	-.25950	-.21454	-.10638	.04965	.05674	.03546
d-3=	-.17305	-.21631	.60567	.75461	.60071	.29787	-.13901	-.15887	-.09929
d-4=	-.21560	-.26950	.75461	1.36312	1.19433	.61702	-.28794	-.32908	-.20567
d-5=	-.17163	-.21454	.60071	1.19433	1.38759	.78723	-.36738	-.41986	-.26241
d-6=	-.08511	-.10638	.29787	.61702	.78723	.63830	-.29787	-.34043	-.21277
d-7=	.03972	.04965	-.13901	-.28794	-.36738	-.29787	.60567	.69220	.43262
d-8=	.04539	.05674	-.15887	-.32908	-.41986	-.34043	.69220	1.14823	.78014
d-9=	.02837	.03546	-.09929	-.20567	-.26241	-.21277	.43262	.78014	.73759
M-1=	.60851	.26064	-.12979	-.16170	-.12872	-.06383	.02979	.03404	.02128
M-2=	.21702	.52128	-.25957	-.32340	-.25745	-.12766	.05957	.06809	.04255
M-r ₂ =	-.17447	-.21809	-.38936	-.48511	-.38617	-.19149	.08936	.10213	.06383
M-3=	-.13050	-.16312	.45674	.14610	.00709	-.02128	.00993	.01135	.00709
M-4=	-.08652	-.10816	.30284	.77730	.40035	.14894	-.06950	-.07943	-.04965
M-5=	-.04255	-.05319	.14894	.40851	.79362	.31915	-.14894	-.17021	-.10638
M-6=	.00142	.00177	-.00496	.03972	.18688	.48936	-.22837	-.26099	-.16312
M-r ₃ =	.04539	.05674	-.15887	-.32908	-.41986	-.34043	-.30780	-.35177	-.21986
M-7=	.03404	.04255	-.11915	-.24681	-.31489	-.25532	.51915	.23617	.08511
M-8=	.02270	.02837	-.07943	-.16454	-.20993	-.17021	.34610	.82411	.39007
M-9=	.01185	.01418	-.03972	-.08227	-.10496	-.08511	.17305	.41206	.69504

(× $\frac{\lambda^3}{EI}$)

表-3 式(a)と式(d)による解

	P-1	P-2	P-3	P-4	P-5	P-6	P-7	P-8	P-9
<i>A</i> -1=	.46430	.33038	-.20076	-.24867	-.19620	-.09582	.04990	.05603	.03565
<i>A</i> -2=	.32277	.40346	-.26768	-.33156	-.26160	-.12776	.06654	.07605	.04753
<i>A</i> -3=	-.20110	-.25137	.53536	.66312	.52319	.25551	-.13308	-.15209	-.09506
<i>A</i> -4=	-.23591	-.29489	.68989	1.27270	1.11057	.56563	-.29876	-.34144	-.21340
<i>A</i> -5=	-.18150	-.22687	.54738	1.11209	1.30312	.72943	-.39658	-.45323	-.28327
<i>A</i> -6=	-.08450	-.10562	.25856	.54753	.70722	.57795	-.34268	-.39163	-.24477
<i>A</i> -7=	.05070	.06337	-.15513	-.32852	-.42433	-.34677	.55561	.63498	.39686
<i>A</i> -8=	.05492	.06865	-.16806	-.35589	-.45970	-.37567	.65399	1.10456	.75285
<i>A</i> -9=	.03380	.04225	-.10342	-.21901	-.28289	-.23118	.41207	.75665	.72291
	P-1	P-2	P-3	P-4	P-5	P-6	P-7	P-8	P-9
<i>M</i> -1=	.60583	.25729	-.13384	-.16578	-.13080	-.06388	.03327	.03802	.02376
<i>M</i> -2=	.21166	.51458	-.26768	-.33156	-.26160	-.12776	.06654	.07605	.04753
<i>M</i> - <i>r</i> ₂ =	-.18251	-.22814	-.40152	-.49734	-.39240	-.19163	.09981	.11407	.07129
<i>M</i> -3=	-.13587	-.16984	.44776	.13643	.00122	-.02266	.01597	.01825	.01141
<i>M</i> -4=	-.08923	-.11153	.29703	.77019	.39483	.14631	-.06787	-.07757	-.04848
<i>M</i> -5=	-.04259	-.05323	.14631	.40395	.78844	.31529	-.15171	-.17338	-.10837
<i>M</i> -6=	.00406	.00507	-.00441	.03772	.18205	.48426	-.23555	-.26920	-.16825
<i>M</i> - <i>r</i> ₃ =	.05070	.06337	-.15513	-.32852	-.42433	-.34677	-.31939	-.36502	-.22814
<i>M</i> -7=	.03802	.04753	-.11635	-.24639	-.31825	-.26008	.51046	.22624	.07890
<i>M</i> -8=	.02535	.03169	-.07757	-.16426	-.21217	-.17338	.34030	.81749	.38593
<i>M</i> -9=	.01267	.01584	-.03878	-.08213	-.10608	-.08669	.17015	.40875	.69297

($\times \frac{1}{EI}$)

($\times \lambda$)

式(a)と(b)によって、 $A_{ri}=0$ の条件から求めた \mathbf{A} と \mathbf{M} の解を表-1 に、式(a)と(c)によって求めた解を表-2 に、式(a)と(d)によって求めた解を表-3 に示す。

いま、表-1 に示した式(a)と(b)による解がこの問題の正解である。これと表-3 の解を比較してみればわかるように、式(a)と(d)によって解析した場合には、 \mathbf{A} は正解とはならないが、 \mathbf{M} は正解となる。また、式(a)と(c)によって問題を解析することは、普通の階差式に展開して解くことに相当するが、式(4)の説明で明らかなように、その解の意義は明確である。

3. 集中荷重を受ける板

前章で集中荷重が作用するはりの問題を行列によって解析する方法を提案し、その意義について考察したが、ここで、このはりに対する解析法を板の問題に拡張することを試みる。

周知のように、等方性板の基本式

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

は、曲げモーメント和

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}$$

に関して、

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \dots\dots\dots(7)$$

と表わすことができる。また、 M は、たわみ ω に関して、

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \dots\dots\dots(8)$$

となる。

この式(7)、(8)をはりの基本式

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p, \quad \frac{d^2 \delta}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

と対比して、はりの式(1)の集中荷重と曲げモーメントの関係および式(2)の曲げモーメントとたわみの関係を板の問題に適用する。

すなわち、板の点(i, j)に作用する集中荷重の大きさ P_{ij} を P_{ij}^x と P_{ij}^y との和と考え $P_{ij} = P_{ij}^x + P_{ij}^y$ とする。いま、

図-9

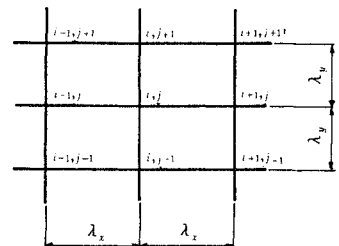


図-9 を参照して、 M_{ij} を(i, j)点を中心として幅 λ_x, λ_y の曲げモーメント和の値の平均値を代表するものと考え、

$$P_{ij}^x = \frac{-M_{i-1,j} + 2M_{i,j} - M_{i+1,j}}{\lambda_x} \times \lambda_y$$

$$P_{ij}^y = \frac{-M_{i,j-1} + 2M_{i,j} - M_{i,j+1}}{\lambda_y} \times \lambda_x$$

と表わすことができる。したがって、 P_{ij} は次式で表わされる。

$$P_{i,j} = \frac{-M_{i-1,j} + 2M_{i,j} - M_{i+1,j}}{\lambda_x} \times \lambda_y + \frac{-M_{i,j-1} + 2M_{i,j} - M_{i,j+1}}{\lambda_y} \times \lambda_x \dots\dots(9)$$

つぎに、 M_{ij} と同様に A_{ij} を点(i, j)を中心として幅 λ_x, λ_y のたわみの値の平均値を代表するものと考え、式(8)をはりの式(2)と対応させることができる。すなわち、板の曲げモーメント和 M

とたわみ d の関係式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_x \lambda_y}{D} \left\{ \frac{2}{3} M_{ij} + \frac{1}{12} (M_{i-1,j} + M_{i+1,j} + M_{i,j-1} + M_{i,j+1}) \right\} \\ = \frac{-4d_{i-1,j} + 2d_{i,j} - d_{i+1,j}}{\lambda_x} \times \lambda_y \\ + \frac{-4d_{i,j-1} + 2d_{i,j} - d_{i,j+1}}{\lambda_y} \times \lambda_x \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

いま、板の弾性荷重に相当する $\frac{M}{D}$ を点 (i, j) に集中したものと考えれば、点 (i, j) の集中荷重の大きさは、 $\frac{M_{ij}}{D} \cdot \lambda_x \cdot \lambda_y$ となるから、式(9)と対比して M と d の関係式は

$$\begin{aligned} \frac{M_{ij}}{D} \lambda_x \lambda_y = \frac{-4d_{i-1,j} + 2d_{i,j} - d_{i+1,j}}{\lambda_x} \times \lambda_y \\ + \frac{-4d_{i,j-1} + 2d_{i,j} - d_{i,j+1}}{\lambda_y} \times \lambda_x \\ \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

となる。式(9)および式(11)によって板を解析する場合は、微分方程式を階差式に展開して $p_{ij} \lambda_x \lambda_y = P_{ij}$ とおいた関係式によって解析することに相当する。

