マルコフ連鎖による OD 交通量の推定

ESTIMATION OF OD TRIPS THROUGH MARKOV CHAIN

米谷栄二*・佐佐木 綱**・西藤立雄***
By Eiji Kometani, Tsuna Sasaki and Tatsuo Saitō

1. 緒　言

OD 交通量の推定は道路計画上重要な事項であって，従来多くの研究がなされてきたが，その主流は各ゾーンの発生集中交通量を現在の OD 交通量のパターンを参照してフレイター法などによってゾーン間交通量になおすものであろう。

本文において報告する推定法は都市内交通のように比較的短距離交通のみによって構成されている交通を対象として，各車の運行がある遷移確率にしたがったマルコフ連鎖をなしているとする考え方の妥当性と，これにもとづく OD 交通量の推定について検討する。

2. モデルの設定とシミュレーション

都市交通の過半をしめるタクシーを例にとって，車の運行状態を考えてみると，きわめて確率的な面をそこに見出すであろう。すなわち，車庫を出た車は客を拾いに走りだし，客を乗せると客の指示にしたがってその目的地まで客を運び，さらに別の客を求めて走行を続けるであろう。客を求めて走る方向も，客を運ぶときの目的地も運転者にとってみるときわめて確率的な決定であり指示である。このような確率的なトリップのくり返しが1日の稼働時間のあいだ行なわれ，その運転者の稼働時間の終了とともに一日の運行を終るのである。

ある都市のタクシー全体について考えてみると，この確率的運行のパターンはいっそう妥当性をもってくるように思われる。すなわち，タクシーは全体として共通の遷移確率をもって運行を続けるものと考えることができよう。われわれはこのような考え方にたって，2,3 の研究発表を行なってきた[1),2),3),4)]。この結果，都市交通における OD パターンはマルコフ連鎖ときわめて高い類似性をもっていることが認められてきた[5)]。

ここで注意しなければならないことは，車庫をでた車が稼働時間のあいだは常に確率的な運行をするという仮定が成立しない場合である。たとえば，車庫から客を乗せて目的地へ運んだならすぐ車庫にもどり，つぎの客を乗せるために待機するような型の運行をくり返す車についてである。これは車庫にもどるという運行が確率的ではないので，少し考え方を変えなければならない。

われわれは車を運行状態から分類して，ほぼ同じ稼働時間（1日のトリップ数でもよい）と共通の遷移行列をもつグループにわけて考えなければならない。

本文においてはこのように分類した車群を一つの車種と定義する。しかしながら，実際の推定問題では運行状態についての資料不足のため，普通に使う車種の分類と一致させざるをえないであろう。また本文における考察は車庫の配置と遷移行列とによって対象地域内のゾーン間交通量を推定することにあって，その走行経路は対象外である。

車種ごとにつぎのような運行状態を仮定して，実際の OD 交通量に適合するかどうかを検討してみる。

〔運行状態の仮定〕

（i）稼働開始前は車庫にいる，

（ii）稼働時間に入ると与えられた遷移確率にしたがって目的地となるゾーンに行く，

（iii）到着したゾーンで与えられた駐車時間だけ待機する（駐車時間もまた確率的に与えることができる），

（iv）駐車時間がすぎると，到着ゾーンからの遷移確率にしたがって，つぎの目的地となるゾーンに行く，

（v）ふたたび与えられた駐車時間だけ待機する，

（vi）このような運行をくり返し，つぎの運行をしたならば稼働時間をこえるようになったときは，この運行を取り消して車庫に帰り，1日の運行を全部終了する。

このような方法で OD 交通量を求めるには電子計算機の使用によるシミュレーションがもっとも有効である。モデルの検討を行なうため京都市の協力をえて京都市における OD 交通量のシミュレーションを行なった。

京都市を構成する9区をゾーンにとり，ゾーン番号はつぎのようにつけた。すなわち，

1：北　区　2：上京区　3：左京区　4：中京区
5：東山区　6：下京区　7：南　区　8：右京区
9：伏見区

遷移確率についての資料が不備であるので，車種を乗用車とトラックの2種にわけた。車庫のある位置によって，各ゾーン所属の車の数を調べることは困難であるので，車の登録地によって所属ゾーンを決めることにした。したがって，最初のトリップにおいては各ゾーンか

* 正会員　工博　京都大学教授　工学部交通土木工学教室
** 正会員　工博　京都大学助教授　工学部交通土木工学教室
*** 正会員　工修　鹿島建設KK

表—1　京都市登録台数 (昭 37)

地区＼車種	乗用車	トラック	地区＼車種	乗用車	トラック
1.北　区	1 337	788	6.下京区	2 459	3 135
2.上京区	1 945	1 286	7.南　区	1 808	2 065
3.左京区	1 519	730	8.右京区	2 947	2 051
4.中京区	2 754	3 048	9.伏見区	1 600	1 926
5.東山区	1 974	1 746			

表—2 (a)　昭和 37 年京都市 OD 表 (乗用車)

O＼D	北区	上京区	左京区	中京区	東山区	下京区	南区	右京区	伏見区
北　区	2 119	2 113	1 429	2 813	309	1 772	439	810	80
上京区	1 887	4 708	2 770	4 441	1 220	3 931	375	827	207
左京区	1 334	2 435	6 975	3 967	3 051	3 423	110	212	22
中京区	2 807	4 936	3 935	11 822	4 446	10 864	1 473	1 374	768
東山区	450	1 257	2 709	4 601	8 230	4 987	809	395	568
下京区	1 724	3 653	2 937	10 259	5 441	16 480	3 224	1 754	945
南　区	307	294	310	1 379	681	3 499	2 930	227	870
右京区	905	736	330	1 955	169	1 391	411	2 173	22
伏見区	118	297	222	542	616	922	780	73	2 234

