2) Steffenson, Interpolation, 1943.
3) A. Amemiya, Suchikeisanhou, Kawade Shobou, 1943.
4) L. Collatz, Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen, Schriften des mathematischen Seminärs und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd. 3, Heft 1, Berlin, 1935.
5) K. Hidaka, Suchisekibunhou, Iwanami, Vol. 2.
6) Loc. cit. 5).
7) Science Report of Tohoku University, First Series, Vol. 4, No. 1 (1915), pp.33~42.
8) Science Report of Tohoku University, First Series, Vol. 3, No. 1 (1914), pp.243~249.
9) Love, Elasticity, Chapa. XIV.
10) Cf., for instance, Kikai Kogaku Binran, Part I, p.308.
11) The same problem was treated by C. Runge; cf. loc. cit. 5). But I have had no chance to refer to his original paper.

(昭.26.10.19)

UDC 624.072.233.5

弾性支床上にある無限梁及び無限版の或る解法について[1)]

正員 工学博士 喜 内 敏*

ON THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, REPRESENTING THE VIBRATION OF INFINITE BEAMS AND PLATES SUPPORTED BY ELASTIC FOUNDATIONS

(Trans. of JSCE March 1952)

Dr. Eng., Bin Kinai, C.E. Member

Synopsis Making use of the same method as Arnold N. Lowan has adopted to the wave-motion for infinite domains, the author deduced directly from the differential equations, the formulae of vibrations of an infinite beam and plate supported by elastic foundation. Namely, the present writer applied the Laplace transformations to differential equations of vibration, and extended the domains infinitely with the aid of Fourier integrals; and furthermore, by adopting the corresponding inverse Laplace transformations, he obtained the results.

We can deduce the same results, by moving to the centre the origin of those formulae of vibrations which the author has had already deduced for finite domains, in the previous paper, and then by transforming them with the aid of Fourier integrals.

要旨 Arnold N. Lowan が無限領域の波動方程式の解法に用いた方法[2)]を応用して弾性支床上にある梁及び版の振動を示す微分方程式より，無限領域におけるそれぞれの撓み振動の式を求めたものである。即ち振動を示す微分方程式に Laplace 変換の順変換をほどこし，Fourier integral を用いてこれを無限領域に広め，さらに Laplace 変換の逆変換を行つて解を求めた。なお，有限長の梁及び版の場合については前に一般式を求めたが[3)]この式より座標原点を中央に移動し，Fourier integral を用いて同一の結果を求めることができる。

I 弾性支床上にある無限梁

(1) 公式の誘導 弾性支床上にある同一断面の梁の撓み振動の微分方程式は次式の如く示される。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{1}{a_1^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2k\frac{\partial y}{\partial t}+\lambda_1^2 y\right)=\frac{1}{a_2^2}\phi_{(x,t)} \qquad (1)$$

$$(-\infty<x<\infty,\ t>0)$$

ここに，$y\equiv y_{(x,t)}$：梁の x 点における t 時の撓み，$\phi_{(x,t)}$：梁の x 点に作用する単位長さ当りの外力，k：梁の減衰係数，なお $\lambda_1=(a_1/a_2)\sqrt{\varkappa}$，$a_1=(EJg/\gamma A_0)^{1/2}$，$a_2=\sqrt{EJ}$，にして $\varkappa$：地盤反力係数，γ：梁の単位体積の

* 金沢大学教授，工学部土木教室

重量，g：重力の加速度，A_0：梁の断面積，E：梁のヤング係数，J：梁の断面の慣性モーメント，

今初期条件を

$$\lim_{t\to 0} y(x,t)=f(x),\quad \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right\}=g(x) \quad\cdots\cdots(2)$$

とおき，第2種 Laplace 変換の順変換の式を用いて式 (1) を書き直し，

$$\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^4}+\frac{1}{a_1^2}(p^2+2kp+\lambda_1^2)y^*=\frac{p^2}{a_1^2}f(x)+\frac{p}{a_1^2}\{2kf(x)+g(x)\}+\frac{1}{a_2^2}\phi^*_{(x,p)}$$

となる。これに次の Fourier integral を用いて，

$$\Phi_{(x)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}\Phi_{(\xi)}\cos\{\alpha(x-\xi)\}d\alpha \qquad y^*_{(x,p)}=[y_1^*]+[y_2^*] \quad\cdots\cdots(3)$$