しかし、はりの場合と同様に、作用荷重が集中荷重である場合には、式(9)、式(11)の意義は明確になり、平均曲げモーメント和 M_{ij} に対して信頼度の高い解を得ることができる。

式(9)と(10)、また式(9)と(11)によって求められる曲げモーメント和の値は、先に述べたように、点 (i, j) を中心とする幅 λ_x, λ_y の曲げモーメント和の値の平均値を評価していることになる。そこで、間隔 λ_x, λ_y

に対して曲げモーメント和曲面の変化の小さい部分では、 M_{ij} を点 (i, j) の曲げモーメント和の値そのものと考えることができるが、集中荷重作用点付近のように、曲げモーメント和曲面の変化の大きい部分では真の点 (i, j) の曲げモーメント和の値との差が大きくなる。そこで、集中荷重作用点の曲げモーメント和の値をつぎのように再評価する。

4. 集中荷重と曲げモーメント和曲面

いま、図-10を参照して、点 $(0, 0)$ に集中荷重 P_0

が作用し、 A, B, C, \dots, H 点の曲げモーメント和の値 M_A, M_B, \dots, M_H が与えられているとき、 $A-1, B-1, \dots, H-1$ 点の曲げモーメント和の値、 $M_{A-1}, M_{B-1}, \dots, M_{H-1}$ がどのような値となるか考察する。

$A-B, B-C, \dots, G-H$ の間に AB, BC, \dots, HG 点を設け、これらの点の曲げモーメント和の値をそれぞれ

$$M_{AB} = \frac{M_A + M_B}{2},$$

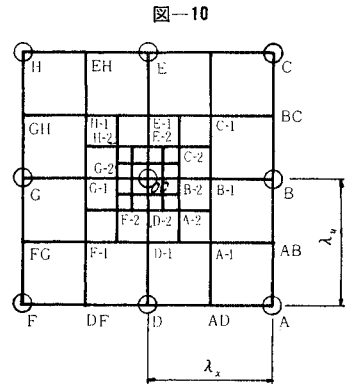


図-10

図-11
M-Surface by Unit Load on the Point (00)

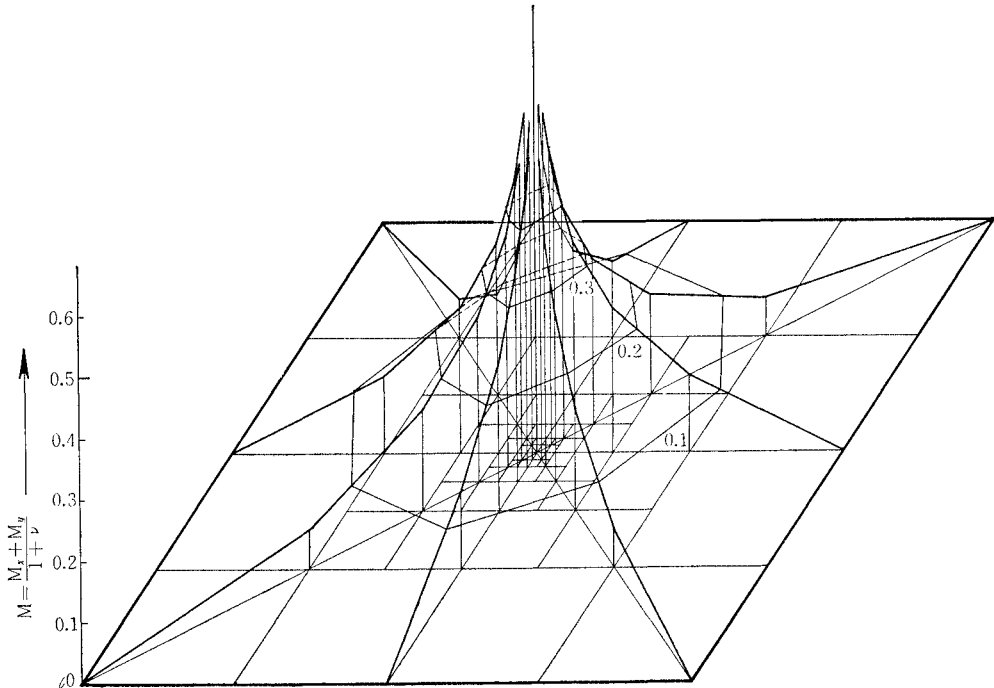


表-4

	M-A	M-B	M-C	M-D	P-O	M-E	M-F	M-G	M-H
M-A-1=	.299107	.263393	.031250	.263393	.062500	.049107	.031250	.049107	.013393
M-B-1=	.098214	.428571	.098214	.125000	.125000	.125000	.026786	.071429	.026786
M-C-1=	.031250	.263393	.299107	.049107	.062500	.263393	.013393	.049107	.031250
M-D-1=	.098214	.125000	.026786	.428571	.125000	.071429	.098214	.125000	.026786
M-O-1=	.062500	.187500	.062500	.187500	.375000	.187500	.062500	.187500	.062500
M-E-1=	.026786	.125000	.098214	.071429	.125000	.428571	.026786	.125000	.098214
M-F-1=	.031250	.049107	.013393	.263393	.062500	.049107	.299107	.263393	.031250
M-G-1=	.026786	.071429	.026786	.125000	.125000	.125000	.098214	.428571	.098214
M-H-1=	.013393	.049107	.031250	.049107	.062500	.263393	.031250	.263393	.299107
M-A-2=	.145966	.244659	.058594	.244659	.164062	.106904	.058594	.106904	.033721
M-B-2=	.093272	.274394	.093272	.164062	.234375	.164062	.047353	.116231	.047353
M-C-2=	.058594	.244659	.145966	.106904	.164062	.244659	.033721	.106904	.058594
M-D-2=	.093272	.164062	.047353	.274394	.234375	.116231	.093272	.164062	.047353
M-O-2=	.070312	.179687	.070312	.179687	.484375	.179687	.070312	.179687	.070312
M-E-2=	.047353	.164062	.093272	.116231	.234375	.274394	.047353	.164062	.093272
M-F-2=	.058594	.106904	.033721	.244659	.164062	.106904	.145966	.244659	.058594
M-G-2=	.047353	.116231	.047353	.164062	.234375	.164062	.093272	.274394	.093272
M-H-2=	.033721	.106904	.058594	.106904	.164062	.244659	.058594	.244659	.145966
M-A-3=	.101558	.214848	.067871	.214848	.270508	.141597	.067871	.141597	.049809
M-B-3=	.083498	.220700	.083498	.174805	.341797	.174805	.059081	.144534	.059081
M-C-3=	.067871	.214848	.101558	.141597	.270508	.214848	.049809	.141597	.067871
M-D-3=	.083498	.174805	.059081	.220700	.341797	.144534	.083498	.174805	.059081
M-O-3=	.071289	.178711	.071289	.178711	.591797	.178711	.071289	.178711	.071289
M-E-3=	.059081	.174805	.083498	.144534	.341797	.220700	.059081	.174805	.083498
M-F-3=	.067871	.141597	.049809	.214848	.270508	.141597	.101558	.214848	.067871
M-G-3=	.059081	.144534	.059081	.174805	.341797	.174805	.083498	.220700	.083498
M-H-3=	.049809	.141597	.067871	.141597	.270508	.214848	.067871	.214848	.101558
M-A-4=	.085074	.197153	.070496	.197153	.377563	.159903	.070496	.159903	.059824
M-B-4=	.077619	.198399	.077619	.177612	.448975	.177612	.065203	.160732	.065203
M-C-4=	.070496	.197153	.085074	.159903	.377563	.197153	.059824	.159903	.070496
M-D-4=	.077619	.177612	.065203	.198399	.448975	.160732	.077619	.177612	.065203
M-O-4=	.071411	.178589	.071411	.178589	.698975	.178589	.071411	.178589	.071411
M-E-4=	.065203	.177612	.077619	.160732	.448975	.198399	.065203	.177612	.077619
M-F-4=	.070496	.159903	.059824	.197153	.377563	.159903	.085074	.197153	.070496
M-G-4=	.065203	.160732	.065203	.177612	.448975	.177612	.077619	.198399	.077619
M-H-4=	.059824	.159903	.070496	.159903	.377563	.197153	.070496	.197153	.085074
M-A-5=	.077946	.187923	.071190	.187923	.484695	.169209	.071190	.169209	.065410
M-B-5=	.074545	.188205	.074545	.178329	.556122	.178329	.068307	.169431	.068307
M-C-5=	.071190	.187923	.077946	.169209	.484695	.187923	.065410	.169209	.071190
M-D-5=	.074545	.178329	.068307	.188205	.556122	.169431	.074545	.178329	.068307
M-O-5=	.071426	.178574	.071426	.178574	.806122	.178574	.071426	.178574	.071426
M-E-5=	.068307	.178329	.074545	.169431	.556122	.188205	.068307	.178329	.074545
M-F-5=	.071190	.199209	.065410	.187923	.484695	.169209	.077946	.187923	.071190
M-G-5=	.068307	.169431	.068307	.178329	.556122	.178329	.074545	.188205	.074545
M-H-5=	.065410	.169209	.071190	.169209	.484695	.187923	.071190	.187923	.077946

$$M_{BC} = \frac{M_B + M_C}{2},$$

.....,

$$M_{HG} = \frac{M_H + M_G}{2}$$

として与える。いま、A-1, B-1, ..., H-1 点には荷重が作用していないから式(9)を参照してつぎの関係が成り立つ。

$$\frac{2M_{A-1} - M_{AB} - M_{D-1}}{\lambda_x/2} \times \frac{\lambda_y}{2} + \frac{2M_{A-1} - M_{B-1} - M_{DA}}{\lambda_y/2} \times \frac{\lambda_x}{2} = 0$$

