

開水路急拡部の水理学的性状に関する研究

FLOW BEHAVIOURS AT SUDDEN EXPANSIONS OF OPEN CHANNEL

石原 藤次郎*・志方俊之**

By Tojiro Ishihara and Toshiyuki Shikata

要旨 本文は、開水路急変部における遷移流の水理学的特性を明らかにする第一段階として、幅が急激に拡大する水路において、開水路流れが示す各種の水理学的特性、すなわち遷移現象の分類、遷移水面形状、エネルギー損失、流速分布、およびはく離領域について理論的および実験的に考察を加えたものである。

流れは、開水路急拡部よりはく離し、しかもこのはく離領域は流れの水理学的性格にいちじるしい影響を与える。ここでは開水路急拡部における流れは拘束された流れの場の噴流と類似の現象であると考えて、実験的に得られる流れの挙動より一つのモデルを作り、開水路急拡部における流れの特性を取り扱った。この結果、水路側壁の拘束効果を示す一つの実験的パラメータ(*confine parameter*)によって、流速分布やはく離領域の性格が決定されることが明らかにされた。

1. 緒言

水路形状や境界特性の急激な変化をともなう開水路を通る流れは、一般に急激かつ複雑な変化を示し、その力学的関係を解析的に解くことのむずかしい急変流である。

従来、急変流の種々の現象はむしろ経験的かつ実用的に解析されてきたが、この研究は開水路の急拡部を通る流れを急変流の代表的な問題としてとり上げ、系統的な実験によって、その水理学的解析法を一步前進せしめようとしたものである。

水路の急変部における水理学的性状に関する研究は、急変部におけるエネルギー損失を最小にするための最適遷移条件を求めることに端を発した。しかしながら、これらの研究はその大部分が管路の流れに関するものであり、しかも急変部近傍の局所的な水理現象を取り扱ったものは数少なく、十分に解明されていない。近年になって、ようやく開水路についても、その研究が行なわれるようになったが、これらはその目的および、取り扱う流れの状態によって、つぎの2つに大別される。すなわち、(i) 急変部を通過する射流の水面形状に関する研究^{1), 2)}、(ii) 急変部を通過する常流のエネルギー損失に関する研究^{3), 4)}、この他、移動床水路における急変部

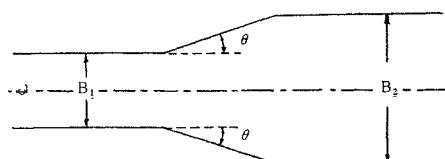
近傍の洗掘現象に関する実験的研究も並行して行なわれている⁵⁾。本研究はむしろ後者に属するものであり、とくに急変部近傍の局所的水理現象に着目して詳細な実験を行ない、この部分のエネルギー変換機構の解明を取り扱おうとするものである。そのためには、(1) 遷移の分類、(2) 遷移水面形状、(3) エネルギー損失の評価、(4) 流速分布の特性、(5) はく離領域の特性について十分な検討を加えなければならない。しかし、急変部近傍の流れはきわめて複雑で、現在の水理実験技術によって詳細な計測を行なうことはなかなかむずかしい。したがって、何らかの形でこの流れの示す挙動をモデル化するとともに、その解析結果の実際問題への適用をはかることが望ましい。このような観点から、本文では、まず一次元運動量解析法によって遷移を分類し、それにともなうエネルギー損失を推定するとともに、急拡部における流れの細部構造について、その特性を示そうとするものである。

2. 開水路急拡部における流れの遷移現象

(1) 開水路急拡部における遷移現象とその分類

急拡部の流れを特徴づけるものは、水路境界面からの流れのはく離にあるといえる。従来からの多くの実験によれば、拡大角 θ (図-1 参照)が $8\sim 10^\circ$ ではく離現象が生起し、 $\theta > 30^\circ$ でははく離領域の特性が θ によって変化せず、ほぼ一定の状態になることが明らかにされている^{6), 7)}。したがって、 $\theta = 90^\circ$ の急拡部を対象として議論することによって、各種の急拡部に生ずる遷移現象を代表し得ると考え、以下ではすべて $\theta = 90^\circ$ の急拡部を取り扱うものとする。

図-1 Sketch of a sudden expansion.