として示せば，

$$[y_1^*]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}[p^2f(\xi)+p\{2kf(\xi)+g(\xi)\}]\frac{\cos\{\alpha(x-\xi)\}}{p^2+2kp+\lambda_1^2+a_1^2\alpha^4}d\alpha \quad\cdots\cdots(4)$$

$$[y_2^*]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}\phi^*_{(\xi,p)}\frac{\cos\{\alpha(x-\xi)\}}{p^2+2kp+\lambda_1^2+a_1^2\alpha^4}d\alpha \quad\cdots\cdots(5)$$

これより逆変換して梁の撓み $y_{(x,t)}$ は次の様になる。ただし

$$y_{(x,t)}=[y_1]+[y_2]\cdots \quad\cdots\cdots(6)$$

$$[y_1]=\frac{e^{-kt}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}\Big[\{2kf(\xi)+g(\xi)\}\sin(G_kt)-f(\xi)\cdot G_0 \times\sin\left(G_kt-\tan^{-1}\frac{G_k}{k}\right)\Big]\frac{\cos\{\alpha(x-\xi)\}}{G_k}d\alpha \quad\cdots\cdots(7)$$

$$[y_2]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^t\frac{e^{-k(t-\tau)}}{G_k}\sin\{G_k(t-\tau)\}\cos\{\alpha(x-\xi)\}\phi_{(\xi,\tau)}d\tau \quad\cdots\cdots(8)$$

ここに，　$G_k=(a_1^2\alpha^4+\lambda_1^2-k^2)^{1/2}$，$G_0=(a_1^2\alpha^4+\lambda_1^2)^{1/2}$，

上式の $[y_1]$ は初期条件による振動，$[y_2]$ は外力による強制振動を示す。なお，梁の減衰係数を考えないとき，$k=0$ と置いて

$$[y_1]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}\left\{f(\xi)\cos(G_0t)+g(\xi)\frac{\sin(G_0t)}{G_0}\right\}\cos\{\alpha(x-\xi)\}d\alpha \quad\cdots\cdots(9)$$

$$[y_2]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^t\frac{\sin\{G_0(t-\tau)\}}{G_0}\cos\{\alpha(x-\xi)\}\phi_{(\xi,\tau)}d\tau \quad\cdots\cdots(10)$$

(9) 及び (10) 式は穂坂氏の示している式[4] と同一である。梁が弾性支床上にないときは，上の各式で $\alpha=0$ とおけばそれぞれの場合における式が求められる。$\phi_{(x,t)}$ は分布荷重の場合であるがこれを集中荷重に変形し，集中荷重が任意の速度で移動する場合の撓みの式を誘導することができる。次に例題として強制振動の2，3の場合について基本式を示す。

(2) 例　題

(a) 原点より c_0 の距離の所に P なる集中荷重が衝撃として作用するとき。

今衝撃として Dirac の δ 函数を考え，(5) 式より

$$[y_2^*]=\frac{P}{\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_0^{\infty}\frac{p\cdot\cos\{\alpha(c_0-x)\}}{p^2+2kp+G_0^2}d\alpha$$

$$\therefore\quad [y_2]=\frac{P}{\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 e^{-kt}\int_0^{\infty}\frac{\sin(G_kt)}{G_k}\cos\{\alpha(c_0-x)\}d\alpha \quad\cdots\cdots(11)^{5)}$$

$k=0$ のとき，

$$[y_2]=\frac{P}{\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_0^{\infty}\frac{\sin(G_0t)}{G_0}\cos\{\alpha(c_0-x)\}d\alpha \quad\cdots\cdots(12)^{5)}$$

(b) 一定の集中荷重 P が等速度 (v) にて移動するとき。

相乗定理 (Faltungssatz) を用いて次の式を逆変換すると，

$$\mathfrak{L}_2^{-1}\frac{\mathfrak{L}_2\cos\{\alpha(x-vt)\}}{p^2+2kp+G_0^2}=\frac{1}{G_k}\int_0^t e^{-k(t-\tau)}\cdot\sin\{G_k(t-\tau)\}\cos\{\alpha(x-v\tau)\}d\tau$$

であるから，(5) 式より

$$[y_2]=\frac{P}{2\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_0^\infty\frac{1}{G_k}\left\{\frac{k\sin(\alpha x_v)+g_4\cos(\alpha x_v)}{g_4^2+k^2}-\frac{k\sin(\alpha x_v)-g_3\cos(\alpha x_v)}{g_3^2+k^2}\right.$$
$$\left.-e^{-kt}\left(\frac{k\sin g_2+g_4\cos g_2}{g_4^2+k^2}+\frac{k\sin g_1+g_3\cos g_1}{g_3^2+k^2}\right)\right\}d\alpha \quad\cdots\cdots(13)$$