表—2 (b)　昭和 37 年京都市 OD 表 (トラック)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1 557	1 748	561	1 077	239	773	269	506	124
2	1 754	6 011	1 345	3 200	650	1 873	340	868	305
3	406	943	4 030	1 893	900	1 249	308	429	141
4	1 282	3 028	1 847	11 101	1 543	6 969	1 227	2 670	803
5	233	775	931	1 460	2 798	1 955	523	322	462
6	764	2 073	1 262	6 786	1 840	10 278	2 071	1 933	1 313
7	404	404	321	1 414	502	1 930	3 395	592	742
8	584	828	430	2 587	450	2 094	584	2 704	213
9	118	316	89	723	508	1 330	720	317	4 438

らその登録台数だけの車が出発することになる。各ゾーンの登録台数は **表—1** に示すとおりであり，遷移確率は **表—2** に示されている昭和 37 年の OD 交通量から

$$p_{ij}{}^{*}=a_{ij}/\sum_{j=1}^{r}a_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

によって求めた。ここに a_{ij} はゾーン i からゾーン j への交通量であって，r はゾーンの個数である。

このようにして求めた遷移行列は **表—3** に示されている。またこの計算を進めていくうえに必要な駐車時間は **表—4**，ゾーン間の走行時間は **表—5** に与えられている。駐車時間については京都市が各区で行なった車種を区別しない駐車時間調査の結果を用いたものであるので，乗用車とトラックに区別することができなかった。また走行時間は実際の走行時間ではなく，ゾーン間の道路距離を時速 20 km/h で除した値を採用した。したがって，走行時間は乗用車，トラックとも同一値とした。

稼働時間は自動車の 1 日の運行の開始から終了までの時間であり，このモデルにおいては各車はこの稼働時間内にできるかぎり多くのトリップをするようになっており，1 日の総トリップはこの稼働時間によって大きく左右されるので，稼働時間を 3 時間から 8 時間の範囲で変化させて現在の OD パターンと比較し，最小自乗法の

＊ 印をつけたのは真の意味の遷移確率ではなく，OD表からの直接計算によってえられた遷移確率であるからである。

表—3 (a)　遷移確率 (乗用車)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.178	0.178	0.120	0.237	0.026	0.149	0.037	0.068	0.007
2	0.093	0.231	0.136	0.218	0.060	0.193	0.018	0.041	0.010
3	0.062	0.113	0.324	0.184	0.142	0.159	0.005	0.010	0.001
4	0.066	0.116	0.093	0.279	0.105	0.256	0.035	0.032	0.018
5	0.019	0.052	0.113	0.192	0.343	0.208	0.034	0.016	0.024
6	0.037	0.079	0.063	0.221	0.117	0.355	0.069	0.038	0.021
7	0.029	0.028	0.030	0.131	0.065	0.333	0.279	0.022	0.083
8	0.112	0.091	0.041	0.242	0.021	0.172	0.051	0.267	0.043
9	0.020	0.051	0.038	0.093	0.106	0.159	0.134	0.013	0.386

表—3 (b)　遷移確率 (トラック)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.227	0.225	0.082	0.157	0.035	0.113	0.039	0.074	0.018
2	0.107	0.367	0.082	0.196	0.040	0.115	0.021	0.053	0.019
3	0.039	0.092	0.391	0.184	0.087	0.121	0.030	0.042	0.014
4	0.042	0.099	0.061	0.364	0.051	0.229	0.040	0.088	0.026
5	0.025	0.082	0.098	0.154	0.296	0.207	0.055	0.034	0.049
6	0.027	0.073	0.045	0.240	0.065	0.363	0.073	0.068	0.046
7	0.042	0.042	0.033	0.146	0.052	0.199	0.350	0.061	0.076
8	0.056	0.079	0.041	0.247	0.043	0.200	0.056	0.258	0.020
9	0.014	0.037	0.010	0.084	0.059	0.155	0.084	0.037	0.520

表—4　駐車時間 (分)

ゾーン	駐車時間	ゾーン	駐車時間
1	23	6	3
2	25	7	56
3	11	8	99
4	6	9	95
5	13		

表—5　ゾーン間の走行時間　(単位：分)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	10	15	15	35	20	30	20	40
2		8	10	10	15	12	20	15	30
3			8	12	12	15	24	20	25
4				10	18	12	20	12	25
5					8	12	18	20	20
6						7	12	15	20
7							5	15	12
8								10	30
9									12

意味でもっとも適合する稼働時間として 5.5 時間を採用することにした。稼働時間を 5.5 時間とした場合の交通量は **表—6** に示すとおりであり，数箇所の OD 交通を除くとかなりよく実際のパターンと一致している。表中 ＊ 印のついているところがくいちがいの大きい箇所で，いずれもシミュレーションの値が大きくなっている。特に注目すべきことは二重に＊印のついている箇所は実際の OD 交通量がきわめて少ないところであって，シミュレーションの結果と大きくくいちがっている。

このように大部分の OD 交通量がよく適合しているにもかかわらず，なぜ数箇所の OD 交通量がくいちがってくるのかということが以下の問題点となるのである。**表—6** を求めるためのシミュレーションでは，各ゾーンに在籍する車をわずか 1 台ずつの車で代表させて上記のシミュレーションを行ない，ゾーンごとの在籍車数

表—6 (a) 乗用車に対するシミュレーション結果
(稼働時間 5.5 時間)　　(単位：台/日)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 441	2 405	1 322	2 376	403	1 577	656*	686	107
2	1 686	4 405	2 579	4 528	1 257	3 997	494	970	400
3	1 314	2 251	6 510	3 458	2 919	3 634	243*	425	213*
4	2 329	4 506	3 814	12 547	4 116	10 126	1 425	1 009	848
5	426	1 197	2 774	4 433	7 363	5 597	891	675	598
6	1 948	3 698	3 028	9 648	5 593	16 147	3 186	1 825	802
7	414	463*	499	1 498	715	4 444	2 881	351	663
8	1 075	909	407	2 324	432*	1 493	658	2 321	432*
9	227*	336	194	846*	658	791	875	323*	3 066