開水路流れの遷移現象は、水路の幾何学的形状・粗度・勾配などの水路自体の特性と流量・流れの状態・下流水位など流れ自体の特性によって決定される。すなわち、正勾配水路の流れについて、与えられた水路の幾何学的

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木学科

** 学生会員 京都大学大学院学生

表-1 (a)

case	上流側水路	下流側水路
1	緩勾配水路	他の緩勾配水路
2	緩勾配水路	限界勾配水路
3	緩勾配水路	急勾配水路
4	限界勾配水路	緩勾配水路
5	限界勾配水路	他の限界勾配水路
6	限界勾配水路	急勾配水路
7	急勾配水路	緩勾配水路
8	急勾配水路	限界勾配水路
9	急勾配水路	他の急勾配水路

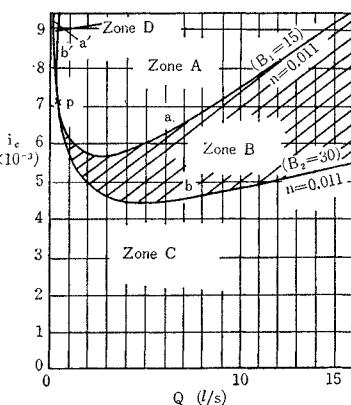
表-1 (b)

case	Zone or Line
1	Zone C
2	Line b
3	Zone B
4	Line a'
5	Point p
6	Line a
7	Zone D
8	Line b'
9	Zone A

形状および流量によって、一義的に決定される限界水深を用いて、流れの遷移状態を示す基本の水路形式が表-1 (a) のよう

に分類される。
いま、この研究に用いた水路形状 ($B_1=15$ cm, $B_2=30$ cm, $n=0.011$) に対

図-2 Relation between critical bed slope and discharge.



する限界勾配 i_c を流量 Q の関数として表わし、これらの分類を示すと、図-2 および表-1 (b) のようになる。この図から明らかなように、同じ底勾配であっても、流量の変化によって上下流水路の水理学的特性はいろいろの組み合わせを生じ、これらの分類を考慮して急拡部の遷移水面形状を論ずる必要がある。C. Jaeger³⁾ は上に示した急拡部における遷移形式を、接近流の Froude 数 (Fr_1) と上下流の水深比 ($\phi=h_2/h_1$) とを用いて、表-2 に示すような 4 形式に分類した。ここに、 β_* : 水路幅拡大比 (= B_2/B_1)。

表-2

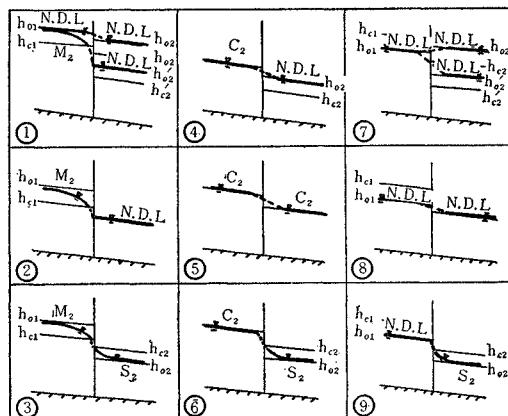
	上流	下流	Fr_1	水深比
1	常流	常流	$Fr_1 < 1$	$\phi > 1$
2	常流	射流	$Fr_1 < 1$	$\phi < 1/\beta_*$
3	射流	常流	$Fr_1 > 1$	$\phi > 1$
4	射流	射流	$Fr_1 > 1$	$\phi < 1/\beta_*$

しかしながら、これは急拡部近傍の局所的な水面形の挙動の詳細および下水流深の影響などを考慮に入れていないため、実際の現象を説明するには不十分であり、詳細な実験によって局所的現象を明らかにする必要がある。

(2) 遷移にともなう流れの局所的挙動

急拡部をはさんで上下流水路が十分に長いと、急拡部より離れた上下流の水深は、その流量に対するそれぞれの等流水深に近づくから、急拡部近傍の局所的な遷移水

図-3 Transition profiles through a sudden expansion.