以下 B-1, C-1, ..., H-1 点で同様の式を組み、点(0, 0)で

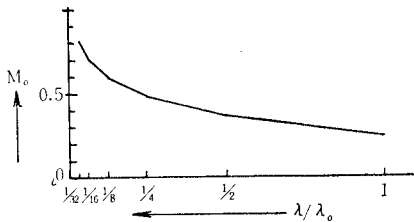
$$\frac{2M_{00-1} - M_{B-1} - M_{C-1}}{\lambda_x/2} \times \frac{\lambda_y}{2} + \frac{2M_{00-1} - M_{E-1} - M_{D-1}}{\lambda_y/2} \times \frac{\lambda_x}{2} = P_{00}$$

として、9個の連立一次方程式が得られ、 M_{00-1} を含めて $M_{A-1}, M_{B-1}, \dots, M_{H-1}$ の9個の未知数が M_A, M_B, \dots, M_H の関数として得られる。この M_{00-1} は点(0, 0)を中心として幅 $\left(\frac{\lambda_x}{2}, \frac{\lambda_y}{2}\right)$ の曲げモーメント和の値の平均値と考えられるものである。つぎに、 $M_{A-1}, M_{B-1}, \dots, M_{H-1}$ を既知数として、さらに内側の各点の曲げモーメント和の値 $M_{A-2}, M_{B-2}, \dots, M_{H-2}$ および M_{00-2} を求めることができる。同様に計算を進めて、集中荷重作用点付近の曲げモーメント和の値を詳細に知る

ことができる。また、同時に、荷重直下の平均曲げモーメント和の値が、その領域が小さくなるにしたがって、どのように変わるかを知ることができる。

いま、 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ の場合について実際に計算を行なった結果を表-4に示す。これは、 M_{A-1}, M_{B-1}, \dots 等が $M_A, M_B, \dots, M_H, P_0$ に関する一次式で与えられるが、その係数行列を示したものである。図-11は、この結果から $M_A = M_B = \dots = M_H = 0$ の場合に、中央に単位の集中荷重が作用したときの曲げモーメント和曲面を描いたものである。また、図-12は、荷重点の平均曲げモーメント和の値が、その領域が小さくなるにしたがって、どのように変化するか、 $M_A = M_B = M_C = \dots = M_H = 0$ の場合についてグラフに描いたものである。

図-12



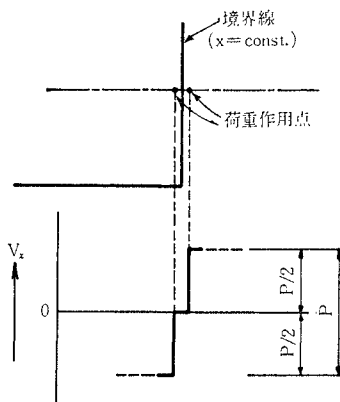
5. 境界条件

点支承を持ち集中荷重が作用する板周辺の境界は、その境界に支点または荷重作用点がない場合は、当然すべて自由辺、自由隅となる。いま、板周辺の境界をつぎのように考察することにより、この境界に支点または集中荷重作用点がある場合にも、自由辺、自由隅の境界条件と同じ条件で解析を行なうことができる。

すなわち、大きな板から与えられた板を切り取るものとする。切り取る線上に支点も集中荷重作用点も存在しなければ、この線上(たとえば $x = \text{const.}$)で $M_x = 0, V_x = 0$ であれば、外側に影響を与えずに切り出すことができる。この線上に集中荷重が作用する場合にはつぎのように考える。

すなわち、集中荷重は切り取り線上に作用するのではなく、図-13に示すように、この線の内側と外側の、この線に非常に近接した2点に半分ずつ作用するものとする。そうすれば、図-13に示すように、辺上に集中荷重が作

図-13



用しながら $V_x = 0$ の状態が実現する。したがって、板の周辺上(たとえば $x = \text{const.}$)内側に集中荷重 P が作用する場合には、この点の集中荷重の大きさを $2P$ とすれば $V_x = 0$ の条件で解析することができる。板の隅に集中荷重 P が作用する場合には、同様の理由で $4P$ を与えることにより $V_x = 0, V_y = 0$ として解析を行なうことができる。また逆に、 $V = 0$ として解析した結果、周辺の支点反力の大きさが、 P_r と得られた場合には、実際の支点反力の大きさは、辺の場合は $P_r/2$ 、隅の場合は $P_r/4$ となる。このように集中荷重作用点のあるなしにかかわらず、一定の境界条件によって解析を行なうことができることは、解析上非常に有利である。

6. 数値解析

ここでは、式(9)、式(11)によって実際に数値計算を行なった結果を示す。この両式によって解析することは、微分方程式を階差式に展開し $p_{ij} \lambda_x \lambda_y = P_{ij}$ とおいた関係式によって解析することに相当する。

(1) 対象の詳細

ここで解析を行なった対象は下記の2種類についてである。

対象(I) 幅40cm、長さ50cm、板厚1cmの矩形板の四隅を単純支持したもの(図-14)

対象(II) 幅60cm、長さ150cm、板厚1cmの矩形板を、支間50cmの3径間連続の板と考え図-15のように、合計8点で単純支持したもの。

計算に用いた弾性係数およびポアソン比の値は、実験を行なった試験体製作材料(アルミ合金)より採取した1号引張試験片の引張試験結果より求めた値

$$E = 0.762 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.3$$

を用いた。ここでは $\lambda_x = \lambda_y = 10 \text{ cm}$ として計算を行ない、荷重作用点の曲げモーメントの値については、4.に述べた方法で補正した。実験では、ゲージ長10mm

図-14

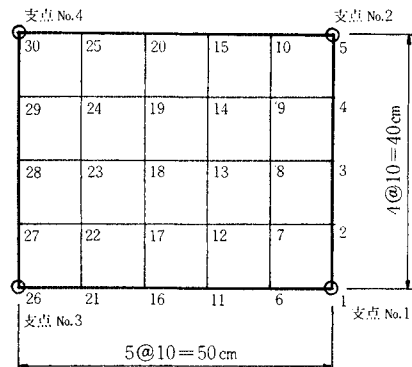
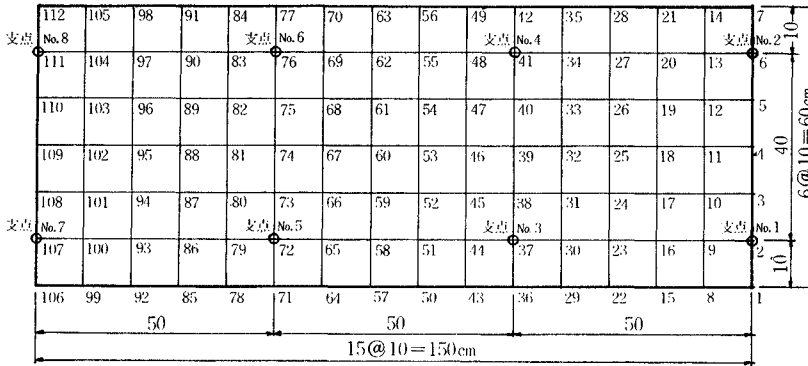


図-15



算結果より支点反力の影響面および単位荷重が作用した場合の各格子点の主曲げモーメントの大きさと方向を描いた図を示す。

(2) 支点反力の影響面

各格子点に荷重が作用した場合に、各支点の支点反力がどれだけの大きさとなるか、作用荷重に対する割合を作用荷重の大きさを1000として、各荷重作用点に数値で示したものが

のロゼットゲージで応力を測定したので、計算においても、これと対応させるために、荷重作用点を中心とする1.25cm幅に分布する曲げモーメントの平均値に相当する値をこの点の曲げモーメントの値とした。8. に計

算結果より、表-5, 6 である。紙数の都合で、対象(II)の支点 No. 2 および支点 No. 4 の場合のみを示した。

(3) 主曲げモーメント

格子点に集中荷重が作用した場合に、各点の主曲げモ

表-5 Influence Surface of Reaction of Support No. 2 (Model No. 2)

0002	0010	0016	0018	0013	-0003	-0033	-0065	-0082	-0068	0002	0158	0373	0622	0891	1166
0000	0008	0013	0015	0011	0000	-0025	-0051	-0064	-0053	0000	0131	0308	0516	0747	1000
0000	0006	0011	0012	0008	-0002	-0020	-0038	-0047	-0035	0011	0106	0238	0395	0571	0760
0001	0005	0009	0009	0006	-0002	-0015	-0027	-0030	-0018	0016	0076	0161	0264	0378	0499
0000	0004	0007	0008	0005	-0002	-0010	-0018	-0019	-0009	0012	0040	0079	0129	0184	0240
0000	0004	0007	0007	0005	0000	-0007	-0013	-0013	-0008	0000	-0005	-0007	-0004	0002	0000
0000	0004	0007	0008	0006	0001	-0005	-0011	-0016	-0019	-0030	-0061	-0097	-0131	-0159	-0181

表-6 Influence Surface of Reaction of Support No. 4 (Model No. 2)