* 印はくいちがいの大きい箇所を示す

表—6 (b) トラックに対するシミュレーション結果
(稼働時間 5.5 時間)　　(単位：台/日)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1 983	2 245	430	1 293	266	650	233	484	118
2	1 867	5 789	1 215	3 379	499	1 834	300	717	478*
3	379	877	4 883	2 066	882	1 333	427	378	162
4	1 175	3 185	1 877	9 573	1 440	6 116	1 055	2 475	1 007
5	204	947	852	1 248	2 109	1 758	537	544*	615
6	802	1 842	1 511	5 746	1 565	8 212	2 075	1 662	1 225
7	379	496	504*	1 372	582	1 672	2 392	935*	693
8	649	780	450	2 906	506	2 129	686	2 369	454
9	320*	463	226*	763	481	1 253	857	621*	4 082

を乗ずることによって 1 日の OD 交通量を求め，このようなシミュレーションを 10 日間行なった後，1 日平均の OD 交通になおした値が 表—6 の交通量である。たとえば，左京区に車庫をもつ車を 1 台の車で代表させ，この 1 台を確率的に運行させ，えられたこの OD 交通量に左京区の在籍車数を乗じるのである。稼働時間の大小は OD パターンに影響することはなく，総トリップ数と一次関係がみられるので，OD パターンに影響を与える要因としてつぎの各項について吟味してみた。

(1) 駐車時間あるいは走行時間の地区別相違

表—6 (a) にみられるように，実際の OD 交通量と大きく異なる値を示したのは右京区，伏見区のような周辺部に属する地区であるので，駐車時間の値を，右京区の 99 分を 145 分に，伏見区の 95 分を 100 分に変更してふたたび同様のシミュレーションを行なった。その結果は OD パターンとしての変化はほとんどみられず，全体としての総トリップ数が若干減少しているにすぎない。このことは駐車時間を長くとれば，OD 表全体に影響して，トリップ数が一様に減少することを示している。

走行時間についての影響もまったく駐車時間の場合と同様で，全体的なトリップ数の変動となって現われる。

(2) ゾーンごとの稼働時間の変動

都心部ほど 1 日の稼働時間が長く，周辺部ほど短いであろうという憶測のもとに，右京区および伏見区においては稼働時間を 3 時間，その他を 6 時間として同様のシミュレーションを行なった。この結果としていえることは，右京区および伏見区に関係する OD 交通量だけが減少するということはなく，京都市全体としてのトリップが減少している。また，問題となった OD 交通量のくいちがいの大きい箇所においては，前回よりも大きなくいちがいを生じているのである。このことは全市的に 1 日の平均稼働時間を用いても OD パターンに大差のないことを物語っている。

(3) 車庫位置と登録地との不一致

本文におけるモデルでは，車庫から車が出発していくことになっているが，登録車数を用いた関係上，実際の運行活動のゾーンと登録地との異なる場合，実際の OD パターンとかなり異なったものがえられる可能性があろう。実はこの事項が OD のくいちがいに対して，もっとも本質的な役割を演じていることがわかるのであるが，車庫のある区と登録されている区との相違についての資料がえられないため一応不問にしておく。

(4) 登録台数のウェイトを考慮

これまでのシミュレーションにおいては，各区の登録車全体を 1 台の車で代表させていたが，各区の登録台数 10 台に対して 1 台を，あるいは 100 台に対して 1 台を動かすことによって，各車をすべて運行させたときのパターンに接近させようと考えたわけである。

いま登録車 100 台について 1 台ずつを 10 日間シミュレートしたのが 表—7 である。この結果からは OD パターンにそれほどの変化はみられなかった。

(5) 初期乱数の偏り

シミュレーションに用いる初期乱数が不適当であると，これによってつぎつぎと発生させる乱数に偏りが生じて一様乱数とはいえなくなり，この乱数をもとにして計算した OD 交通量に偏りが生じるおそれがある。そ

表—7 (a) 100 台のうち 1 台を運行させた OD 表 (乗用車)
(単位：台/日)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 680	2 240	1 340	2 240	380	1 620	420	680	160
2	1 680	4 340	2 360	4 300	1 120	4 060	440	920	420
3	1 260	2 140	6 280	3 340	2 960	3 620	280	340	400
4	2 260	4 240	3 500	11 840	4 200	9 800	1 280	980	920
5	400	1 200	2 760	4 320	7 240	5 320	750	560	540
6	1 820	3 560	3 080	9 580	5 240	15 700	3 260	1 700	820
7	380	520	500	1 480	640	4 220	3 060	440	680
8	960	940	500	2 180	360	1 280	800	2 360	580
9	160	380	200	760	620	560	940	360	2 300

表—7 (b) 100 台のうち 1 台を運行させた OD 表 (トラック)
(単位：台/日)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 200	2 770	860	1 170	400	790	330	340	160
2	2 100	6 510	1 470	3 410	530	2 290	490	820	400
3	470	1 290	5 520	2 340	1 100	1 330	250	510	230
4	1 620	2 900	1 990	11 050	1 480	6 400	1 370	2 970	900
5	380	1 340	1 410	1 540	2 100	2 250	410	340	350
6	760	2 230	1 440	6 930	1 950	9 490	1 700	1 810	1 240
7	510	550	370	1 640	700	1 550	2 590	540	730
8	580	880	440	2 560	580	2 840	620	3 220	290
9	210	370	160	1 170	640	1 060	860	380	4 320

表—8（a）　初期乱数を変化させた場合の OD 表（乗用車）

（単位：台/日）

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 578	2 364	1 348	2 540	391	1 608	388	515	238
2	1 805	4 513	2 867	4 366	1 045	3 905	511	918	218
3	1 359	2 526	6 695	3 790	2 990	3 539	134	480	152
4	2 241	3 998	4 246	11 872	4 272	10 688	1 120	1 042	578
5	1 608	1 574	2 243	4 407	7 553	5 313	793	701	486
6	1 667	3 712	3 189	10 225	5 274	17 300	2 653	1 120	937
7	346	463	389	1 316	911	3 457	2 288	347	564
8	860	656	494	2 315	284	1 366	525	2 166	472
9	205	325	308	502	498	892	855	354	2 605