面形状を除いて、一般的な水面形の定性的挙動が示される。図-3 は表-1 (a) にあげた水路の分類について、これらの水路にあらわれる水面形を示したものである。しかしながら、実際にあらわれる急拡部近傍の流れは、水面の急激な低下と同時に水路境界からのはく離とともに局所的に複雑な遷移水面形状となることが予想される。著者らは、各種の流量 (4~30 l/sec) と勾配 ($2 \sim 7 \times 10^{-3}$) において下流を等流水深にした場合の遷移水面形に関して実験を行なった。これらの結果から定性的につぎのようなことが明らかにされる。すなわち、流量や勾配のいかんにかかわらず、急拡部の直下流では射流状態で交差波の不安定な波状水面が形成され、それぞれ下流水深に接続する。また、底勾配や流量によって、跳水位置が変化することは明らかである。図-4 は著者らの実験で得た遷移水面形を例示したものである。

さらに下流水深を等流水深からせき上げた場合について実験を行なうと、下流水深がある水深（以下、これを臨界下流水深と呼ぶ）以上に上昇すると、急拡部近傍の遷移はすべて常流となる。すなわち緩勾配開水路急拡部の流れの遷移形状は、臨界下流水深を境として、常流 → 射流 → 常流と常流 → 常流とに大別されることが実験的に確かめられる。図-5 は著者らの実験によって得られた遷移水面形の一例を示したものであるが、便宜上、下流水深が臨界下流水深以上のものを常流遷移、

図-4

Typical transition profiles through the sudden expansion.

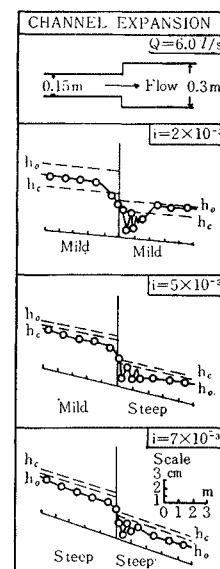
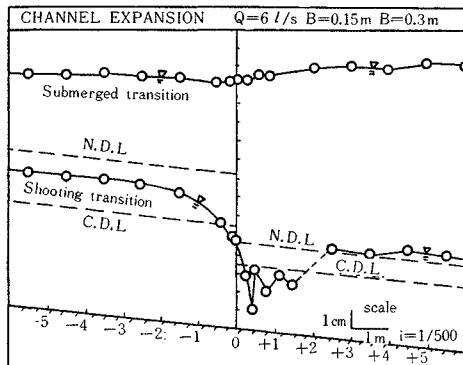


図-5 Typical profiles of submerged and shooting transitions.



それ以下のものを射流遷移と呼ぶことにする。しかしながら、下流水深が臨界下流水深となる場合には、急拡部近傍の流れは限界流に近い不安定な状態にあるため、射流遷移と常流遷移とは臨界下流水深を境にして明瞭に区別されるわけではなく、その間には何らかの遷移領域が存在する。いまこれをかりに不安定遷移とよぶこととする。

3. 緩勾配開水路の急拡部における遷移の一次元解析

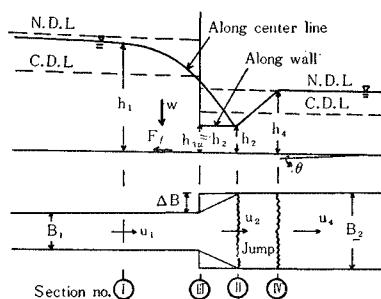
開水路の急拡部や急縮部としての不連続部では、渦や波状水面の形成などによって、大きい内部エネルギーの変化がおこる。しかしながら、この損失を評価することは非常に困難であるから、たとえ一次元解析法を適用するにしても、エネルギー方程式より、むしろ運動量方程式を解析手段として用いる方が適切である。とくに、この種の問題では、境界面における外力の摩擦損失は内部エネルギーの損失に比較して重要でなく、実用的見地からは無視してよいであろう。