-0021	-0079	-0125	-0141	-0106	0011	0248	0547	0850	1103	1239	1185	1001	0736	0428	0102
0000	-0056	-0097	-0112	-0087	0000	0197	0437	0678	0882	1000	0944	0789	0568	0301	0000
-0000	-0042	-0073	-0083	-0059	0014	0155	0330	0505	0650	0727	0695	0584	0418	0215	-0010
-0002	-0032	-0054	-0058	-0035	0021	0112	0223	0334	0422	0466	0453	0387	0281	0148	0002
-0002	-0024	-0039	-0040	-0021	0016	0063	0117	0169	0206	0224	0227	0203	0153	0085	0012
0000	-0018	-0031	-0032	-0020	0000	0007	0012	0014	0009	0000	0020	0032	0028	0013	0000
0001	-0016	-0029	-0034	-0033	-0036	-0059	-0093	-0130	-0166	-0186	-0162	-0127	-0097	-0079	-0070

表-7 Moment M-1, M-2 (10⁻⁴) and Direction (Degree) of the Model No. 2 By Unit Load (Load Point 019)

-0000	0035	0072	0117	0180	0250	0126	-0258	-0461	-0737	-1023	0201	1270	1948	1180	-0000
-0000	-0001	-0000	-0001	-0007	-0022	-0101	0066	0029	0003	0003	-0057	-0001	-0002	-0006	-0000
.0	-9.4	-3.0	4.0	10.9	16.6	41.8	-26.8	-14.0	-3.5	3.3	-28.1	-1.3	1.9	4.2	.0
0002	0036	0066	0102	0157	0283	-0058	-0233	-0421	-0675	-1280	0147	1288	2258	1277	0083
-0038	-0007	0011	0031	0064	0131	0133	0058	-0027	-0202	-0604	0031	0391	0470	0101	-1068
-12.8	-9.4	-2.5	5.8	16.8	25.0	-35.7	-22.9	-15.2	-8.2	.8	-10.8	7.2	3.6	6.2	15.6
-0013	0034	0061	0092	0123	0150	-0063	-0214	-0388	-0569	-0675	0084	1166	3257	0863	-0275
0021	0005	0015	0027	0038	0031	0097	0078	0082	0127	0293	0692	1373	2651	1733	1458
38.0	-22.6	-7.1	.4	6.0	21.6	-32.5	-16.7	-10.0	-5.1	4.2	16.4	19.7	12.7	-30.2	-23.5
-0001	0029	0056	0083	0101	0090	-0039	-0181	-0330	-0444	-0410	0062	1176	1791	0606	-0086
0019	0012	0015	0020	0023	0023	0058	0082	0134	0239	0432	0706	0616	0977	1309	1257
15.6	-17.7	-4.6	.3	4.4	16.2	-17.1	-5.0	.2	4.4	11.1	27.0	-35.5	2.8	-37.5	-14.7
-0002	0027	0054	0079	0096	0090	-0029	-0161	-0291	-0393	-0376	0014	0842	1093	0691	-0000
0012	0009	0012	0018	0026	0035	0055	0078	0118	0188	0284	0466	0253	0363	0436	0602
-23.2	5.0	.1	.4	1.5	-6.4	13.6	8.7	10.2	13.5	16.8	38.2	-23.2	-3.6	22.9	-.7
0000	0029	0055	0079	0104	0158	-0032	-0154	-0269	-0376	-0548	0252	0637	0801	0548	0003
-0023	-0004	0007	0018	0039	0081	0079	0065	0061	0028	-0115	-0104	0016	0032	-0012	-0282
7.9	3.2	-.2	-3.4	-9.7	-21.4	28.9	19.6	18.4	20.6	22.7	-32.8	-13.9	-5.0	-.2	-5.6
-0000	0028	0057	0085	0117	0145	0074	-0163	-0268	-0357	-0398	0171	0547	0693	0467	-0000
-0000	-0000	-0000	-0000	-0003	-0012	-0061	0051	0046	0038	0028	-0049	-0012	-0005	-0002	-0000
.0	5.4	1.9	-2.8	-8.9	-15.7	-42.4	29.3	22.4	18.0	14.8	-28.2	-8.5	-5.1	-3.2	.0

表-8 Moment M-1, M-2 (10^{-4}) and Direction (Degree) of the Model No. 2
By Unit Load (Load Point 028)

0000	0054	0111	0179	0274	0372	-0090	-0511	-1115	-2032	-3068	2124	5939	2630	1161	0000
0000	-0007	-0006	-0002	-0000	-0007	0044	0000	0039	0195	0512	-1548	-0036	-0385	-0392	0000
.0	-20.4	-13.2	-5.7	2.2	7.8	-35.1	.6	10.6	17.2	22.2	-40.5	-4.5	20.9	30.1	.0
0005	0059	0107	0162	0246	0458	-0066	-0404	-0907	-1791	-3674	0969	2821	1983	1136	0142
-0085	-0035	-0007	0023	0083	0210	0028	-0217	-0440	-0789	-1707	-2049	-1359	-1070	-1339	-2301
-13.9	-14.8	-11.8	-6.8	.5	8.5	-43.3	4.8	24.0	35.2	37.0	-26.5	-5.2	10.9	16.3	13.9
0027	0057	0100	0149	0203	0244	0026	-0362	-0658	-1127	-1820	0579	1379	1265	0926	0552
-0044	-0028	-0017	-0011	-0016	-0059	-0180	-0225	-0455	-0629	-0480	-1555	-1269	-1119	-1262	-1556
-38.0	-20.4	-11.4	-6.3	-1.3	9.3	30.3	-31.4	4.8	23.2	35.2	-27.3	-7.2	8.4	20.2	30.8
0015	0046	0087	0127	0157	0147	0017	-0325	-0493	-0688	-0933	0319	0684	0730	0633	0480
-0020	-0018	-0022	-0032	-0058	-0111	-0192	-0133	-0271	-0340	-0156	-0953	-0875	-0832	-0915	-1051
-40.7	-13.9	-5.3	.1	5.5	14.0	31.9	-34.5	-10.0	17.6	40.2	-26.8	-8.0	8.2	22.2	34.0
0000	0038	0076	0109	0130	0118	0017	-0255	-0355	-0377	0019	0212	0344	0396	0421	0450
-0010	-0016	-0022	-0032	-0052	-0082	-0142	-0053	-0102	-0127	-0409	-0494	-0481	-0478	-0541	-0654
3.9	.2	2.9	7.1	12.5	18.6	39.8	-26.8	-11.2	10.0	-44.5	-27.3	-8.5	10.0	26.9	39.7
0000	0037	0069	0096	0116	0144	-0087	-0198	-0261	-0201	0045	0172	0176	0203	0259	-0145
-0036	-0020	-0016	-0017	-0014	0011	0035	0005	0010	0060	0270	-0141	-0169	-0171	-0173	0503
5.0	6.5	9.1	12.5	17.6	23.9	-35.2	-16.9	-7.0	5.6	42.0	-33.0	-9.7	13.8	38.5	-28.3
0000	0032	0065	0090	0106	0102	-0062	-0169	-0213	-0129	0143	0129	0114	0134	0142	0000
0000	-0003	-0005	-0007	-0009	-0011	0019	0006	0002	0002	-0028	-0048	-0008	-0020	-0065	0000
.0	16.4	15.7	15.9	16.3	18.0	-28.8	-10.9	-5.5	6.6	-23.9	-31.4	-14.8	21.0	34.1	.0

表-9 Moment M-1 M-2 (10^{-4}) and Direction (Degree) of the Model No. 2
By Unit Load (Load Point 047)

0000	-0063	-0129	-0201	-0292	-0380	0077	0542	0905	0745	-0837	-0559	-0357	-0226	-0112	-0000
0000	0014	0016	0012	0004	0000	-0005	-0015	-0040	-0036	0001	0015	0054	0066	0052	-0000
.0	-25.5	-19.5	-13.6	-6.7	-1.7	14.2	9.5	11.9	12.3	-1.5	9.3	21.3	28.5	34.3	.0
-0006	-0069	-0127	-0191	-0280	-0493	0012	0544	1019	1154	-1187	-0538	-0340	-0220	-0119	-0015
0110	0056	0033	0009	-0045	-0184	0105	0179	0214	0057	-0742	-0102	0084	0128	0154	0238
-13.3	-15.6	-14.9	-13.0	-10.3	-5.0	-37.1	24.9	21.1	8.1	12.6	23.7	22.4	21.2	19.0	14.0
-0024	-0067	-0122	-0182	-0244	-0275	0018	0376	0864	2220	-0162	-0380	-0307	-0209	-0118	-0037
0065	0054	0053	0062	0091	0169	0333	0639	1269	2614	1156	0551	0316	0220	0187	0187
-31.3	-16.8	-11.0	-8.2	-5.5	1.3	6.3	-3.8	-16.3	-41.6	-3.0	6.4	9.9	12.4	15.9	24.6
-0007	-0056	-0109	-0160	-0198	-0179	0014	0273	0862	1209	0045	-0222	-0231	-0169	-0091	-0012
0036	0045	0059	0086	0139	0233	0367	0579	0586	0790	0854	0544	0340	0229	0174	0147
-24.0	-8.0	-3.0	.3	3.8	9.0	18.9	31.8	-39.7	14.7	-19.1	-8.7	-3.0	1.8	7.1	15.7
-0001	-0050	-0098	-0144	-0178	-0168	-0006	0443	0596	0565	-0096	-0223	-0197	-0137	-0070	-0000
0033	0042	0053	0075	0113	0169	0269	0122	0212	0249	0379	0332	0241	0174	0134	0111
11.9	4.6	6.1	9.1	13.0	16.4	31.8	-38.2	-22.9	3.1	-25.0	-20.7	-14.9	-9.2	-3.7	1.0
-0001	-0048	-0091	-0131	-0170	-0238	0163	0335	0416	0258	-0461	-0261	-0181	-0118	-0058	-0001
0061	0039	0036	0040	0036	-0008	-0056	-0001	-0008	-0091	-0230	0047	0103	0097	0085	0094
8.0	10.7	13.5	16.6	20.8	24.8	-39.5	-23.4	-13.8	.7	-32.4	-32.4	-25.7	-19.9	-13.5	-6.2
0000	-0042	-0087	-0126	-0157	-0169	0123	0286	0338	0143	-0322	-0240	-0178	-0117	-0054	-0000
0000	0008	0014	0020	0023	0027	-0047	-0026	-0019	-0005	0008	0041	0058	0046	0026	-0000
.0	24.1	22.2	21.6	21.1	21.8	-31.9	-16.9	-13.2	-10.4	-8.9	-22.4	-29.7	-32.2	-34.9	.0