表—8（b）　初期乱数を変化させた場合の OD 表（トラック）

（単位：台/日）

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1 989	1 567	535	993	249	752	327	365	189
2	1 504	6 251	1 138	2 997	610	2 106	313	657	320
3	262	991	4 526	2 155	916	900	407	485	165
4	1 040	2 798	1 944	9 989	1 348	6 227	1 341	2 108	1 038
5	264	1 038	1 042	1 591	2 420	1 891	512	439	524
6	762	2 006	1 131	6 129	1 831	10 351	1 984	1 486	1 274
7	398	588	517	1 273	672	1 706	2 274	874	523
8	529	807	343	2 614	613	1 798	621	2 171	460
9	294	381	190	857	545	1 286	723	537	4 034

のような可能性を検討するために，初期乱数を 2，3 いれかえてシミュレーションを行なったところ，その偏りはあまりみられない。その一例として表—8 を掲げる。

以上の各項について検討した結果では，OD パターンの部分的偏りを除去することはできなかった。そこで理論的な解釈を試みることを目的として，解析の便宜から 1 日の稼働時間を 1 日のトリップ数におきかえて考察することにする。すなわち，シミュレーションにおいては，1 日の車の運行は一定の稼働時間に達すると終了することになっているが，見方をかえて各車の運行終了は 1 日の平均トリップ数に達したときであると考える。このように考えなおすと，時間に対する直接的概念がなくなってくるので，走行時間および駐車時間に直接関係なく交通発生が可能となる。実際の車の稼働時間が常に一定であると考えることも不自然であるので，1 日のトリップ数で運行に制限をつけることも同じ結果となるであろう。このような見方をすると，上記のシミュレーション・モデルはマルコフ連鎖にほかならないことになる。

3. マルコフ連鎖との関連性

車庫が登録地にあると仮定する。考えている地域における各ゾーンのある車種についての登録台数を T_1, T_2, ……, T_r とする。ここに r はゾーンの総数であり，全登録台数を T とすると

$$T = T_1 + T_2 + \cdots\cdots + T_r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

である。各ゾーン間の遷移確率行列を P_0 とすると

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_{11}, & p_{12}, & \cdots\cdots & p_{1r} \\ p_{21}, & p_{22}, & \cdots\cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1}, & p_{r2}, & \cdots\cdots & p_{rr} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

であり，要素 p_{ij} はゾーン i から j への遷移確率（運行確率）を意味している。路線バスのような定まった運行をする車種を除いて，この運行確率 P_0 は正則であり，また，つねに

$$\sum_j p_{ij} = 1$$

なる関係を満足する確率行列である。

いま各車が在籍ゾーンから出発して第 1 回目のトリップを終了したときの，各ゾーンに存在する車の数は行ベクトル

$$(T_1^{(1)},\ T_2^{(1)},\ \cdots\cdots,\ T_r^{(1)}) = (T_1, T_2, \cdots T_r)\cdot P_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

あるいは

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \boldsymbol{T}P_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4')$$

で与えられる。$\boldsymbol{T}$ は行ベクトルを表わす。

このときえられる OD 表は

$$\begin{pmatrix} T_1 p_{11}, & T_1 p_{12}, & \cdots\cdots, & T_1 p_{1r} \\ T_2 p_{21}, & T_2 p_{22}, & \cdots\cdots, & T_2 p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_r p_{r1}, & T_r p_{r2}, & \cdots\cdots, & T_r p_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & T_r \end{pmatrix} P_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

で与えられる。

同様に N-1 回目のトリップの終了したときのゾーン別車数は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{(N-1)} &= \boldsymbol{T}^{(N-2)} P_0 \\ &= \boldsymbol{T} P_0^{N-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6) \end{aligned}$$

によって与えられ，$N-1$ 回目のトリップだけの OD 表は

$$\begin{pmatrix} T_1^{(N-2)} & & 0 \\ & T_2^{(N-2)} & \\ & & \ddots \\ 0 & & T_r^{(N-2)} \end{pmatrix} \cdot P_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

で表わされる。

われわれが OD 表として必要なのは各時点での OD 表ではなくて，1 日の合計された OD 表である。

そこで 1 日の平均トリップ数を N とすれば，$N-1$ 回目のトリップまでの各ゾーンの発生交通量ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{(N-1)} &= \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^{(1)} + \boldsymbol{T}^{(2)} + \cdots\cdots + \boldsymbol{T}^{(N-2)} \\ &= \boldsymbol{T}(I + P_0 + P_0^2 + \cdots\cdots + P_0^{N-2}) \quad \cdots (8) \end{aligned}$$

と表わすことができる。ただし I は単位行列であり，

$$\boldsymbol{A}^{(N-1)} = (A_1^{(N-1)},\ A_2^{(N-1)},\ \cdots A_r^{(N-1)})$$

であって，$A_i^{(N-1)}$ はゾーン i において $(N-1)$ 回目のトリップまでに発生する総発生交通量である。

したがって，$N-1$ 回のトリップ総数からなる OD 表は

$$\begin{pmatrix} A_1^{(N-1)} & & \\ & A_2^{(N-1)} & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & A_r^{(N-1)} \end{pmatrix} P_0$$

$$\begin{pmatrix} A_1^{(N-1)}p_{11}, & A_1^{(N-1)}p_{12}, & \cdots A_1^{(N-1)}p_{1r} \\ A_2^{(N-1)}p_{21}, & A_2^{(N-1)}p_{22}, & \cdots A_2^{(N-1)}p_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_r^{(N-1)}p_{r1}, & A_r^{(N-1)}p_{r2}, & \cdots A_r^{(N-1)}p_{rr} \end{pmatrix} \cdots(9)$$