(1) 急拡部における遷移

図-6 に示す急拡部をもつ緩勾配長方形断面水路における流れについて、断面Iと断面IIの間の運動量方程式および連続式は、それぞれ

$$\frac{1}{2} \lambda_1 \rho g B_1 h_1^2 + \rho B_1 h_1 \eta_1 u_1^2 + W \sin \theta$$

図-6 Surface profile of shooting transition assumed in the analysis.



$$+ \frac{1}{2} \lambda_3 \rho g 2A B h_{3w}^2 \\ = \frac{1}{2} \lambda_2 \rho g B_2 h_2^2 + \rho B_2 h_2 \eta_2 u_2^2 + F_f \quad \dots \dots \dots (3-1)$$

$$B_1 u_1 h_1 = B_2 u_2 h_2 = B_2 u_4 h_4 \quad \dots \dots \dots (3-2)$$

となる。ここに、 η 、 λ ：それぞれ運動量補正係数、圧力分布係数、 W ：断面I～II間の流体の重量、 F_f ：境界面に働く表面摩擦抵抗、 ρ ：流体の密度、 g ：重力の加速度、 h ：水深、 u ：平均流速、 B ：水路幅、 θ ：水路底勾配、なお添字1、2はそれぞれ断面I、IIにおける値を表わす。いま簡単のため、水路を緩勾配とすると、水の重量の影響は無視せられ、またこのような急拡部では表面摩擦抵抗が小さいと考えると、これらの両式からつぎの式(3-3)が得られる。

$$\lambda_1 + 2 \eta_1 \frac{u_1^2}{gh_1} + \lambda_3 (\beta_* - 1) \left(\frac{h_{3w}}{h_1} \right)^2 \\ = \lambda_2 \beta_* \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + 2 \frac{\eta_2}{\beta_*} \frac{u_1^2}{gh_1} \frac{1}{(h_2/h_1)} \quad \dots \dots \dots (3-3)$$

ここで、 $\beta_* = B_2/B_1$ ：水路幅拡大比

Jaeger⁸⁾は急拡部の流れは常流遷移であるとして $h_{3w} = h_1$ とおいているが、著者らの実験によれば、図-6に示したような射流遷移では、

$$h_{3w} \neq h_2 \quad \dots \dots \dots (3-4)$$

とおく方がむしろ適切である。いま、簡単のために $\eta_1 = 1.0$ 、 $\lambda_1 = \lambda_3 = 1.0$ とし、 $u_1^2/gh_1 = Fr_1^2$ 、 $h_2/h_1 = \phi$ とおくと、

$$Fr_1^2 = \frac{\phi [1 - \phi^2 \{(\lambda_2 - 1)\beta_* + 1\}]}{2 \left\{ \frac{\eta_2}{\beta_*} - \phi \right\}}, \quad \left(\phi < \frac{\eta_2}{\beta_*} \right) \quad \dots \dots \dots (3-5)$$

さらに $\lambda_2 = \eta_2 = 1.0$ とおくと、

$$Fr_1^2 = \frac{\phi (1 - \phi^2)}{2 \left(\frac{1}{\beta_*} - \phi \right)}, \quad \left(\phi < \frac{1}{\beta_*} \right) \quad \dots \dots \dots (3-6)$$

が得られる。これは β_* をパラメーターとする双曲線群となる。同様にして常流遷移に対しては式(3-7)が得られる。

$$Fr_2^2 = \frac{\beta_* \phi (1 - \phi^2)}{2 \left(\frac{1}{\beta_*} - \phi \right)}, \quad (\phi \geq 1) \quad \dots \dots \dots (3-7)$$

(2) 臨界下流水深

前節で述べた常流射流および不安定遷移の問題は、急拡部近傍の局所的遷移現象に対する下流水深の影響を示すものといってよいから、常流遷移の場合の式(3-7)を下流の水理条件を用いて書きなおすと、

$$f(\phi) = 2 \beta_* Fr_2^2 \phi^3 - (1 + 2 Fr_2^2) \phi^2 + 1 = 0,$$

$$(\phi \geq 1) \quad \dots \dots \dots (3-8)$$

となる。ここに、 $Fr_2 = u_2 / \sqrt{gh_2}$ は下流水深に対する Froude 数である。この式(3-8)で与えられる関数 $f(\phi)$ は、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 0 \\ \phi &= \frac{1+2Fr_z^2}{3\beta_*Fr_z^2} \end{aligned} \right\} \dots \quad (3-9)$$