ここに，　$x_v=x-vt$，$g_1=G_kt-\alpha x$，$g_2=G_kt+\alpha x$，$g_3=G_k-\alpha v$，$g_4=G_k+\alpha v$，

$k=0$ のとき，

$$[y_2]=\frac{P}{\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_0^\infty\left[\frac{\cos\{\alpha(x-vt)\}}{G_0^2-\alpha^2v^2}-\frac{1}{2G_0}\left\{\frac{\cos(G_0t+\alpha x)}{G_0+\alpha v}+\frac{\cos(G_0t-\alpha x)}{G_0-\alpha v}\right\}\right]d\alpha \quad\cdots\cdots(14)$$

(c) $P\sin(ct-\varphi)$ なる荷重が等速度 (v) にて移動するとき。

$$\mathfrak{L}_2^{-1}\frac{\mathfrak{L}_2\cos\{\alpha(x-vt)\}\sin(ct-\varphi)}{p^2+2kp+G_0^2}$$

に関する変換を行い，次式を得る。

$$[y_2]=\frac{P}{4\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_0^\infty\frac{1}{G_k}\left[\frac{1}{h_1^2+k^2}\{e^{-kt}(h_1\sin\mu_1-k\cos\mu_1)+h_1\sin(\nu_1t-\nu_3)\right.$$
$$+k\cos(\nu_1t-\nu_3)\}-\frac{1}{h_2^2+k^2}\{e^{-kt}(h_2\sin\mu_2-k\cos\mu_2)+h_2\sin(\nu_2t-\nu_4)$$
$$+k\cos(\nu_2t-\nu_4)\}+\frac{1}{h_3^2+k^2}\{e^{-kt}(h_3\sin\mu_3-k\cos\mu_3)-h_3\sin(\nu_2t-\nu_4)$$
$$+k\cos(\nu_2t-\nu_4)\}-\frac{1}{h_4^2+k^2}\{e^{-kt}(h_4\sin\mu_4-k\cos\mu_4)-h_4\sin(\nu_1t-\nu_3)$$
$$\left.+k\cos(\nu_1t-\nu_3)\}\right]d\alpha \quad\cdots\cdots(15)$$

ここに，　$h_1=G_k+\alpha v+c$，　$h_2=G_k+\alpha v-c$，　$h_3=G_k-\alpha v+c$，　$h_4=G_k-\alpha v-c$，

$\mu_1=G_kt+\alpha x+\varphi$，$\mu_2=G_kt+\alpha x-\varphi$，$\mu_3=G_kt-\alpha x+\varphi$，$\mu_4=G_kt-\alpha x-\varphi$，

$\nu_1=\alpha v+c$，　$\nu_2=\alpha v-c$，　$\nu_3=\alpha x+\varphi$，　$\nu_4=\alpha x-\varphi$，

$k=0$ のとき，

$$[y_2]=\frac{P}{4\pi}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\int_0^\infty\frac{1}{G_0}\left\{\frac{\sin(\nu_1t-\nu_3)+\sin\mu_5}{G_0+\alpha v+c}-\frac{\sin(\nu_2t-\nu_4)+\sin\mu_6}{G_0+\alpha v-c}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin(\nu_2t-\nu_4)-\sin\mu_7}{G_0-\alpha v+c}+\frac{\sin(\nu_1t-\nu_3)-\sin\mu_8}{G_0-\alpha v-c}\right\}d\alpha \quad\cdots\cdots(16)$$

ここに，　$\mu_5=G_0t+\alpha x+\varphi$，$\mu_6=G_0t+\alpha x-\varphi$，$\mu_7=G_0t-\alpha x+\varphi$，$\mu_8=G_0t-\alpha x-\varphi$，

II 弾性支床上にある無限版

(1) 公式の誘導　弾性支床上にある同一厚さの版の撓み振動の微分方程式は次式の如く示される。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{1}{b_1^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2k\frac{\partial w}{\partial t}+\lambda_2^2w\right)=\frac{1}{b_2^2}\phi_{(x,y,t)} \quad\cdots\cdots(17)$$
$$(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ t>0)$$