で与えられる。

シミュレーションに用いたモデルでは車の運行終了はその車の所属地で終ることにしているので，$(N-1)$ 回目のトリップ終了後の OD 表に車庫に帰るトリップを加えなければならない。

しかしてゾーン i に在籍していた車が N 回目のトリップの始めにゾーン j にいる確率は行列 P_0^{N-1} の ij 要素で与えられるから，これに T_i を乗ずれば，j から i に戻る車の数が求められる。すなわち P_0^{N-1} の各列に $T_1,\ T_2,\ \cdots T_r$ を乗ずればよい。それゆえ最終トリップについての OD 表は

$$\begin{pmatrix} T_1 p_{11}^{(N-1)}, & T_2 p_{21}^{(N-1)}, & \cdots T_r p_{r1}^{(N-1)} \\ T_1 p_{12}^{(N-1)}, & T_2 p_{22}^{(N-1)}, & \cdots T_r p_{r2}^{(N-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ T_1 p_{1r}^{(N-1)}, & T_2 p_{2r}^{(N-1)}, & \cdots T_r p_{rr}^{(N-1)} \end{pmatrix} \cdots\cdots(10)$$

で与えられる。ここに $p_{ij}^{(N-1)}$ は P_0^{N-1} の ij 要素を意味する。したがって1日の OD 表は

$$\begin{pmatrix} A_1^{(N-1)}p_{11}+T_1 p_{11}^{(N-1)}, & A_1^{(N-1)}p_{12}+T_2 p_{21}^{(N-1)}, & \cdots\cdots A_1^{(N-1)}p_{1r}+T_r p_{r1}^{(N-1)} \\ A_2^{(N-1)}p_{21}+T_1 p_{12}^{(N-1)}, & A_2^{(N-1)}p_{22}+T_2 p_{22}^{(N-1)}, & \cdots\cdots A_2^{(N-1)}p_{2r}+T_r p_{r2}^{(N-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_r^{(N-1)}p_{r1}+T_1 p_{1r}^{(N-1)}, & A_r^{(N-1)}p_{r2}+T_2 p_{2r}^{(N-1)}, & \cdots\cdots A_r^{(N-1)}p_{rr}+T_r p_{rr}^{(N-1)} \end{pmatrix} \cdots\cdots(11)$$

で与えられる。

ゾーン i から j への OD 交通量は式 (11) の ij 要素であるから

$$A_i^{(N-1)}p_{ij}+T_j p_{ji}^{(N-1)} \cdots\cdots(12)$$

で与えられる。

ここでマルコフ連鎖の性質を考えてみる。確率行列 P_0 が正則であれば，N が無限大となると P_0^N は極限行列 W に収れんする。すなわち

$$\lim_{N\to\infty} P_0^N = W \cdots\cdots(13)$$

ここに

$$W=\begin{pmatrix} w_1, & w_2, & \cdots\cdots w_r \\ w_1, & w_2, & \cdots\cdots w_r \\ \cdots\cdots & & \\ w_1, & w_2, & \cdots\cdots w_r \end{pmatrix} \cdots\cdots(14)$$

であり，各行はまったくひとしい。

w の値を求めるには

$$\boldsymbol{w}=(w_1,\ w_2,\ \cdots\cdots w_r) \cdots\cdots(15)$$

なる行ベクトルを考え，

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{w}P_0=\boldsymbol{w} \\ w_1+w_2+\cdots+w_r=1 \end{array}\right\} \cdots\cdots(16)$$

を解いて求めることができる。

京都市における遷移行列 P_0 に対する w の値は **表—9** に示すとおりである。

表—9

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
乗用車	0.0604	0.1065	0.1132	0.2185	0.1273	0.2482	0.0554	0.0405	0.0300
トラック	0.0547	0.1235	0.0852	0.2315	0.0726	0.2177	0.0711	0.0789	0.0648

このような遷移行列 P_0 に対しては，$N=6$ くらいで極限行列に近い行列となっており，実用上から考えると，6トリップくらいで定常状態に達しているとみて差し支えないようである。ちなみに乗用車の P_0^6 の値を **表—10** に示しているが，このようにきわめて早く定常状態に達することの理由として，最初から P_0 と W とにいちじるしい差のないことがあげられよう。

表—10 P_0^6 表の値（乗用車）

O \ D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.061	0.107	0.114	0.219	0.127	0.248	0.055	0.040	0.029
2	0.061	0.107	0.114	0.219	0.127	0.248	0.055	0.040	0.029
3	0.061	0.107	0.114	0.219	0.127	0.248	0.055	0.040	0.029
4	0.061	0.107	0.113	0.219	0.127	0.248	0.055	0.041	0.029
5	0.060	0.106	0.114	0.219	0.128	0.249	0.055	0.040	0.030
6	0.060	0.106	0.113	0.218	0.127	0.249	0.056	0.041	0.030
7	0.060	0.106	0.112	0.218	0.127	0.249	0.057	0.040	0.030
8	0.061	0.107	0.113	0.219	0.126	0.248	0.055	0.041	0.030
9	0.059	0.105	0.111	0.217	0.128	0.249	0.058	0.040	0.033

このようなかなり速度の早い収れん性は他の都市（神戸市，尼崎市など）の場合においてもいえることである。日本の諸都市における車の平均トリップ数が7以上になっていることからも，1日の運行終了近くの時刻ではほとんど定常状態に陥っていると考えてよい。

京都市における例について1日の平均トリップ数を求めてみると，乗用車に対して 10.4，トラックに対して 7.6 となっている。各車のトリップ数が一定ではないため，このように平均トリップ数が整数にならない。最初に仮定したトリップ数が同一であるという仮定は不合理となるが，これはマルコフ連鎖としての考え方で交通をとらえるかぎりさけられないことである。

