

エントロピー最大の原理からみた交通量分布

TRAFFIC DISTRIBUTION THROUGH MAXIMUM ENTROPY PRINCIPLE

香 川 一 男*

By Kazuo Kagawa

1. ま え が き

都市内における車の運行を OD 交通について考えると、微視的には各自動車はそれぞれ個有の OD をもった運行をするわけであるが、都市交通というなかば閉じた運行系における運行過程は巨視的にみると、マルコフ連鎖によって数学的に記述できること、およびその実証性がいくつかの研究例によって明らかになってきた^{1),2),3),5)}。

本研究においても、運行過程の確率モデルとしてマルコフ連鎖を仮定し、主として OD 交通量について考察することにする。したがって、以下本文ではこれを OD モデルとよぶ。つまり、都市内をいくつかのゾーンに分割し、そのゾーンの数を r とする。そのひとつのゾーンたとえばゾーン i からつぎのゾーン、たとえばゾーン j に向う確率を p_{ij} とし、運行確率 (OD 間の遷移確率) という。すべての車は p_{ij} にしたがって、つぎの目的地を決定する。また、任意のゾーンからあらゆる他のゾーンに行くことができるとする (エルゴード性の仮定)。ゾーン i における発生交通量を n_i とし、全発生交通量 n に対する比を p_i とかけば、定常状態においては、 $n_i = np_i$ 、ゾーン i からゾーン j に動く車の台数 n_{ij} は $n_i p_{ij}$ となり、マルコフ連鎖の性質から発生交通量と集中交通量がひとしくなり

$$n_j = \sum_{i=1}^r n_{ij} = \sum_{i=1}^r n_i p_{ij}$$

すなわち

$$p_j = \sum_{i=1}^r p_i p_{ij} \dots \dots \dots (1)$$

が成立する。ゾーン i から出発した車については明らかに

$$\sum_{j=1}^r p_{ij} = 1 \dots \dots \dots (2)$$

また、すべての車はいずれかのゾーンからの発生交通量となるから

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1 \dots \dots \dots (3)$$

が成立する。本文では主としてさきののべた p_i および p_{ij} をエントロピー最大の原理によって推定する方法について考察する。運行確率が与えられたとき、OD 交通

量の計算の方法は他の研究報告にくわしくのべられてあるから、説明を省略することにする^{1),2),3),5)}。

2. エントロピー最大の原理

都市内の全走行車数を n として、この n 台の車に通し番号をつけ、 α 号車がゾーン i からゾーン j に動いたということ全走行車について行なえば、全走行車の動きが完全に記述できることになり、これを車の運行状態とよぶことにする。いま、ゾーン i で発生する n_i 台の車が各ゾーンに向って出発する台数を、 $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ir}$ とすれば、ゾーン i から行先別にみた運行状態の個数は n_i 個のものを $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ir}$ 個にグループ分けするしかたの数は

$$\frac{n_i!}{n_{i1}!n_{i2}!\dots n_{ir}!} = \frac{n_i!}{\prod_{j=1}^r (n_{ij}!)} \dots \dots \dots (4)$$

となる。これが各ゾーンについて考えられるから、 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r, n_{11}, n_{12}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{rr}$ があたえられたとき、全走行車についての運行状態の個数 M は各ゾーンについての積となるから、つぎのようになる。

$$M = \frac{\prod_{i=1}^r (n_i!)}{\prod_{i,j=1}^r (n_{ij}!)} \dots \dots \dots (5)$$

n_i, n_{ij} のすべてについて動かして和をとれば、可能な運行状態の個数の総和 A となる。

$$A = \sum_{n_i, n_{ij}} \frac{\prod_{i=1}^r (n_i!)}{\prod_{i,j=1}^r (n_{ij}!)} \dots \dots \dots (6)$$

この A 個の運行状態の中から無作為にひとつの運行状態をとり出せば、式 (6) の右辺の最大の項に対応する運行状態がとり出される確率もっとも大きいことは明らかである。とくに、 n が十分大きいときは、統計力学の理論によれば、全走行車が完全にランダムに運行しているとき、もっとも起こりやすい $n_1, \dots, n_r, n_{11}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{rr}$ の組が出現する確率はほとんど 1 に近く、その他の組が出現することはほとんど期待できないことがわかっている。したがって、もっとも起こりやすい組は式 (5) を最大にする組である。