ーメントの大きさと方向がどのようになるか計算を行なった。すべての荷重点について計算したが、紙数の都合で、ここには代表的なものとして、対象(Ⅱ)の荷重作用点、点19、点28、点47(図-15参照)の場合についてのみ計算結果を示した(表-7~9)。

ここに掲げた計算値は解析した対象の各格子点に相当する位置に、主曲げモーメントの大きさ M_1 , M_2 およびその M_1 が x 軸となす角度 θ の3つの数値を一組として示したものである。また、3. に述べたように、この計算値では、各点を中心として λ の幅に含まれる主曲げモーメントの値の平均値に相当する値となっているのであるが、集中荷重作用点の主曲げモーメントの値を4. に述べた方法で補正することができる。以下に、補正の

方法を具体的に示す。

(4) 集中荷重作用点の主曲げモーメントの値の補正
計算を行なった対象と同じ対象に対して実験を行なったのであるが、実験に際しては前述したように、ゲージ長10mmのロゼットゲージによって応力測定を行なったので、ここでは、この実験値と対応させることを考える。

対象(Ⅱ)の荷重作用点19の場合の格子点19の $\lambda=1.25$ cmの平均主曲げモーメントの値を計算する。この点の $\lambda=10$ cmの平均主曲げモーメントの大きさは、 $M_1^{0-0}=3257 \times 10^{-4}$, $M_2^{0-0}=2651 \times 10^{-4}$ と与えられている(表-7参照)。

よって、この点の平均曲げモーメント和 M_{0-0} は

$$M_{0-0} = \frac{M_1^{0-0} + M_2^{0-0}}{1 + \nu} = 4\,545 \times 10^{-4}$$

である。また、この点のまわりの各主曲げモーメント和 M_A, M_B, \dots, M_H (図-10 参照) は、それぞれ下記のようなになる。

$$\begin{aligned} M_A &= 1\,473 \times 10^{-4} \\ M_B &= 1\,997 \times 10^{-4} \\ M_C &= 1\,060 \times 10^{-4} \\ M_D &= 2\,129 \times 10^{-4} \\ M_E &= 2\,098 \times 10^{-4} \\ M_F &= 1\,378 \times 10^{-4} \\ M_G &= 1\,953 \times 10^{-4} \\ M_H &= 1\,292 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

また、 $P_0=1.0$ であるから、これらの値によって表-4 より $M-0-3$ を求めると、 $M-0-3=7\,749 \times 10^{-4}$ となる。

いま、主曲げモーメントの方向は $\lambda=10\text{ cm}$ の場合と変わらないものとして、その絶対値によって補正すると、この点の $\lambda=1.25\text{ cm}$ の平均主曲げモーメントの値 M_1^{0-3}, M_2^{0-3} は、それぞれ

$$M_1^{0-3} = 0.3257 \times \frac{0.7749}{0.4545} = 5\,553 \times 10^{-4}$$

$$M_2^{0-3} = 0.2651 \times \frac{0.7749}{0.4545} = 4\,520 \times 10^{-4}$$

となる。同様にして、荷重作用点 47 の場合の格子点 47 の $\lambda=1.25\text{ cm}$ の平均主曲げモーメントの値は

$$M_1^{0-3} = 4\,107 \times 10^{-4}$$

$$M_2^{0-3} = 4\,836 \times 10^{-4}$$

となる。

つぎに、荷重作用点 28 の場合の格子点 28 の平均主曲げモーメントの値であるが、この点は辺上に位置する点で、実験においては、ひずみ計貼付の都合上、辺から 1 cm 内側の点の応力を測定した。したがって、ここでは荷重作用点から 1.25 cm 離れた点に相当する $D-3$ の点の主曲げモーメントの値を計算する (図-10 参照)。この点のまわりのモーメント和、 M_A, M_B, \dots, M_H によって、表-4 より $M-D-3$ を求めると $M-D-3=6\,167 \times 10^{-4}$ となる。また、辺上に作用する荷重は、5. に述べたように $P_0=2.0$ として計算する。点 $D-3$ は点 $0-0$ に非常に近い点であるから、点 $D-3$ の主曲げモーメントの方向は、点 $0-0$ のそれとほとんど変わらないものと考えて、点 $0-0$ の主曲げモーメントの値から点 $D-3$ の主曲げモーメントの値を求める。

すなわち、

$$M_1^{D-3} = 0.5939 \times \frac{0.6167}{0.4541} = 8\,065 \times 10^{-4}$$

$$M_2^{D-3} = -0.0036 \times \frac{0.6167}{0.4541} = -49 \times 10^{-4}$$

となる。8. に掲げた主曲げモーメント図の荷重作用点の値は、以上に示した方法で補正した値を記入した。

表-10 Deflection W ($\times 10^{-6}\text{ CM}$) of the Model No. 2, By Unit Load (KG) (Load Point 028)

0015	0051	0080	0091	0075	0016	-0101	-0210	-0239	-0099	0331	1163	1904	1716	1175	0512
0000	0034	0058	0067	0051	0000	-0112	-0221	-0277	-0227	0000	0579	1031	0982	0592	0000
-0003	0024	0042	0045	0025	-0029	-0122	-0216	-0273	-0247	-0090	0241	0498	0486	0234	-0172
-0003	0019	0033	0033	0011	-0038	-0112	-0186	-0228	-0206	-0098	0083	0221	0217	0065	-0185
-0002	0018	0031	0031	0013	-0026	-0084	-0137	-0162	-0137	-0060	0037	0108	0106	0025	-0109
0000	0021	0036	0039	0028	0000	-0045	-0084	-0094	-0064	0000	0049	0084	0084	0050	0000
0008	0029	0046	0053	0048	0027	-0009	-0037	-0040	-0010	0040	0073	0092	0095	0080	0052

表-11 Moment M-X, M-Y, M-XY ($\times 10^{-4}$) of the Model No. 2, By Unit Load (Load Point 028)

0000	0046	0105	0177	0273	0365	-0045	-0511	-1075	-1837	-2556	0576	5903	2246	0770	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	-0000	-0000	-0000	0600	0000	0000	0000	0000	0000
0000	-0020	-0026	-0018	0010	0051	0063	-0006	-0210	-0630	-1253	-1814	-0464	1006	0675	0000
-0000	0053	0102	0160	0246	0453	-0022	-0402	-0830	-1458	-2961	0370	2787	1873	0940	0000
-0080	-0029	-0003	0025	0083	0216	-0016	-0218	-0517	-1122	-2420	-1450	-1325	-0960	-1144	-2159
-0021	-0023	-0023	-0016	0002	0036	0047	-0016	-0173	-0472	-0945	-1204	-0375	0569	0668	0572
-0000	0047	0095	0147	0203	0236	-0025	-0324	-0657	-1049	-1374	0131	1337	1214	0667	-0000
-0017	-0017	-0012	-0009	-0016	-0051	-0129	-0262	-0456	-0706	-0926	-1107	-1227	-1067	-1002	-1004
-0035	-0027	-0023	-0018	-0005	0048	0089	0061	-0017	-0180	-0632	-0869	-0328	0345	0708	0927
-0000	0042	0086	0127	0155	0132	-0042	-0264	-0486	-0656	-0609	0061	0653	0698	0412	-0000
-0005	-0014	-0021	-0032	-0056	-0096	-0134	-0195	-0278	-0372	-0479	-0695	-0844	-0801	-0694	-0571
-0017	-0015	-0010	-0000	0021	0060	0094	0090	0038	-0100	-0383	-0512	-0216	0221	0541	0710
-0000	0038	0076	0106	0122	0098	-0048	-0214	-0345	-0370	-0191	0063	0325	0370	0224	-0000
-0010	-0016	-0022	-0030	-0043	-0062	-0077	-0094	-0112	-0135	-0198	-0346	-0463	-0452	-0345	-0203
0001	-0000	0005	0017	0039	0061	0078	0081	0048	-0043	-0214	-0288	-0121	0149	0388	0543
-0000	0036	0067	0090	0104	0122	-0046	-0181	-0257	-0199	0146	0079	0167	0181	0092	0000
-0035	-0019	-0014	-0012	-0002	0033	-0005	-0012	0006	0057	0160	-0049	-0159	-0150	-0005	0358
0003	0006	0013	0024	0037	0049	0058	0057	0033	-0025	-0112	-0143	-0057	0087	0210	0270
0000	0030	0059	0083	0097	0092	-0043	-0163	-0211	-0127	0115	0081	0106	0114	0077	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0010	0018	0026	0031	0033	0034	0033	0020	-0015	-0063	-0079	-0030	0051	0096	0000