そこでつぎのように考えることにする。すなわち平均

表—11 式 (11) による OD 交通量（乗用車）

（単位：台/日）

O \ D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 073	2 073	1 401	2 957	302	1 730	513	799	82
2	1 830	4 580	2 693	4 316	1 184	3 824	348	813	197
3	1 239	2 275	6 529	3 763	2 860	3 202	96	198	120
4	2 587	4 558	3 698	10 959	4 120	10 054	1 370	1 260	633
5	441	1 203	2 617	4 443	7 975	4 820	783	369	536
6	1 628	3 442	2 771	9 738	5 145	15 641	3 085	1 674	927
7	337	325	354	1 532	758	3 889	3 273	256	958
8	1 173	951	427	2 539	454	1 852	534	2 799	231
9	152	386	286	696	793	1 998	1 004	201	2 892

トリップ数が10.4ということは，トリップ数が10の日と11の日が6対4の比で生じると仮定して，式(11)を計算してみると表—11にみられるように，シミュレーションの結果とほぼ同一の結果をうることがわかる。

以上の考察から，稼働時間を与えてシミュレーションさせることは平均トリップ数のマルコフ連鎖を考えることとほぼ同等であろうということがわかる。

しかしながら，われわれがさきに問題としていた右京区，伏見区に関係する箇所はいぜんとして計算値が大きい。この最大の理由として，十分吟味することのできなかった車庫と登録地との不一致が考えられよう。

いま定常状態となったマルコフ連鎖では

$$\begin{aligned}(T_1^{(\infty)},\ T_2^{(\infty)},\ \cdots\cdots T_r^{(\infty)}) &= \lim_{N\to\infty}(T_1^{(N)},\ T_2^{(N)},\ \cdots\cdots T_r^{(N)}) \\ &= (T_1,\ T_2,\ \cdots\cdots T_r)W \\ &= (w_1,\ w_2,\ \cdots\cdots w_r)T \quad \cdots\cdots(17)\end{aligned}$$

あるいは簡潔に

$$\boldsymbol{T}^{(\infty)} = \boldsymbol{w}T \cdots\cdots(17')$$

が成立するから，定常状態における任意のゾーンiの発生交通量はそのゾーンの集中交通量にひとしく，かつ全ゾーンの総登録台数Tに一定比率w_iを乗じたものである。すなわち定常状態では車の初期分布に無関係な一定の発生集中交通量となってくる。

T_iの大きいゾーンは登録台数が多いのに対して，w_iの大きいゾーンは交通発生度の高いゾーンであることを示している。

すでに述べたように，遷移行列はかなり早く収れんするという性質，しかも登録地は車庫に一致していない可能性がきわめて高いので，車のゾーン別の登録台数を用いずに，ゾーンiから最初に出発する車数をTw_iと仮定する。すなわち，車の活動する地区と登録地とは別個のものであると考え，全登録台数のうちw_iという割合がゾーンiに所属する車であると仮定するのである。実際尼崎市における調査では車種によって25%から70%は車庫と登録地とが一致していない。車庫規制であるとか駐車禁止が強化されるにしたがって，登録地，車庫位置さらに運行活動の根拠地というものが異なってきて，交通発生の要因としてゾーン別登録台数は不適当となりつつあると考えられよう。このような考え方からゾーン別登録台数を問題にせずTw_iで処理してみる。

それゆえ式(6)において

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{w}T \cdots\cdots(18)$$

とおけるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^{(N-1)} &= \boldsymbol{T}P_0^{N-1} = T\boldsymbol{w}P_0^{N-1} = T\boldsymbol{w}P_0P_0^{N-2} \\ &= T\boldsymbol{w}P_0^{N-2} = \cdots\cdots(\because\ \boldsymbol{w}P_0 = \boldsymbol{w}) \\ &= T\boldsymbol{w} \cdots\cdots(19)\end{aligned}$$

となり，式(19)がNに無関係であることから，いかなるトリップ後においても各ゾーンの発生および集中交通量は不変であることがわかる。

したがって，これらのトリップからなるOD交通量も

$$\begin{pmatrix} Tw_1p_{11}, & Tw_1p_{12}, & \cdots\cdots Tw_1p_{1r} \\ Tw_2p_{21}, & Tw_2p_{22}, & \cdots\cdots Tw_2p_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Tw_rp_{r1}, & Tw_rp_{r2}, & \cdots\cdots Tw_rp_{rr} \end{pmatrix} \cdots\cdots(20)$$

で与えられる。このODパターンは各回のトリップについて不変であるから，$(N-1)$回目までのトリップによってできあがるiからjへのOD交通量は式(20)を$(N-1)$倍して

$$T(N-1)w_ip_{ij}$$

で与えられる。

最終トリップすなわち車庫（真の意味では夜間車をおいているところ）に戻っていくときのiからjへいく交通量は，すでにまえに述べたように定常的運行に達していると考えられるので，T_jw_iで与えられる。

したがって全部のトリップを終了したときのiからjへのOD交通量は

$$\begin{aligned}&T(N-1)w_ip_{ij} + Tw_jw_i \\ &\quad = TNw_ip_{ij} + Tw_i(w_j - p_{ij}) \cdots\cdots(21)\end{aligned}$$

となろう。しかしてNは7以上とみてよく，(w_j-p_{ij})の値も比較的小さいので，式(21)の第1項にくらべ第2項を無視して第1項のみでOD交通量を推定してよいと思われる。

したがって1日のOD表は式(20)をN倍して

$$TNP_w \cdots\cdots(22)$$

なる行列で与えられる。ここに

$$P_w \equiv \begin{pmatrix} w_1p_{11}, & w_1p_{12}, & \cdots\cdots w_1p_{1r} \\ w_2p_{21}, & w_2p_{22}, & \cdots\cdots w_2p_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ w_rp_{r1}, & w_rp_{r2}, & \cdots\cdots w_rp_{rr} \end{pmatrix} \cdots\cdots(23)$$

であって，トリップ確率行列とよぶべき行列である。この行列のij要素は任意のトリップを一つ選んだとき，それがijというODをもっている確率を表現している。したがって全要素を加えると1になる性質がある。