いま、式 (5) の対数をとれば

* 正会員 京都大学助手 工学部交通土木工学教室

$$\log M = \sum_{i=1}^r \log(n_i!) - \sum_{i,j=1}^r (n_{ij}!) \dots\dots\dots(7)$$

となり、十分大きい n に対してスターリングの公式 $\log n! \approx n(\log n - 1)$ が成立するから

$$\begin{aligned} \log M &= \sum_{i=1}^r n_i(\log n_i - 1) - \sum_{i,j=1}^r n_{ij}(\log n_{ij} - 1) \\ &= \sum_{i=1}^r n_i \log n_i - \sum_{i,j=1}^r n_{ij} \log n_{ij} \end{aligned}$$

$n_i = np_i, n_{ij} = n_i p_{ij}$ の関係を代入すれば

$$\begin{aligned} \log M &= \sum_{i=1}^r np_i \log np_i - \sum_{i,j=1}^r np_i p_{ij} \log p_{ij} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^r np_i p_{ij} \log np_i \\ &= - \sum_{i,j=1}^r np_i p_{ij} \log p_{ij} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

式(8)の両辺を n で割ってこれを H とすると

$$H = \frac{\log M}{n} = - \sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} \log p_{ij} \dots\dots\dots(9)$$

この H を運行過程のエントロピーとよび、 p_i, p_{ij} が与えられると H がきまる。 H を最大にすることは M を最大にすることであるから、 H を最大にする p_i, p_{ij} を決定することは、もっとも起こりやすい $n_1, \dots, n_r, n_{11}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{rr}$ の組を決定することと同値である。したがって、エントロピー最大の原理から p_i, p_{ij} を推定することは、具体的には、全走行車が完全にランダムに運行するとき、非常に起こりやすい p_i, p_{ij} の組を推定することになる。

以上からわかるように、エントロピー最大の原理は自然現象に内在する均衡化のはたらきと考えられるが、車ののぞましい流れ、あるいは、都市機能の効率化とは直接の関係がないのであって、本研究においてはこれを原理として採用したにすぎないことを強調しておく。

エントロピー、すなわち H を最大にする p_i, p_{ij} をラグランジュの未定係数法によって求めれば、つぎのようになる。すなわち、行列式方程式

$$|Z^{-1} - \delta_{ij}| = 0 \dots\dots\dots(10)$$

ただし

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

の最大根を Z_0 とし、同次連立方程式

$$\left. \begin{aligned} (Z_0^{-1} - 1)B_1 + Z_0^{-1}B_2 + \dots + Z_0^{-1}B_r &= 0 \\ Z_0^{-1}B_1 + (Z_0^{-1} - 1)B_2 + \dots + Z_0^{-1}B_r &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ Z_0^{-1}B_1 + Z_0^{-1}B_2 + \dots + (Z_0^{-1} - 1)B_r &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

の根を B_1^0, \dots, B_r^0 とすると

$$p_{ij} = \frac{B_j^0}{B_i^0} Z_0^{-1} \dots\dots\dots(12)$$

また、 p_i は連立方程式

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^r p_i p_{ij} &= p_j \\ \sum_{i=1}^r p_i &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

から計算することができる。

以上の方程式をとくと、 $p_i = p_{ij} = \frac{1}{r}$ となり、われわれの直観と一致する。

ゾーン i からゾーン j への運行に要する時間が平均 t_{ij} 単位時間であるとすれば、ゾーン i からゾーン j に運行する確率は、一定時間内について考えれば、 t_{ij} の増減とは逆に相対的に増減することになる。したがって、車の運行について走行時間を考える場合は、エントロピー H を1トリップあたりの平均時間で割って、単位時間あたりのエントロピー

$$H' = \frac{- \sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} \log p_{ij}}{\sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} t_{ij}} \dots\dots\dots(14)$$

を最大にする p_i, p_{ij} を求めることが考えられる。しかし、これがもっともおこりやすい p_i, p_{ij} になるかどうかについては、現在の段階では明らかでないが、情報理論では式(14)が用いられているのと、求解の手続きも、式(14)より簡単なものを考えることができなかつたため、情報理論の公式をそのまま採用して、本研究では単位時間あたりのエントロピーを最大にする p_i, p_{ij} を求めてみた。そのとき、 p_{ij} は情報理論の公式によってつぎのようになる。すなわち、行列式方程式

$$|Z^{-t_{ij}} - \delta_{ij}| = 0 \dots\dots\dots(15)$$

の最大根を Z_0 とし、同次連立方程式

$$\left. \begin{aligned} (Z_0^{-t_{11}} - 1)B_1 + Z_0^{-t_{12}}B_2 + \dots + Z_0^{-t_{1r}}B_r &= 0 \\ Z_0^{-t_{21}}B_1 + (Z_0^{-t_{22}} - 1)B_2 + \dots + Z_0^{-t_{2r}}B_r &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ Z_0^{-t_{r1}}B_1 + \dots + Z_0^{-t_{r2}}B_2 + \dots + (Z_0^{-t_{rr}} - 1)B_r &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