においてそれぞれ極大値、極小値をもつ3次曲線である。いま式(3-8)の根をそれぞれ、 ϕ_1 、 ϕ_2 および ϕ_3 とすると、3次方程式の根の一般的性質より、一根 ϕ_3 は負の実根となり、この場合物理的意味を持たない。他の2根 ϕ_1 、 ϕ_2 は β_* と Fr_2 の関係によって表-3のように分類される。いま問題となるのは ϕ_1 、 ϕ_2 がともに正の実根の場合であって、 ϕ_1 、 ϕ_2 は一定の下流水理条件に対する接近流の2つの流れの状態を与える、 $\phi_1 > \phi_2$ とすれば、 ϕ_1 は射流、 ϕ_2 は常流の水深に対応する。したがって常流遷移から不安定遷流へ変化する臨界下流条件は $\phi_1 = \phi_2$ となる等根を持つ場合で、式(3-8)および式(3-9)から、

$$27 \beta_*^2 Fr_*^4 - (1 + 2 Fr_*^2)^3 = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (3-10)$$

で与えられる。

表-3

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
1	実根 (正)	実根 (正)	実根 (負)
2	等根 (正)		実根 (負)
3	虚根	虚根	实根 (負)

これとまったく同様にして求めた射流遷移の臨界下流条件は、

$$27 \beta_*^4 Fr_2^4 - (1 + 2 \beta_* Fr_2^2)^3 = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (3-11)$$

となる。これらを一括してそれぞれの遷移の関係を図示すると、図-7 のようになる。

(3) エネルギー損失係数

開水路の急拡部における形状損失水頭は、Darcy-Weisbach の表示によれば、

である。ところが開水路流れでは管水路の場合と異なり、流れの状態によってエネルギーの損失機構が大きく変化し、常流遷移では流れの不連続面に生ずる渦による

$$\zeta_{tc} = \frac{\alpha_1(1+2Fr_{2t}^2)^3 - 9Fr_{2t}^2(1+2Fr_{2t}^2)(2+\alpha_2Fr_{2t}^2) + 54\beta_*Fr_{2t}^4}{9Fr_{2t}^4(1+2Fr_{2t}^2)} \dots \quad (3-15)$$

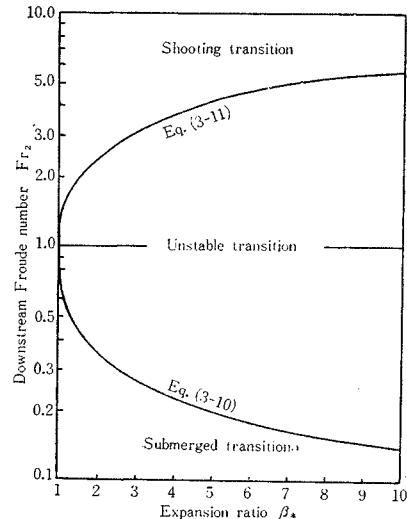
同様に射流遷移については、

$$\zeta_{sc} = \frac{\alpha_1(1+2\beta_*Fr_{2s}^2)^3 - 9\beta_*^2Fr_{2s}^2(1+2\beta_*Fr_{2s}^2)(2+\alpha_2Fr_{2s}^2) + 54\beta_*^4Fr_{2s}^4}{9\beta_*^2Fr_{2s}^4(1+2\beta_*Fr_{2s}^2)} \quad \dots \quad (3-16)$$

となる。ここに、 Fr_{2t} , Fr_{2s} はそれぞれ常流遷移および射流遷移の臨界下流水深に対する Froude 数である。

図-8 に示す実線は以上の各式を用いて計算したものであるが、簡単のため、エネルギー補正係数 α_1 , α_2 をともに 1.0 としている。図-8 から、急拡部におけるエネルギー損失係数 ζ は、下流の Froude 数 Fr_2 によって大きく変化することがわかる。すなわち、 Fr_2 の増大とともに、常流遷移では ζ が増大し、射流遷移では逆に減少している。また同一の Fr_2 に対して拡大比 β_* が増

图-7 Critical downstream conditions.