ここに，$w\equiv w_{(x,y,t)}$：t 時における版の (x,y) 点の撓み，$\phi_{(x,y,t)}$：版の (x,y) 点に作用する単位面積当りの外力，k：版の減衰係数，なお $\lambda_2=(b_1/b_2)\sqrt{\alpha}$，$b_1=(gN/\rho_0h)^{1/2}$，$b_2=\sqrt{N}$，$N=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$，にして ρ_0：版の単位体積の重量，h：版の厚さ，E：版のヤング係数，ν：版のポアソン比，N：版の剛度

今初期条件を

$$\lim_{t\to0}w(x,y,t)=f(x,y),\quad \lim_{t\to0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}w(x,y,t)\right\}=g(x,y) \quad\cdots\cdots(18)$$

とおき，I の場合と同様に第2種 Laplace 変換の順変換を施し，

$$\left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4}\right)+\frac{1}{b_1^2}(p^2+2kp+\lambda_2^2)w^*$$
$$=\frac{p^2}{b_1^2}f(x,y)+\frac{p}{b_1^2}\{2kf(x,y)+g(x,y)\}+\frac{1}{b_2^2}\phi^*_{(x,y,p)}$$

となる。これに次の Fourier integral を用いて，

$$\Phi_{(x,y)}=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\, d\eta\iint_{-\infty}^{\infty}\Phi_{(\xi,\eta)}\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\alpha\, d\beta$$

$$w^*_{(x,y,p)}=[w_1^*]+[w_2^*] \quad \cdots\cdots(19)$$

として示せば

$$[w_1^*]=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\, d\eta\iint_{-\infty}^{\infty}[p^2f(\xi,\eta)+p\{2kf(\xi,\eta)+g(\xi,\eta)\}]\frac{\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}}{p^2+2kp+\lambda_2^2+b_1^2(\alpha^2+\beta^2)^2}d\alpha\, d\beta \cdots\cdots(20)$$

$$[w_2^*]=\left(\frac{b_1}{2\pi b_2}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\, d\eta\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^*_{(\xi,\eta,p)}\frac{\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}}{p^2+2kp+\lambda_2^2+b_1^2(\alpha^2+\beta^2)^2}d\alpha\, d\beta \quad \cdots\cdots(21)$$

故に版の撓み $w_{(x,y,t)}$ は

$$w_{(x,y,t)}=[w_1]+[w_2] \quad \cdots\cdots(22)$$

として示せば

$$[w_1]=\frac{1}{4\pi^2}e^{-kt}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\, d\eta\iint_{-\infty}^{\infty}\Big[\sin(F_k t)\{2kf(\xi,\eta)+g(\xi,\eta)\}$$
$$-F_0\sin\left(F_k t-\tan^{-1}\frac{F_k}{k}\right)f(\xi,\eta)\Big]\frac{\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}}{F_k}d\alpha\, d\beta \quad \cdots\cdots(23)$$

$$[w_2]=\left(\frac{b_1}{2\pi b_2}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\, d\eta\iint_{-\infty}^{\infty}d\alpha\, d\beta\int_0^t\frac{1}{F_k}e^{-k(t-\tau)}\sin\{F_k(t-\tau)\}\phi_{(\xi,\eta,\tau)}$$
$$\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\tau \cdots\cdots(24)$$

ここに，　$F_k=\{b_1^2(\alpha^2+\beta^2)^2+\lambda_2^2-k^2\}^{1/2}$，　$F_0=\{b_1^2(\alpha^2+\beta^2)^2+\lambda_2^2\}^{1/2}$，

上式の $[w_1]$ は初期条件による振動，$[w_2]$ は外力による強制振動を示す。なお，版の減衰係数を考えないとき，$k=0$ と置いて

$$[w_1]=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\, d\eta\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\xi,\eta)\cos(F_0 t)+g(\xi,\eta)\frac{\sin(F_0 t)}{F_0}\right\}$$
$$\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\alpha\, d\beta \quad \cdots\cdots(25)$$

$$[w_2]=\left(\frac{b_1}{2\pi b_2}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\, d\eta\iint_{-\infty}^{\infty}d\alpha\, d\beta\int_0^t\frac{\sin\{F_0(t-\tau)\}}{F_0}\phi_{(\xi,\eta,\tau)}$$
$$\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\tau \quad \cdots\cdots(26)$$

版が弾性支床上にないときは，$\varkappa=0$ とおけばそれぞれの場合における式が求められる。$\phi_{(x,y,t)}$ は分布荷重の場合であるがこれを集中荷重に変形し，集中荷重が任意の速度で移動する場合の撓みの式を誘導することができる。次に強制振動の 2,3 の場合について基本式を示す。