の根を $B_1^0, B_2^0, \dots, B_r^0$ とすれば

$$p_{ij} = \frac{B_j^0}{B_i^0} Z_0^{-t_{ij}} \dots\dots\dots(17)$$

である。 p_i は式(13)と同様に計算できる。

3. t_{ij} をあたえた場合の京都市における適用例

京都市の場合、これまでのOD調査の集計資料が京都市を行政区別に分割して9ゾーンにしたものをもっとも利用しやすいため、以下計算例においてはゾーンとして京都市の9個の区をとる。 t_{ij} としてはゾーン間の距離を平均運行時間で割つもの考えたが、ひとつのゾーンの面積がかなり広いものがあり、そのうえゾーン内における交通の中心地域と考えられる地域がかなりはなれてふたつもあつたりして、 t_{ij} の算定は案外困難であつたが、一応表-1のものをあたえた。

表-1 t_{ij} (単位:分)

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北	10	11	15	15	25	20	28	20	35
上京	11	8	13	10	22	15	20	18	32
左京	15	13	8	15	18	15	25	30	30
中京	15	10	15	10	15	9	15	15	25
東山	25	22	18	15	12	15	18	30	20
下京	20	15	15	9	15	7	9	18	20
南	28	20	25	15	18	9	5	25	15
右京	20	18	30	15	30	18	25	10	40
伏見	35	32	30	25	20	20	15	40	12

表-1 を基礎にして京都市の OD モデルについて検討する。京都市の場合、 t_{ij} を考慮して p_i, p_{ij} を推定することにし、したがってエントロピーの式としては式(14)の H' をとり、式(9)については実証的な検討をしない。

OD モデルの検討をするための資料として、昭和 33 年の京都市 OD 調査からえた表-2(p_i の値)、表-3(p_{ij} の値)および昭和 37 年 OD 調査からえた表-4(p_i の値)、表-5(p_{ij} の値)をもちいることにする。昭和 33 年 OD 調査の p_{ij} のうち、昭和 37 年 OD 調査の p_{ij} にくらべ、0.05 以上の増減のあるものの左肩に * 印をつければ、表-3 にみるように * 印の数は 16 個である。表-2 ~ 表-5 からわかるように、とくに中

表-2 昭和 33 年 p_i

北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
0.049	0.091	0.119	0.312	0.141	0.169	0.049	0.038	0.032

表-3 昭和 33 年 p_{ij}

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北	0.174	0.181	0.119	0.243	*0.087	0.114	0.013	0.057	0.012
上京	0.103	0.233	0.122	*0.303	0.074	0.107	0.017	0.032	0.010
左京	0.046	0.089	0.281	*0.286	0.142	0.118	0.017	0.013	0.008
中京	0.041	0.090	0.104	*0.379	0.136	*0.174	0.031	0.031	0.015
東山	0.031	0.053	0.130	*0.300	*0.239	0.163	0.030	0.026	0.029
下京	0.032	0.057	0.078	*0.319	0.142	*0.247	0.080	0.023	0.022
南	0.017	0.032	0.041	*0.208	0.095	*0.248	0.263	0.027	0.069
右京	*0.048	0.067	0.037	0.241	*0.110	0.136	0.037	*0.310	0.015
伏見	0.022	0.035	0.039	*0.143	0.129	*0.107	0.095	0.019	0.412

表-4 昭和 37 年 p_i

北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
0.060	0.107	0.113	0.219	0.127	0.248	0.055	0.041	0.030

表-5 昭和 37 年 p_{ij}

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北	0.178	0.178	0.120	0.237	0.026	0.149	0.037	0.068	0.007
上京	0.093	0.231	0.136	0.216	0.060	0.193	0.018	0.041	0.010
左京	0.062	0.113	0.324	0.184	0.142	0.159	0.005	0.010	0.001
中京	0.066	0.116	0.093	0.279	0.105	0.256	0.035	0.032	0.018
東山	0.019	0.052	0.113	0.192	0.343	0.208	0.034	0.016	0.024
下京	0.037	0.079	0.063	0.221	0.117	0.355	0.069	0.038	0.021
南	0.029	0.028	0.030	0.131	0.065	0.333	0.279	0.022	0.083
右京	0.112	0.091	0.041	0.242	0.021	0.172	0.051	0.267	0.003
伏見	0.020	0.051	0.038	0.093	0.106	0.159	0.134	0.013	0.386