表-12 Stress S-1, S-2 (10-3 KG/CM²) and Direction of the Model No. 2
By Unit Load (Load Point 028)

0000	0032	0067	0107	0164	0223	-0054	-0307	-0669	-1219	-1841	1275	3564	1578	0697	0000
0000	-0004	-0004	-0001	-0000	-0004	0027	0000	0024	0117	0307	-0929	-0022	-0231	-0235	0000
.0	-20.4	-13.2	-5.7	2.2	7.8	-35.1	.6	10.6	17.2	22.2	-40.5	-4.5	20.9	30.1	.0
0003	0035	0064	0097	0148	0275	-0039	-0242	-0544	-1075	-2204	0582	1692	1190	0682	0085
-0051	-0021	-0004	0014	0050	0126	0017	-0130	-0264	-0473	-1024	-1230	-0816	-0642	-0803	-1381
-13.9	-14.8	-11.8	-6.8	.5	8.5	-43.3	4.8	24.0	35.2	37.0	-26.5	-5.2	10.9	16.3	13.9
0016	0034	0060	0089	0122	0146	0016	-0217	-0395	-0676	-1092	0347	0827	0759	0556	0331
-0027	-0017	-0010	-0007	-0009	-0035	-0108	-0135	-0273	-0377	-0288	-0933	-0761	-0671	-0757	-0934
-38.0	-20.4	-11.4	-6.3	-1.3	9.3	30.0	-31.4	4.8	23.2	35.2	-27.3	-7.2	8.4	20.2	30.8
0009	0028	0052	0076	0094	0088	0010	-0195	-0296	-0413	-0560	0191	0410	0438	0380	0288
-0012	-0011	-0013	-0019	-0035	-0066	-0115	-0080	-0163	-0204	-0093	-0572	-0525	-0499	-0549	-0631
-40.7	-13.9	-5.3	-.1	5.5	14.0	31.9	-34.5	-10.0	17.6	40.2	-26.8	-8.0	8.2	22.2	34.0
0000	0023	0045	0065	0078	0071	0010	-0153	-0213	-0226	0011	0127	0206	0238	0252	0270
-0006	-0010	-0013	-0019	-0031	-0049	-0085	-0032	-0061	-0076	-0245	-0297	-0288	-0287	-0325	-0392
3.9	-.2	2.9	7.1	12.5	18.6	39.8	-26.8	-11.2	10.0	-44.5	-27.3	-8.5	10.0	26.9	39.7
0000	0022	0041	0057	0069	0086	-0052	-0119	-0156	-0121	0027	0103	0106	0122	0155	-0087
-0021	-0012	-0011	-0010	-0008	0007	0021	0003	0006	0036	0162	-0085	-0101	-0103	-0104	0302
5.0	6.5	9.1	12.5	17.6	23.9	-35.2	-16.9	-7.0	5.6	42.0	-33.0	-9.7	13.8	38.5	-28.3
0000	0019	0039	0054	0064	0061	-0037	-0101	-0128	-0077	0086	0078	0068	0080	0085	0000
0000	-0002	-0003	-0004	-0005	-0006	0011	0004	0001	0001	-0017	-0029	-0005	-0012	-0039	0000
.0	16.4	15.7	15.9	16.3	18.0	-28.8	-10.9	-5.5	6.6	-23.9	-31.4	-14.8	21.0	34.1	.0

また、当然、各格子点単位荷重が作用したときの各点のたわみ、曲げモーメント、主応力の大きさ等もすべて計算されているが、そのすべてを示すには紙数が許さないで、その一例として、対象(Ⅱ)の点28に荷重が作用した場合の、それぞれの値を各点に相当する位置に示したものをのせて代表とする(表-10~12)。

7. 実験

数値計算を行なった対象と同じ対象に対して模型実験を行なった。試験体製作材料は、アルミ合金である。1号引張試験片の引張試験結果より、弾性係数およびポアソン比は

$$E=0.762 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu=0.3$$

であった。

支点反力および応力測定は、つぎのようにして行なった。すなわち、しんちゅう板の表裏にひずみ計を貼付した支点反力測定板を製作し(図-16)これを通して試験体を鋼製のわくに取り付ける(写真-1)。反力測定板は各支点の上下にそう入し、あらかじめ張力を導入して圧縮力も測定できるようにする。試験体を10cm間隔の格子に区切り、各格子の交点に図-17に示すような装置で集中荷重を載荷する(写真-2)。支点反力測定板のひ

ずみを測定して支点反力を知る。

また、各格子の交点にひずみ計長10mmのロゼットゲージを貼付し、そのひずみを測定して各点の主応力の方向と大きさを知る。なお、ひずみ計貼付の都合上、各支点上および試験体の辺上の応力を正しい位置で測定することが不可能なので、格子点から10mm離れた点の応力を測定した。

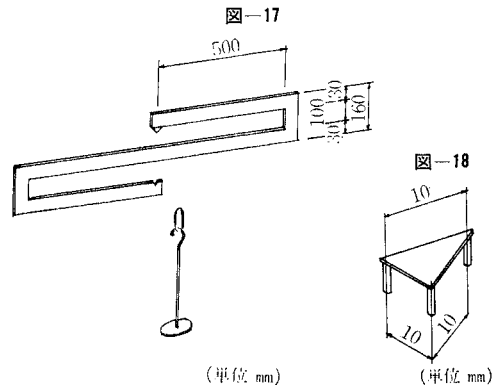


写真-1 試験体取付状況

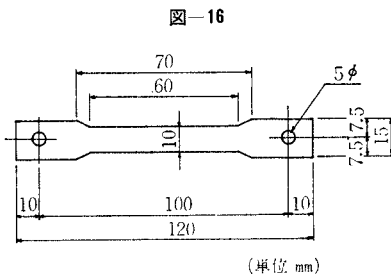
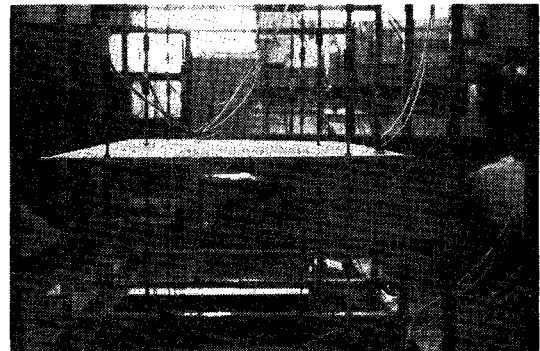


写真-2 載荷状況

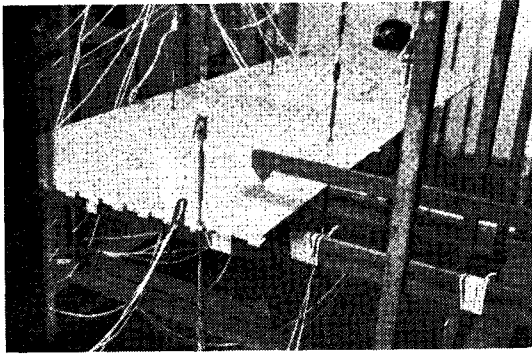
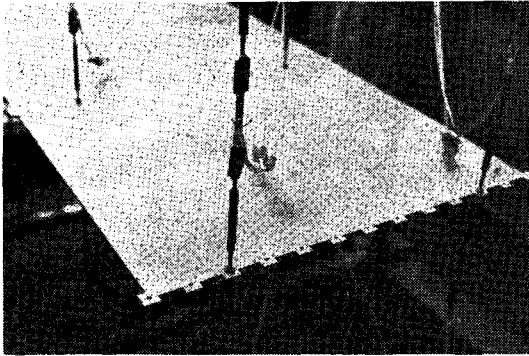


写真-3 支点反力測定装置



応力測定の際には、ひずみ計を保護するために、ひずみ計上に図-18に示すような三本脚の台を置き、その上に荷重を載せて測定を行なった。なお、実験結果は8.に示した。

8. 計算と実験との比較

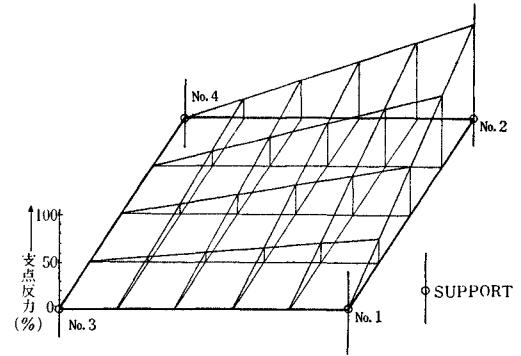
点支承を持ち集中荷重を受ける等方性矩形板について計算と実験を行なったのであるが、この研究の目的は、このような問題を数値解析的に、どこまで解決することができるかを見きわめることである。計算によって求めた結果によって、どの程度正しく実際問題を評価することができるかを知るために実験を並行して行なった。そこで、支点反力の影響面および板の応力分布について、数値解析結果と実験結果をグラフを並置して比較する。

グラフを一見して、このような数値解析による方法によって、かなりの精度で実際問題を評価し得ることがわかる。特に、支点反力の影響面に関しては、ほぼ完全な解が得られている。また、応力状態に関しても、実験的には、抵抗線ひずみ計による測定誤差、試験体それ自体に内在する誤差等を考えなければならないので、実験値と比較して結論することに少々問題はあるが、集中荷重荷点を除いて、計算値がほぼ完全に実際問題を再現していると思なすことができると考える。

集中荷重荷点の応力については、これは最も重要な点であるが、なお問題が残り、さらに詳細な検討が必要

図-19

Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Theoretical]



Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Experimental]

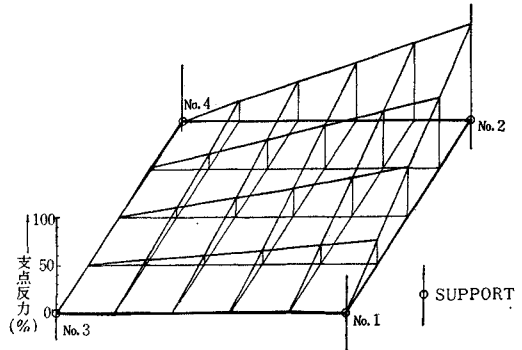
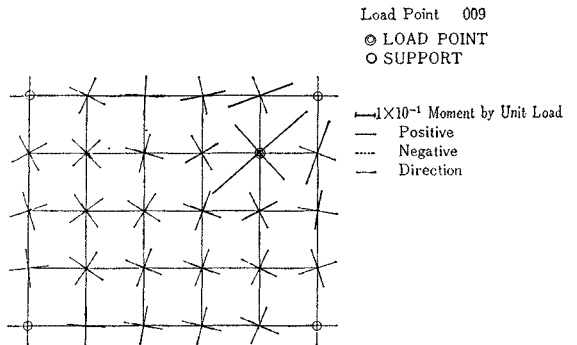


図-20

Principal Stress Line [Theoretical]



Principal Stress Line [Experimental]

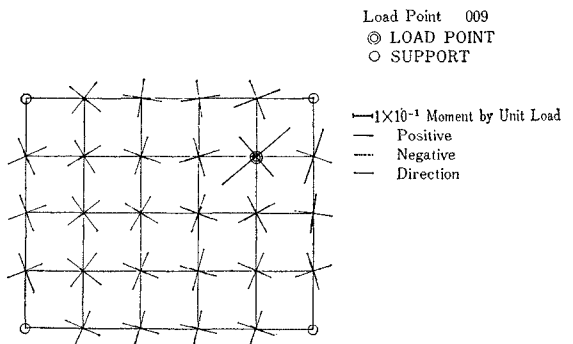
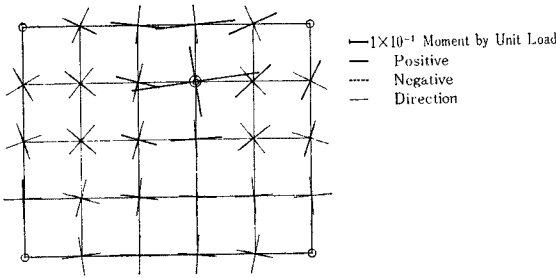


図-21

Principal Stress Line [Theoretical]

Load Point 014
 ◎ LOAD POINT
 ○ SUPPORT



Principal Stress Line [Experimental]

Load Point 014
 ◎ LOAD POINT
 ○ SUPPORT

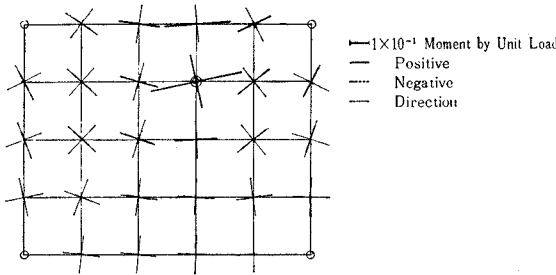
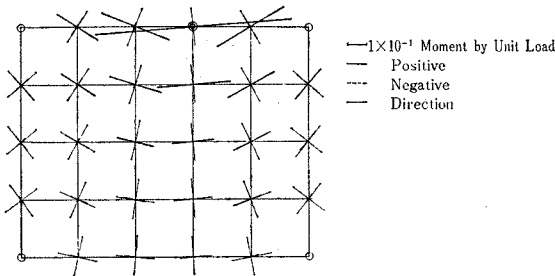


図-22

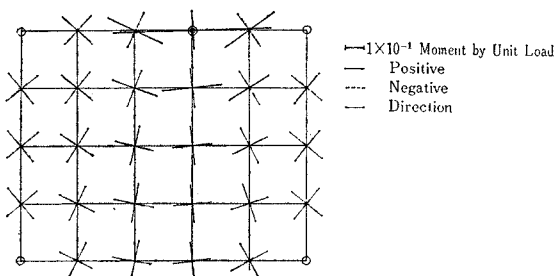
Principal Stress Line [Theoretical]

Load Point 015
 ◎ LOAD POINT
 ○ SUPPORT



Principal Stress Line [Experimental]

Load Point 015
 ◎ LOAD POINT
 ○ SUPPORT



なところである。すなわち、理論的には、集中荷重載荷点近傍の応力状態は平板理論の基本式から離れたものとなるので、この基本式を基礎として集中荷重載荷点近傍の応力状態を追求しても、正しく実際問題を追求することにはならないこと、また、実験的には、集中荷重載荷点のように、応力変化の激しい部分に、ある面積を持った抵抗線ひずみ計を貼付して応力測定を行なうことが、実際に何を測定したことになるのか疑問であること、また、前述したように、応力測定の際には、ひずみ計を保護するために三本脚を有する台を作製し、その上に集中荷重を作用させたため、実際には、三点に集中荷重を分散させて載荷したことになり、正しい意味での集中荷重載荷点の応力とは異なったものとなっていることなどである。しかし、実際問題として集中荷重を考える場合、厳密な意味での集中荷重は存在しないわけで、必ずある面積に分布した荷重として作用するのであるから、このような実験による値を集中荷重載荷点の応力の一つの目安として採用することはできる。そこで、これを数値解析による荷重作用点を中心として1.25 cm幅に分布する応力の平均応力に相当する値と比較することにした。この場合には、グラフを比較して明らかなように、計算値の方がかなり大きな値となっている。また、支点上および試験体辺上の応力は前述したように、ひずみ計貼付の都合上、格子点から10 mm離れた点の応力を測定して記入したため、このグラフから厳密な意味での比較をすることはできない。また、荷重作用点から遠く離れた点の実験値においては、応力が非常に小さく、したがって、誤差の大きな値である。値が小さくて絶対値を記入することができないような点にも、一応主応力方向線だけは記入したが、このように誤差の大きな、絶対値の小さい測定値を用いて主応力の方向を計算したので、荷重作用点から遠く離れた点の実験値(主応力方向線)に関しては信頼性は薄い。

9. おわりに

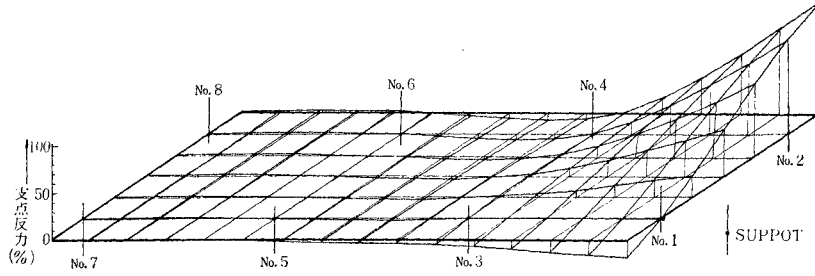
今回は、点支承を持ち集中荷重を受けるはりおよび板の解析法を提示し、実際の数値解析例を示し、実験結果と比較することによって、この解析法によって十分な精度で解析を行なうことができることを示すにとどまったが、今後、解析を続行し、工学的な見地からこのような問題に対する一般性のある結論を導く方向に向かって研究をすすめたいと考えている。

なお、ここに報告した数値計算は、東大生産技研所属のOKITAC-5090によって行なった。内部容量の小さい計算機のため、外部容量として磁気テープを使ったが、磁気テープ装置の安定性等に問題が生じ大変苦労した。

その間、終始ご協力戴いた東大生研の渡辺研究室の渡

図-23

Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Theoretical]



Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Experimental]

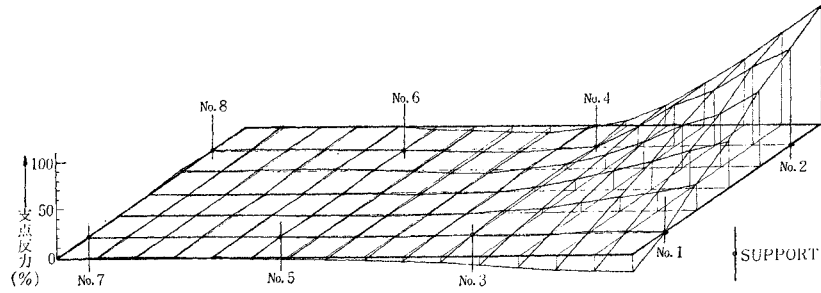
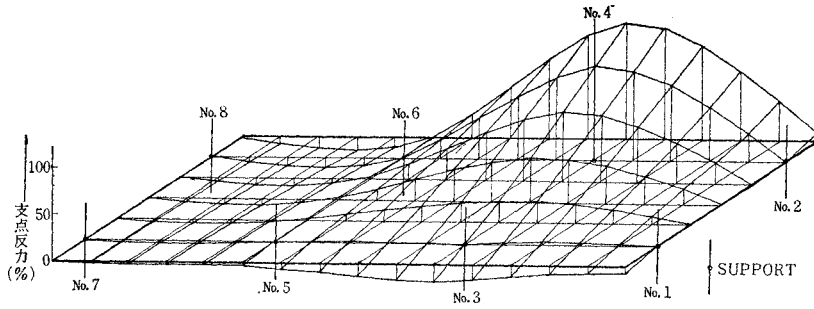