式(22)からわかることであるが，(TN)が全市の発生交通量を表わしており，これにP_wを乗ずることによってODパターンに配分されることになっている。

式(22)を用いて京都市のOD交通量を求めてみると表—12に示すとおりであって，これまでのいずれの場合よりも実際のODパターンに近く，問題の箇所もほとんど実際と差がなくなってきた。

このように，これまでのいかなる方法によってもくいちがいの生じてくる問題の箇所が，現在のODパターンに急激に接近したということは著者達にとって驚異で

表―12 (a) TNP_w による OD 交通量 (乗用車)

(単位：台/日)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 063	2 063	1 375	2 731	306	1 719	420	783	78
2	1 891	4 699	2 770	4 431	1 222	3 935	363	840	210
3	1 337	2 445	7 001	3 973	3 075	3 438	115	210	21
4	2 951	4 833	3 878	11 652	4 374	10 677	1 452	1 337	745
5	458	1 261	2 751	4 661	8 347	5 062	821	382	592
6	1 757	3 763	2 993	10 506	5 558	16 847	3 285	1 814	993
7	306	306	325	1 394	688	3 515	2 961	229	879
8	890	707	325	1 872	172	1 337	401	2 063	21
9	105	287	210	535	611	917	780	78	2 216

表―12 (b) TNP_w による OD 交通量 (トラック)

(単位：台/日)

O＼D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1 611	1 597	582	1 114	248	802	277	525	128
2	1 715	5 582	1 314	3 141	641	1 843	337	849	305
3	431	1 017	4 323	2 034	962	1 338	332	464	155
4	1 262	2 974	1 833	10 935	1 532	6 880	1 202	2 644	781
5	236	773	923	1 451	2 788	1 950	518	320	462
6	763	2 062	1 271	6 780	1 836	10 255	2 062	1 922	1 300
7	388	388	304	1 347	480	1 836	3 229	563	701
8	573	809	420	2 529	440	2 048	573	2 642	205
9	118	311	481	706	496	1 303	706	318	4 373

あった。

大胆な表現であるかも知れないが，上記の考察を通して推測される都市交通の性質としてつぎのことがいえるであろう。

(i) 都市交通には1日完結性（車庫から出発して1日のうちに車庫に帰る性質）があって，毎日の運行は確率的なパターンを形成していること，(ii) 都市内各ゾーンの登録台数というものは事務的な現象であって，都市交通現象からみるかぎり，都市全体としての保有台数のみが意味をもつのではないかということ，(iii) したがって OD パターンを決定するのは各ゾーンごとの保有台数ではなくて，各ゾーンの交通発生度ともいうべき w であること，(iv) OD パターンをマルコフ連鎖としてみるかぎり，各回のトリップに対して最初から定常的であること，(v) OD 交通量を求めるという段階においては車種を細かくわけて，N および P_0 の一定な車種を探すということは省略して，普通用いられる車種の分類に，自家用，営業用の区別をするくらいで十分であろうということなどである。

以上の検討の結果 “TNP_w” による計算法がもっとも便利であって実用上有効であると考えられる。

ここで最初から不問にしていた運行確率 P_0 について考えてみる。上記の数値計算に採用していた P_0 は OD 表から逆算してえられた値を要素としていた。すなわち，式 (1) で求められた p_{ij}^* がその要素であった。この値がはたしてマルコフ連鎖的意味での運行確率（遷移確率というと交差点などにおける分岐確率の感じが強く，OD 間の遷移確率については運行確率とよんだ方がぴったりするので，以下このようによぶことにする）になっているかどうか疑問であろう。

これまでの考察の結果，i から j への OD 交通量は式 (21) で与えられるから，ゾーン i からの総発生交通量は式 (21) を j について加えればよいから

$$TNw_i \sum_j p_{ij} + Tw_i \sum_j (w_j - p_{ij}) = TNw_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

となる。なぜなら第2項は0となるからである。

したがって，OD 表から逆算される運行確率は式(21)を式 (24) で除して

$$p_{ij}^* = p_{ij} + (w_j - p_{ij})/N \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

でなければならない。

さきにも述べたように式 (25) の第2項は N がある程度大きければ無視できるので

$$p_{ij}^* = p_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

としてよいことがわかる。

しかしながら N が小さい場合，もしくはより厳密に真の運行確率を求めたいときには p_{ij}^* を要素とする運行確率行列 P_0^* の極限ベクトル

$$\boldsymbol{w}^* = (w_1^*,\ w_2^*,\ \cdots\cdots w_r^*)$$

を用いて

$$\boldsymbol{w} \fallingdotseq \boldsymbol{w}^* \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

の仮定をいれて，式 (25) から真の意味の運行確率 p_{ij} を求めなければならない。すなわち

$$p_{ij} = (Np_{ij}^* - w_j^*)/N-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

によって，みかけの運行確率から真の確率を算出することができる。

式 (28) によれば各車についての運行調査を行なうことなくして，OD 表から運行確率を求めることができるので有用な関係式である。

4. OD 交通量の将来推定

前節で吟味したように，TNP_w によって OD 交通量の現在パターンをうまく説明することができることがわかったが，将来の OD パターンを推定することは非常に困難な問題である。

TNP_w による将来推定を行なうには，将来の目標時点における全保有台数 T，1日のトリップ数 N および運行確率 P_0 を決定しなければならない。T および N についての将来推定は普通に行なわれているように，時系列外挿ないしは原単位を用いた方法にゆだねるとして，本文においては運行確率の推定に重点をおいて説明する。

運行確率は出発地にある自動車がいろいろな目的地を選ぶ確率であって，各目的地が自動車を吸引する力を全数1.0とする比率であることはすでに述べた。したがって，この比率は経済的社会的原因によるものであると考えられ，これら要因を考慮して推定しなければならない。