表-6 t_{ij} のみをあたえたときの p_i

北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
0.057	0.149	0.078	0.196	0.039	0.259	0.183	0.026	0.013

表-7 t_{ij} のみをあたえたときの p_{ij}

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北	0.217	*0.298	0.119	0.188	0.018	0.101	0.025	0.032	0.005
上京	0.117	*0.295	0.101	0.252	0.018	*0.135	0.053	0.027	0.002
左京	0.086	*0.187	0.294	0.160	*0.045	0.184	0.034	0.006	0.004
中京	0.055	*0.187	0.064	*0.217	*0.045	0.291	*0.098	0.037	0.006
東山	0.026	0.067	0.090	0.225	*0.160	*0.259	*0.138	0.008	0.027
下京	0.022	0.076	0.056	0.220	*0.040	0.343	*0.213	0.020	0.010
南	0.008	0.042	0.014	0.105	0.030	0.301	*0.466	0.008	*0.026
右京	*0.069	0.150	0.018	0.274	0.012	0.200	0.058	0.217	0.002
伏見	0.010	0.026	0.026	0.087	0.084	*0.215	*0.389	0.003	*0.160

京区の発生集中交通量が相対的に減少し、下京区のそれが増大している。これは交通量からみた京都市の都市活動の都心がこの 4 年間に拡大したことを示していると考えられる。

さて、表-1 の t_{ij} を与えて H' を最大にする p_i および p_{ij} を計算したものが表-6、表-7 である。昭和 37 年 OD 調査の p_{ij} とくらべて 0.05 以上の差があるものを表-7 の値の左肩に * をつけて示した。* 印の数は 20 個であり、表-3 の場合には 16 個であったから、表-7 の表-5 に対する合致の程度は表-3 の表-5 に対する合致の程度とくらべて、* 印に関しては大差ないことがわかる。また、表-7 の表-3 に対する合致の程度は * 印に關していえば 35 個であるから、表-5 に対する合致の程度より悪いといえる。ただし、これはあくまでも * 印の個数に關してのことであって、たとえば合致の程度の尺度として基準の p_{ij} に対する比をとれば合致の程度も異なったものができるかもしれないが、ここでは * 印のみについて考えることにする。

表-7 の表-3 に対する合致の程度が表-5 に対するよりもよくなかったことの原因をつぎのように考えることができる。都市全体の交通量の増加によって t_{ij} が変化することから、表-1 の t_{ij} (昭和 37 年の i, j 間運行時間) は昭和 33 年に対するよりも昭和 37 年に対してより近いはずである。したがって、表-7 の p_{ij} が表-5 の p_{ij} (昭和 37 年の OD 調査結果による) に対してよりよく一致することは十分納得できるが、このほかに都心の拡大すなわち都心的な商業業務活動地域の拡大(商習慣等の変化)がおこなわれつつあり、これがエントロピーの増大となって現われていると考えることもできる。都市において新しい開発地域が生まれなければ、ゾーン間の結合は時間とともに均一化の傾向をたどり、このことがエントロピーの増大にほかならないのである。

表-6、表-7 から都市の成長方向について明確な判断をくだすことは困難であるが、それにしても計算で求めた p_{ij} が現実によく一致していることは注目に値する。

実際、 t_{ij} のみを与え、都市の商工業活動を無視してエントロピー最大の原理によって計算した p_{ij} としては現実の資料に一致しすぎるように思われる。いずれにしても現段階では t_{ij} の与え方、ゾーン分割の方法、交通容量などに関する検討が残されており早急な結論は許されない。

4. t_{ij}, p_i をあたえた場合の京都市における応用例

前節の計算例は t_{ij} のみをあたえてエントロピーを最大にしたので、 t_{ij} が同じである都市はすべて同一の運行確率がえられることになり、また一つの都市において t_{ij} さえ変わらなければ何年経過しても運行確率が不変となり、エントロピー最大の原理は非常に応用上の制約をうけることになる。実際、都市が発展するにつれ、市街地が拡大し、土地利用、商工業活動の形態、分布も変化するであろうが、いずれにせよこれらの変化は p_i すなわち発生集中交通量分布によってとらえることができよう。