(2) 例　題

a) 原点に Q なる集中荷重が衝撃として作用するとき，

I の場合と同様に，衝撃として Dirac の δ 函数を考え，(21) 式より

$$[w_2^*]=\left(\frac{b_1}{2\pi b_2}\right)^2 Q\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{p\cdot\cos(\alpha x+\beta y)}{p^2+2kp+F_0{}^2}d\alpha\, d\beta$$

$$\therefore\quad [w_2]=\left(\frac{b_1}{2\pi b_2}\right)^2 Q\, e^{-kt}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(F_k t)}{F_k}\cos(\alpha x+\beta y)d\alpha\, d\beta \quad\cdots\cdots(27)^{6)}$$

変数を置換して,

$$[w_2]=\left(\frac{b_1}{2\pi b_2}\right)^2 Q\, e^{-kt}\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}\frac{\sin(f_k\cdot t)}{f_k}r\cdot\cos(rx\cos\theta+ry\sin\theta)d\theta$$

しかるに,

$$\int_0^{2\pi}\cos(rx\cos\theta)\cdot\cos(ry\sin\theta)d\theta=2\pi\cdot J_0(r\sqrt{x^2+y^2})$$

であるから,

$$[w_2]=\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 e^{-kt}\int_0^{\infty}\frac{\sin(f_k\cdot t)}{f_k}r\cdot J_0(r\sqrt{x^2+y^2})dr \quad\cdots\cdots(28)$$

$k=0$ のとき,

$$[w_2]=\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2\int_0^{\infty}\frac{\sin(f_0\cdot t)}{f_0}r\cdot J_0(r\sqrt{x^2+y^2})dr \quad\cdots\cdots(29)$$

ここに, $f_k=(b_1{}^2r^4+\lambda_2{}^2-k^2)^{1/2}$, $f_0=(b_1{}^2r^4+\lambda_2{}^2)^{1/2}$,

J_0 : 零次の Bessel 函数,

(b) Q なる荷重が y 軸上を等速度 (v) にて移動するとき,

$$\mathfrak{L}_2^{-1}\frac{\mathfrak{L}_2\cos\{\beta(y-vt)\}}{p^2+2kp+F_0}$$

の逆変換をおこない, 次の結果を得る。

$$[w_2]=\frac{Q}{8}\left(\frac{b_1}{\pi b_2}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{F_k}\left\{\frac{k\sin(\beta y_v)+f_4\cos(\beta y_v)}{f_4{}^2+k^2}-\frac{k\sin(\beta y_v)-f_3\cos(\beta y_v)}{f_3{}^2+k^2}\right.$$

$$\left.-e^{-kt}\left(\frac{k\sin f_2+f_4\cos f_2}{f_4{}^2+k^2}+\frac{k\sin f_1+f_3\cos f_1}{f_3{}^2+k^2}\right)\right\}\cos\alpha x\, d\alpha\, d\beta \quad\cdots\cdots(30)$$

ここに, $y_v=y-vt$, $f_1=F_kt-\beta y$, $f_2=F_kt+\beta y$, $f_3=F_k-\beta v$, $f_4=F_k+\beta v$,

$k=0$ のとき,

$$[w_2]=\left(\frac{b_1}{2\pi b_2}\right)^2 Q\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\cos\{\beta(y-vt)\}}{F_0{}^2-\beta^2v^2}-\frac{1}{2F_0}\left\{\frac{\cos(F_0t+\beta y)}{F_0+\beta v}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos(F_0-\beta y)}{F_0-\beta v}\right\}\right]d\alpha\, d\beta \quad\cdots\cdots(31)$$

今この式で自由振動の項を省略すると[7],

$$[w_2]=\left(\frac{b_1}{\pi b_2}\right)^2 Q\iint_0^{\infty}\frac{\cos\{\beta(y-vt)\}}{F_0{}^2-\beta^2v^2}\cos\alpha x\, d\alpha\, d\beta \quad\cdots\cdots(32)$$

となる。かくて青松氏の求めた式[8] と一致する。なお, (32) 式において $t=0$ として撓みを求め[9], この計算を容易にするため金沢工専学術報告第4集に計算図表及びその他の関係図表[10] を示しておいた。