図-24

Influence Surface of Reaction of Support No. 4 [Theoretical]



Influence Surface of Reaction of Support No. 4 [Experimental]

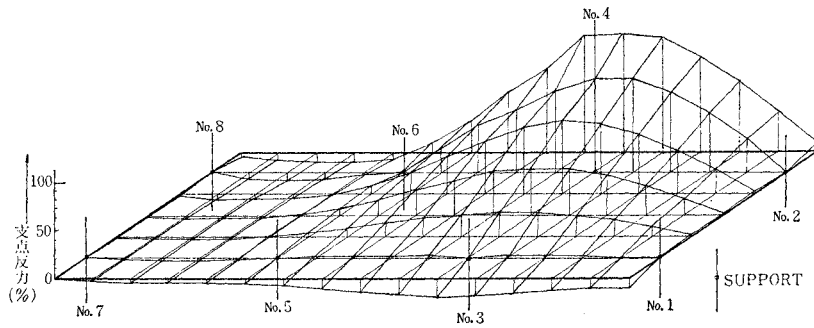


図-25

Principal Stress Line [Theoretical]

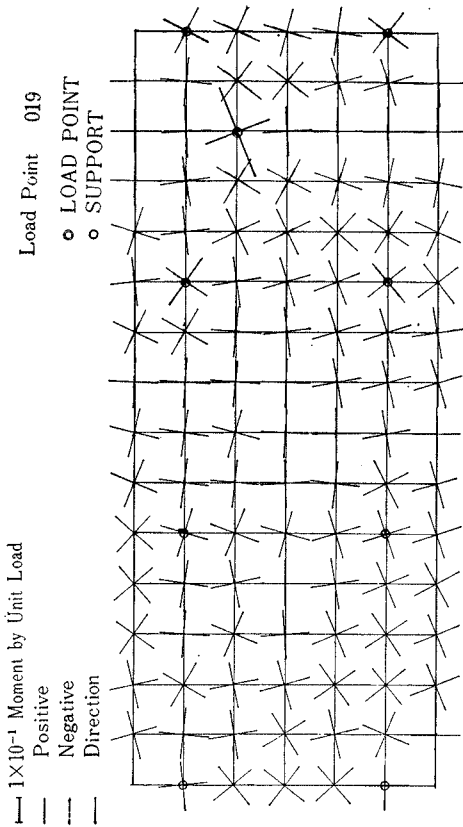
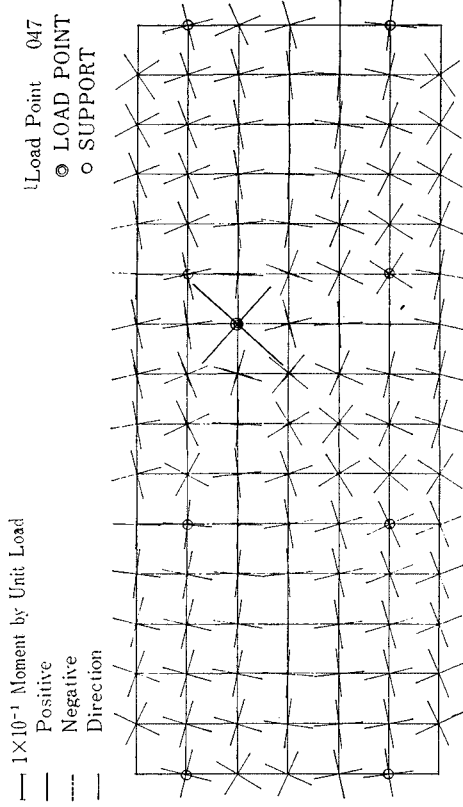
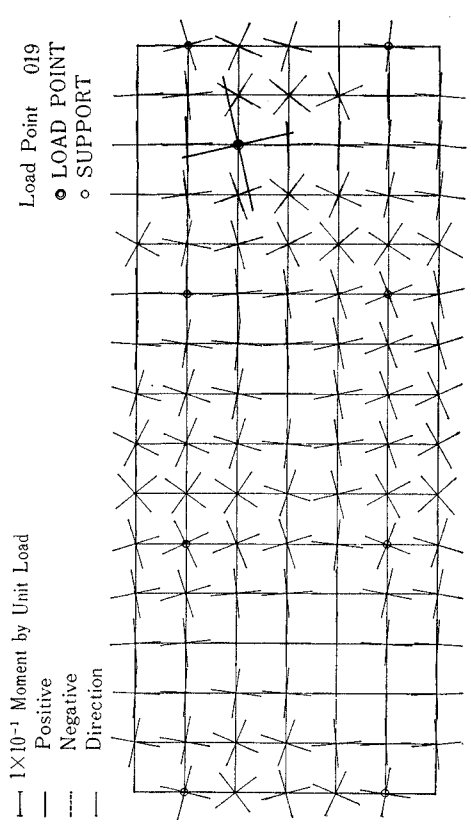


図-26

Principal Stress Line [Theoretical]



Principal Stress Line [Experimental]



Principal Stress Line [Experimental]

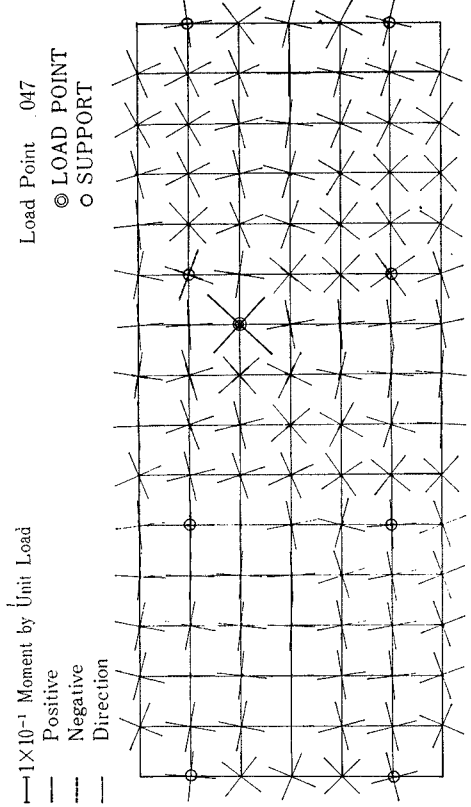
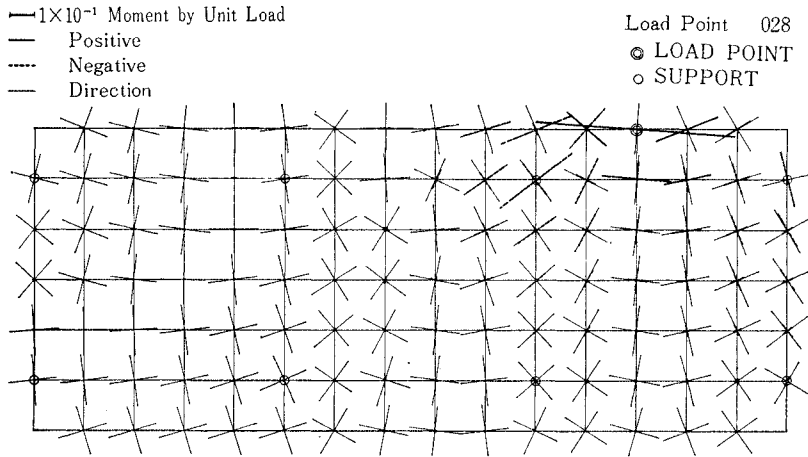
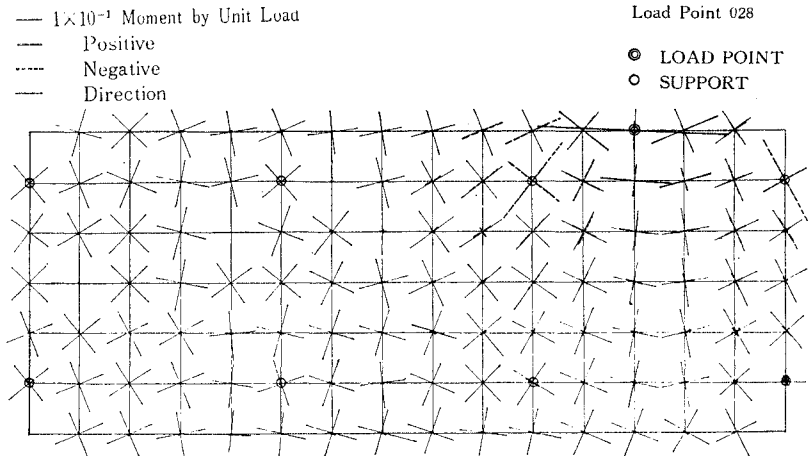


図-27

Principal Stress Line [Theoretical]



Principal Stress Line [Experimental]



部弘之氏はじめ電子計算機室の皆様には謝意を表します。

また、本報文作成にあたって、ご助言を戴きました奥村教授に感謝致します。なお、当時当研究室で卒業論文の作成にあっていた松田 豊、久保田健一両君ならびに当研究室の山田健一君が実験やデータ整理に対して労をとってくれました。これらの方々に感謝致します。

また、本研究は日本道路公団よりの依託研究として行

なわれたものであるが、日本道路公団の武藤隼彦氏はじめ、関係諸氏の協力に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) S.P. Timoshenko & S.W. Krieger : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Co. Inc.
- 2) 坪井善勝 : 平面構造論, 丸善

(1965.6.7・受付)