これらの変動を考慮にいれた OD 交通量分布は、 p_i をあたえたうえでエントロピーを最大にする p_{ij} を計算することによってえられる。ところが、この p_{ij} を解析的に求めることは困難であることがわかったので、くり返し計算によって求めた。計算の手順はつぎのとおりである。

いま、 H' の最大値を求めるためにラグランジュの未定係数法をつかえば、ラグランジュ関数は

$$F = H' + \sum_{j=1}^r \lambda_j (\sum_{i=1}^r p_i p_{ij} - p_j) + \sum_{i=1}^r \mu_i (\sum_{j=1}^r p_{ij} - 1) \dots\dots\dots(18)$$

となる。したがってつぎの連立方程式をとけばよい。

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} = \frac{-p_i(1 + \log p_{ij})}{\sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} t_{ij}} - \frac{p_i t_{ij} H'}{\sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} t_{ij}} + \lambda_j p_i + \mu_i = 0 (i, j = 1, 2, \dots, r) \dots\dots(19a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^r p_i p_{ij} - p_j = 0 (j = 1, 2, \dots, r) \dots\dots(19b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i} = \sum_{j=1}^r p_{ij} - 1 = 0 (i = 1, 2, \dots, r) \dots\dots(19c)$$

これから解 p_{ij} を求めるためには $(r^2 + 2r)$ 個の非線型連立方程式を解かねばならないが、解を陽に表現することは困難である。いま、 $\bar{t} = \sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} t_{ij}$ とおけば式(19a)から

$$p_{ij} = e^{-1 - t_{ij} H' + \lambda_j \bar{t} + (\mu_i / p_i) \bar{t}} \dots\dots\dots(20)$$

となる。ここでさらに $e^{(\mu_i / p_i) \bar{t}} = \alpha_i$ 、 $e^{\lambda_j \bar{t}} = \beta_j$ とおいて式(20)を変形すれば

$$p_{ij} = \alpha_i \beta_j e^{-1 - t_{ij} H'} \dots\dots\dots(21)$$

となる。式(19b)と式(21)から

$$\alpha_i = \frac{e}{\sum_{j=1}^r \beta_j e^{-t_{ij} H'}} \dots\dots\dots(22)$$

がえられ、式(19c)と式(21)から

$$\beta_j = \frac{e p_j}{\sum_{i=1}^r p_i \alpha_i e^{-t_{ij} H'}} \dots\dots\dots(23)$$

が成立する。以上の関係をもちいてくり返し計算をするのであるが、計算の手順を簡単なブロックダイアグラムで示せば図-1となる。

図-1 p_i をあたえたときの計算手順

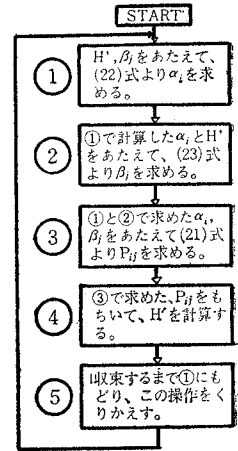


図-1の手順により、京都市のODモデルについて計算した。 t_{ij} として表-1のものをおいて、 p_i は表-4からとった。求めた p_{ij} を表-8に示す。表-8中左肩に*印をつけた値は表-5の p_{ij} とくらべて0.05以上の差があるものである。*印が6個であるから表-8は表-7にくらべてかなり表-5に接近していることがわかる。しかし、表-8においては表-5にくらべて0.1ほどの差を示

表-8 p_i と t_{ij} をあたえたときの p_{ij}

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北	0.217	0.214	0.149	0.208	0.034	0.114	0.011	0.048	0.006
上京	0.120	0.210	0.127*	0.273	0.051	0.150	0.022	0.041	0.006
左京	0.093	0.141	0.358*	0.183	0.125*	0.065	0.015	0.010	0.010
中京	0.056	0.130	0.078*	0.225	0.116	0.293	0.038	0.052	0.013
東山	0.016	0.042	0.093	0.199	0.323	0.224	0.044	0.011	0.048
下京	0.025	0.058	0.072	0.240	0.107	0.360	0.082	0.031	0.024
南	0.011	0.041	0.024	0.144	0.099	0.385*	0.208	0.016	0.071
右京	0.068	0.104	0.023	0.276	0.034	0.202	0.022	0.267	0.004
伏見	0.011	0.019	0.032	0.092*	0.199	0.213	0.133	0.005*	0.295