運行確率がその地区の経済指標とどのような関係にあるか，つまり経済的社会的要因とどのような関連性を有するかということを調べるため，運行確率と個々の経済指標との相関性を検討してみた。

p_{ij} が i 地区と j 地区との経済指標の和あるいは積と関係があると仮定し，各相関係数を求めてみた。

京都市における資料がなかったので，神戸市における昭和 37 年度の各区別経済指標をもとにして，神戸市の OD 表からえられた車種別運行確率との相関を求めたのである。この計算結果を**表—13** に示す。各欄の上段の値は各 OD 両ゾーンの経済指標の積の値と運行確率との相関係数を示し，下段の値は経済指標の和の値と運行確率との相関係数を示している。

表—13 からわかるように，ij 地区間の運行確率は i, j 地区の経済指標の和よりも積との相関が高いので，相関度の高い経済指標を用いて，つぎのような関係式が成立つと仮定し，最小自乗法により係数を決定すればよい。

$$p_{ij}=k_{ij}(A_iA_j)^{\alpha}(B_iB_j)^{\beta}R_{ij}{}^{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

ここに，A_i, B_i は i 地区の経済指標であり，R_{ij} は ij 地区間の距離，k_{ij}, α, β および n は定数である。

このように現在までの資料によって定数を決定しておき，将来時点の経済指標を与えて運行確率を求めればよい。道路改良などによる R_{ij} の将来値も与えておく必要がある。このようにしてえられた運行確率はその和が 1 とならないので，これを 1 にひとしくなるように比例配分などを用いて修正しなければならない。

上記の推定手順をへて将来年次の T, N および P_0 が推定されたならば，P_0 の極限ベクトル $\boldsymbol{w}$ を式 (16) から求め，式 (22) および式 (23) によって将来の OD 交通量を決定することができる。

表—13 経済指標と運行確率との相関係数（神戸市の場合）

経済指標	大型乗用車	小型乗用車	大型貨物車	小型貨物車	バス	特殊車	軽自動車
事業所数	0.507	0.521	0.681	0.609	0.614	0.339	0.585
	0.427	0.387	0.512	0.467	0.456	0.024	0.476
商店数	0.504	0.517	0.688	0.617	0.633	0.331	0.573
(総数)	0.427	0.384	0.520	0.475	0.424	0.024	0.474
〃	0.871	0.778	0.562	0.522	0.563	0.352	0.590
(法人)	0.656	0.528	0.401	0.365	0.401	0.021	0.428
〃	0.396	0.431	0.686	0.616	0.625	0.319	0.544
(個人)	0.339	0.321	0.521	0.476	0.465	0.023	0.458
営業支出額	0.952	0.824	0.499	0.480	0.544	0.346	0.570
(総額)	0.682	0.544	0.337	0.304	0.357	0.017	0.374
〃	0.960	0.823	0.476	0.464	0.528	0.346	0.562
(法人)	0.685	0.542	0.317	0.289	0.342	0.017	0.366
〃	0.393	0.487	0.732	0.644	0.689	0.268	0.422
(個人)	0.320	0.333	0.503	0.443	0.466	0.017	0.358
販売業	0.222	0.268	0.623	0.568	0.549	0.276	0.466
従業者数	0.190	0.185	0.482	0.448	0.408	0.021	0.411
運輸業	0.047	0.145	0.587	0.534	0.524	0.253	0.353
従業者数	0.008	0.081	0.448	0.409	0.370	0.017	0.307
サービス業	0.528	0.546	0.681	0.606	0.621	0.292	0.513
従業者数	0.444	0.399	0.511	0.462	0.462	0.020	0.431
商品販売額	0.949	0.831	0.498	0.477	0.530	0.354	0.565
(総額)	0.680	0.549	0.335	0.300	0.347	0.016	0.366
〃	0.960	0.827	0.458	0.449	0.503	0.356	0.548
(法人)	0.684	0.546	0.303	0.271	0.320	0.015	0.347
〃	0.457	0.529	0.754	0.665	0.705	0.319	0.507
(個人)	0.373	0.368	0.526	0.469	0.484	0.021	0.415
売場面積	0.634	0.635	0.687	0.613	0.655	0.298	0.544
	0.514	0.448	0.494	0.444	0.471	0.019	0.434

注：上段の数値は経済指標の積の場合，下段は和の場合の相関係数

5. 結　語

都市交通における車の運行は 1 日完結性をもった確率的側面が強く，車種別営業態別にみると 1 つの遷移確率行列をもったマルコフ連鎖を構成していると考えられる。都市内を分割してできたゾーンにおける車の登録台数は，都市内の OD パターンを考えるときにはほとんど無意味であって，OD 間の遷移確率行列の極限ベクトル $\boldsymbol{w}$ が重要であり，OD パターンはトリップ確率行列 P_w によって決定される。OD 交通量は TNP_w によって記述され，車種別に適用すると精度が高くなる。

現在までの資料で運行確率を求めるには，登録車に対する運行調査を行なうか，あるいは OD 表をもとにして式 (1) もしくは式 (28) によって算出してよい。

将来推定にあたっては運行確率の推定がもっとも労力のかかる作業であるが，いずれにしても従来の OD 交通量の推定方法よりも推定作業が容易である。

参考文献

1) 佐佐木綱・三浦利夫：ランダムウォークによる交通量の推定について，第 19 回土木学会年次学術講演会講演概要（第IV部），昭和 39 年5月，p. 5-1～5-2
2) 米谷栄二・西藤立雄：ランダムウォーク法による京都市の交通量推定について，昭和 39 年度土木学会関西支部学術講演会講演概要，昭和 39 年 11 月，p. 139～140
3) 佐佐木 綱：遷移確率による交通量推定について，昭和 39 年度土木学会関西支部年次学術講演概要，昭和 39 年 11 月，p. 143～144
4) 佐佐木綱：交通流理論，交通工学シリーズ3，技術書院，昭和 40 年4月，p. 69～77
5) Eiji Kometani : Estimation of OD Trips by Transition Matrix, Paper presented to the 3 rd International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow, 1965, June

(1965.7.31・受付)