(c) $Q\sin(ct-\varphi)$ なる荷重が y 軸上を等速度 (v) にて移動するとき。

梁の場合と同様にして,

$$[w_2]=\frac{Q}{16}\left(\frac{b_1}{\pi b_2}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{F_k}\left[\frac{1}{s_1{}^2+k^2}\{e^{-kt}(s_1\sin\zeta_1-k\cos\zeta_1)+s_1\right.$$

$$\times\sin(n_1t-n_3)+k\cos(n_1t-n_3)\}-\frac{1}{s_2{}^2+k^2}\{e^{-kt}(s_2\sin\zeta_2-k\cos\zeta_2)$$

$$+s_2\sin(n_2t-n_4)+k\cos(n_2t-n_4)\}+\frac{1}{s_3{}^2+k^2}\{e^{-kt}(s_3\sin\zeta_3$$

$$-k\cos\zeta_3)-s_3\sin(n_2t-n_4)+k\cos(n_2t-n_4)\}-\frac{1}{s_4{}^2+k^2}\{e^{-kt}$$

$$\times(s_4\sin\zeta_4-k\cos\zeta_4)-s_4\sin(n_1t-n_3)+k\cos(n_1t-n_3)\}\Big]\cos\alpha x\cdot d\alpha\, d\beta \cdots\cdots(33)$$

ここに， $s_1=F_k+\beta v+c$, $s_2=F_k+\beta v-c$, $s_3=F_k-\beta v+c$, $s_4=F_k-\beta v-c$, $\zeta_1=F_kt+\beta y+\varphi$, $\zeta_2=F_kt+\beta y-\varphi$, $\zeta_3=F_kt-\beta y+\varphi$, $\zeta_4=F_kt-\beta y-\varphi$, $n_1=\beta v+c$, $n_2=\beta v-c$, $n_3=\beta y+\varphi$, $n_4=\beta y-\varphi$,

$k=0$ のとき，

$$[w_2]=\frac{Q}{16}\left(\frac{b_1}{\pi b_2}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{F_0}\Big\{\frac{\sin(n_1t-n_3)+\sin\zeta_5}{F_0+\beta v+c}-\frac{\sin(n_2t-n_4)+\sin\zeta_6}{F_0+\beta v-c}$$

$$-\frac{\sin(n_2t-n_4)-\sin\zeta_7}{F_0t-\beta y+\varphi}+\frac{\sin(n_1t-n_3)-\sin\zeta_8}{F_0-\beta v-c}\cos\alpha x\cdot d\alpha\, d\beta \cdots\cdots(34)$$

ここに， $\zeta_5=F_0t+\beta y+\varphi$, $\zeta_6=F_0t+\beta y-\varphi$, $\zeta_7=F_0t-\beta y+\varphi$, $\zeta_8=F_0t-\beta y-\varphi$,

引用文献

1) 土木学会第6回年次学術講演会(昭和25年5月28日)において概要を発表
2) Arnold N.Lowan; "On wave-motion for infinite domains", Phil. Mag. Vol. 26 1938. p.340〜360. E.C.Titchmarsh; "Introduction to the theory of Fourier integrals", 1937. p. 277〜298.
3) 喜内 敏; "梁及び版の撓み振動について", 金沢工業専門学校学術報告第4集, 昭和25年6月: "梁及び矩形版の撓み振動の理論", 土木学会論文集第5号, 昭和25年11月 p. 127〜140.
4) 穂坂 衛; "レールの動力学的問題の研究", 機械学会論文集第15巻50号第4部 p.10〜17.
5) 喜内 敏; "梁及び版の撓み振動について", 前出 p. 112
6) 同 上, p. 116〜117.
7) 同 上, p. 195.
8) 青松 健一; "走行荷重に依る鋪装版の振動に就て", 土木学会誌論文集第1.2合併号, 昭和22年6月 p.78.
9) 青松 健一; 前出. p. 81.
10) 喜内 敏; "梁及び版の撓み振動について", 前出. p. 195〜202.

(昭.26.10.30)

UDC 532.527 : 532.522

流出渦について

准員 粟津 清蔵*

ON THE OUTFLOW VORTEX

(Trans. of JSCE March 1952)

Seizō Awazu, C.E. Assoc. Member

Synopsis The outflow vortex may be observed sometime in a vessel from which water is being drawn through an opening at vessel's bottom.

The author tried the theoretical consideration, —why grow up an outflow vortex ?, on the height which air cone arrive at the bottom—, and the author's thought compared in this paper with the data of following experiments.

Firstly the water hold still any constant level in the vessel with cross-sections of a rectangular and a regular octagon, secondly the outflow vortex formed at once or after an absence of 5, 10 and 60 minutes in the vessel by means of drawing through connected pipe at bottom's various positions.

* 日本大学工学部土木教室