表-9 あたらしい t_{ij} (単位:分)

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北	10	10'	15	15	28'	25'	28	20	35
上京	10'	8	10'	10	22	15	20	18	32
左京	15	10'	8	15	18	15	25	30	30
中京	15	10	15'	10	15	9	15	15	25
東山	28	22	18	15	12	13'	18	30	20
下京	25'	15	15	9	13'	7'	9	18	20
南	28'	20	25	15	18	9	5	25	15
右京	20	18	30	15	30	18	25	10	40
伏見	35	32	30	25	20	20	15	40	12

表-10 p_i とあたらしい t_{ij} をあたえたときの p_{ij}

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北	0.237	0.239	0.149	0.220	0.033*	0.055	0.011	0.050	0.006
上京	0.135	0.183*	0.177	0.260	0.045	0.137	0.020	0.038	0.005
左京	0.091*	0.192	0.334	0.176	0.113	0.060	0.014	0.009	0.010
中京	0.058	0.122	0.076	0.233	0.112	0.295	0.038	0.053	0.013
東山	0.015	0.036	0.084	0.191	0.296*	0.280	0.042	0.010	0.046
下京	0.012	0.053	0.068	0.242	0.134	0.354	0.082	0.030	0.024
南	0.011	0.037	0.023	0.146	0.094	0.385	0.215	0.016	0.072
右京	0.070	0.095	0.021	0.282	0.031	0.199	0.022	0.275	0.004
伏見	0.011	0.017	0.030	0.092	0.191	0.210	0.136	0.005	0.307

すものがある。この差がどんな原因によるものか現段階ではわからないが、 t_{ij} のあたえ方にも問題があると思われる。たとえば、表-1 の t_{ij} のいくつかを少し変化させ、その右肩に ' をつけたものを表-9 に示す。表-9 の値を新しい t_{ij} として用い、 p_i は表-4 の値をそのまま用いて p_{ij} を計算し、表-8 の p_{ij} に対して 0.05 以上の差があるものには左肩に * をつければ表-10 ようになる。表-1 と表-9 の t_{ij} はその算出において誤差のはんいに入るほどの変化であるが、* 印は 4 個であるから表-8 と表-10 との間に差がないとはいいがたい。このように p_{ij} は t_{ij} に対して微妙に反応するものであるから、 t_{ij} の算出にあたっては特別の工夫が必要と考える。

5. 隣接モデル

これまでは OD 交通量について考察してきたが、ここでは推定された OD 交通量を街路に配分する方法について考察する。配分についてはこれまで多くの手法が提唱されているのであるが、本文ではエントロピー最大の原理を用いて配分の方法を考える。

OD 交通量があたえられると、これをゾーン間の断面交通量に配分し主要な交通流を解析することがある。またこれとは別に、OD 交通量を街路に直接配分する方法もある。前者をゾーン隣接モデル、後者を交差点隣接モデルとよぶことにする。隣接モデルと OD モデルの違いは、OD モデルにおいては任意のゾーン i からすべてのゾーン j に運行確率 $p_{ij} (> 0)$ があたえられ、途中の通過経路に無関係に目的地に対する運行需要によって運行確率があたえられ、運行確率がきまると発生集中交通量が求められるというように、ゾーンを通過する交通量は問題にしない。一方、隣接モデル、たとえばゾーン隣接モデルでは、ゾーン間の運行確率 p_{ij} はゾーン i とゾーン j がとなりあっている場合のみ正で、そうでない場合は零である。つまり、となりあったゾーンを仮空の道路（以下これをリンクとよび、リンクに配分された交通量をゾーン間断面交通量という）で結んだネットワークができる。車は p_{ij} にしたがってリンク上を運行する。この場合のゾーンは交差点のように、交通量の発生集中の場としてでなく、いわば通過交通の場としていくつかのリンクを結合しネットワークにおける交通流を処理する機能をもっている。したがって、 p_i は OD モデルにおいては発生集中交通量分布であったが、隣接モデルにおいてはゾーンがネットワーク上にしめる位置と結合状態によってきまるゾーン i の通過交通量分布である。

(1) ゾーン隣接モデルによる計算例

以上からわかるように、ゾーン隣接モデルにおいては OD モデルと同様にエントロピーの計算ができる。ただし、リンクで結ばれていないゾーン間については $t_{ij} =$

∞ とする。また p_i は通過交通量分布であるから、別途に推定しておくことは困難である。したがって p_{ij} は式 (17) によって計算する。

ゾーン隣接モデルの配分計算法では、まず配分すべき OD があたえられると車が通過すると考えられるルートを適当にきめておき、それぞれのルートをとる確率を計算する。いま、ゾーン i_0 からゾーン i_n に達するまでに k 本のルートがあるとする。それぞれのルートについて車はつぎのようなノードを左から順に通過するとする。

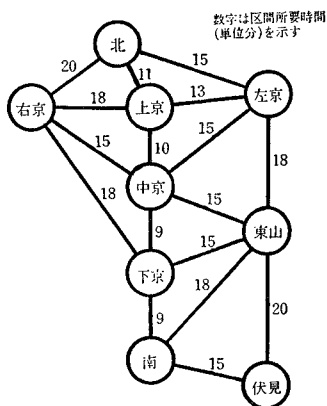
$$\left. \begin{array}{l} i_1^1, i_2^1, \dots, i_{n-1}^1 \\ i_1^2, i_2^2, \dots, i_{n-1}^2 \\ \dots\dots\dots \\ i_1^k, i_2^k, \dots, i_{n-1}^k \end{array} \right\} k \text{ 個のルート}$$

この k 本のルートのうち車が j 番目のルートをとる確率は

$$\frac{(p_{i_0, i_1^j}) \times (p_{i_1^j, i_2^j}) \times \dots \times (p_{i_{n-1}^j, i_n})}{\sum_{m=1}^k (p_{i_0, i_1^m}) \times (p_{i_1^m, i_2^m}) \times \dots \times (p_{i_{n-1}^m, i_n})} \dots\dots\dots (24)$$

となる。このようにしてルートをとる確率を計算し、その確率によって OD 交通量をルートに配分する。配分

図-2 京都市隣接モデル



された交通量からリンクの交通量が計算できる。京都市の場合、ゾーンとしては資料の関係から OD モデルにおけるゾーンをそのまま採用した。またゾーンを結ぶリンクは図-2 のようにした。

図-2 の最短経路に昭和 37 年の OD 交通量を配分したものが表-11 である。

また式 (24) によって配分した昭和 37 年のゾーン間断面交通量を表-12 に示す。なお、断面交通量に関する資料がえられなかったため、表-11 と表-12 との比較検討から結論をうるまでにいたっていない。

表-11 最短ルートに配分された断面交通量

		(単位: 台)								
		北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北			7 526	1 429						810
上京	右京	7 293		4 629	14 058					1 039
左京	上京	1 334	4 354		7 390	4 712				
中京	左京		14 136	6 872		5 214	22 733			1 769
東山	中京			4 948	5 143		5 382	919		1 358
下京	東山				21 363	5 610		7 176		2 054
南	下京					991	7 116			2 124
右京	南	905	1 066		2 124		2 824			
伏見	右京					1 380		2 190		

表-12 式(24)により配分された断面交通量

(単位:台)

	北	上京	左京	中京	東山	下京	南	右京	伏見
北		8 254	716					856	
上京	8 121		8 375	18 889				202	
左京	552	7 432		3 312	4 485				
中京		19 774	2 038		3 071	23 689		4 352	
東山			4 740	4 199		9 352	138		1 810
下京				24 299	10 716		7 091	776	
南					281	7 455			1 672
右京	964	411		3 859		685			
伏見					1 751		1 819		

(2) 交差点隣接モデル

OD 交通量があたえられたとき、これを直接街路に配分するために交差点隣接モデルを考えた。このモデルについての応用例は現在計算中であるので、ここではモデルの概略を述べるにとどめる。このモデルにおいては、交差点における右左折、直進を問題にするため、街路を適当な交差点で区切りこの交差点間の街路を一つの街路と考える。車の運行はマルコフ連鎖をなすとして、車は一つの街路から遷移確率にしたがって接続するつぎの街路へ進む。いままで述べたモデルのゾーンに相当するものがこのモデルでの街路である。したがって、これまでと同様にしてエントロピーを計算できる。 l_{ij} としては街路 i の中点から街路 j の中点にいたる所要時間をあたえる。このモデルにおいては、車がある街路から遷移確率にしたがってつぎの街路に移るという意味で車の運行状態は単純マルコフ連鎖をなしている。すなわち、車がある街路 i にいる確率が i に接続する直前の街路によってきまるのである。さらに、計算機の余裕さえあれば、ある街路にいる確率がその直前の街路にいる確率と、さらにその前の街路にいる確率とによって決定されるようなモデルについても計算できる。このモデルは具体的には、ある街路で直進あるいは右、左折した車がつぎの交差点ではどうなるかを問題にするものである。

こうして交差点隣接モデルでもゾーン隣接モデルと同様にして、OD 交通量を街路に配分することができる。

さて、これまで考えてきたモデルでは、街路の交通容量については考慮しなかった。各街路の交通容量を加味すれば、これまで述べてきたモデルはどのように修正されるであろうか。以下交通容量を考慮したエントロピーについて述べる。交通容量のかわりに車線数をもちいて、街路 j の車線数を C_{ij} であらわす。ここに i は街路 i から入ってきたことを示す。運行過程のエントロピー H'' はつぎのようになる。

$$H'' = \frac{- \sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} \log(p_{ij} C_{ij})}{\sum_{i,j=1}^r p_i p_{ij} l_{ij}} \dots\dots\dots(25)$$

H'' を最大にする p_{ij} はつぎのようにあたえられる。すなわち、行列方程式

$$C_{ij} Z^{-l_{ij}} - \delta_{ij} l_{ij} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

の最大根を Z_0 とし、同次連立方程式

$$\begin{aligned} (C_{11} Z_0^{-l_{11}} - 1) B_1 + C_{12} Z_0^{-l_{12}} B_2 + \dots + C_{1r} Z_0^{-l_{1r}} B_r &= 0 \\ \vdots \\ C_{r1} Z_0^{-l_{r1}} B_1 + C_{r2} Z_0^{-l_{r2}} B_2 + \dots + (C_{rr} Z_0^{-l_{rr}} - 1) B_r &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(27)$$

の根を $B_1^0, B_2^0, \dots, B_r^0$ とすれば

$$p_{ij} = C_{ij} \frac{B_j^0}{B_i^0} Z_0^{-l_{ij}} \dots\dots\dots(28)$$

となる。

このモデルの場合、分割するゾーンの広さは小さい方がのぞましい。OD 交通量を配分する場合、配分されるルートの起終点のはっきりしないからである。

6. おわりに

これまで、OD モデルを中心にエントロピー最大の原理から計算した p_{ij} がどの程度現実の運行確率に合致するかを検討したのであるが、OD モデルについては、 p_i を与えた場合にかなり良好な結果がえられた。また、 l_{ij} と p_i を与えればよいから十分実用性をもっていると考えられる。ただ、 p_{ij} が l_{ij} の変化に対してかなり鋭敏に反応することから、 l_{ij} の推定についてはさらに実証的研究をかさねて妥当な方法を見出さなければならぬ。 l_{ij} の推定において考慮すべき主要な要素として、ゾーン分割、ゾーン内における平均駐車時間および交通容量があると考えられる。

また、本文においては一つの都市内だけの閉じた車の運行系を対象として考えているが、流出入交通量の大きい都市においては、副都心等への車の集中傾向とも関連して、エントロピー最大の原理をどこまで使えるかという問題がある。さらに、都市内の交通ではいくつかの街路が最大容量に近くなると回交通量が増大し、エントロピー最大のパターンと異なる運行状態となることも予想される。

隣接モデルについては適当な結論をうるにいたらなかったが、断面交通量に関する交差点隣接モデルの計算結果をまとめて検討を加えたい。

おわりに、本研究に当ってご指導ご鞭撻をいただいた京都大学 米谷栄二教授、ならびに終始有益なご意見を提供していただいた佐佐木綱助教授、さらに計算に当ってご協力をいただいた大学院学生 飯田恭敬氏に深謝の意を表する。

参考文献

- 1) 佐佐木 綱:交通流理論, 技報堂, pp. 69 (1964)
- 2) 佐佐木 綱・香川一男: マルコフ過程としてみた交通流について, 土木学会第 20 回年次学術講演会講演概要, pp. 88(1965.5)
- 3) 佐佐木 綱: 吸収マルコフ過程による交通量配分理論, 土木学会論文集 No. 121, pp. 28 (1965.10)
- 4) 香川一男・飯田恭敬: 交通量配分に関する情報理論的接近, 第8回日本道路学会論文集 (1965)
- 5) 米谷栄二・佐佐木 綱・西藤立雄: マルコフ連鎖によるOD交通量の推定, 土木学会論文集 No. 129, pp. 15 (1966.5) (1965.12.6・受付)