エネルギー損失が卓越し、射流遷移では衝撃波面の形式とそれに続く跳水によるエネルギー損失が主要なものとなる。

急拡部における流れのエネルギー方程式は、水路底勾配が小さいとき、図-6を参照して、

$$h_f + h_t = (z_1 - z_2) + (h_1 - h_2) + \left(\alpha_1 \frac{u_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{u_2^2}{2g} \right) \quad \dots \dots \dots \quad (3-13)$$

のようになる。ここに、 h_f ：摩擦損失水頭、 h_t ：形状損失頭、 z ：基準線からの高さ、 α ：エネルギー補正係数。

いま簡単のため、水路底勾配と摩擦損失の項を省略すると、式(3-12)および(3-13)から次式が得られる。

$$\zeta = \frac{\alpha_1 \beta_*^2 F r_*^2 \phi^3 - (2 + \alpha_2 F r_*^2) \phi + 2}{F r_*^2 \phi} \quad \dots \dots \quad (3-14)$$

さきに述べたように、常流遷移と射流遷移とでは損失係数が異なる値を示すと考えられるから、それらをそれぞれの臨界下流水深について求めると、常流遷移については式(3-9)、(3-10)および(3-14)から、

大すると、 c が急激に増大するという従来から指摘された事実⁴⁾を確かめることができる。ここで注意すべき点は、射流遷移におけるエネルギー損失は、式(3-12)で表わされる形狀損失水頭に加えて跳水によるエネルギー損失を考慮しなければならないことである。

(4) 実験結果とその考察

前節で述べた遷移の分類方法および一次元解析法の妥当性とその限界とを検討するために、一連の実験を行なった。

図-8 Coefficient of energy loss due to sudden expansion.

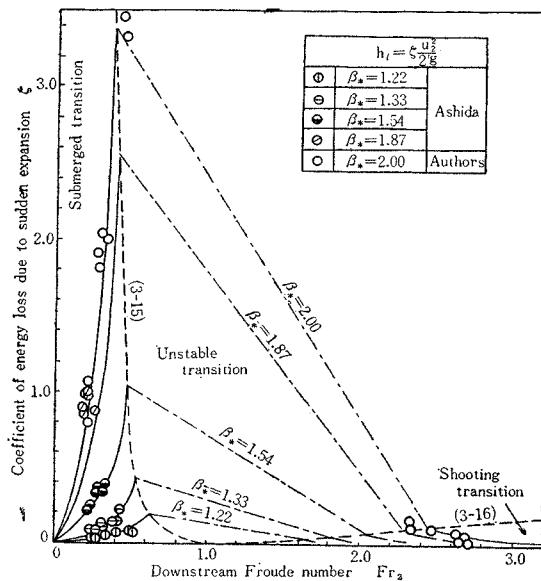
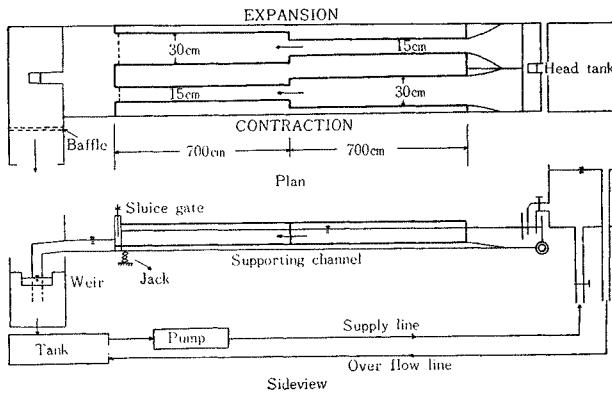


図-9 Schematic view of flume.



a) 実験装置および実験方法 実験水路は図-9に示す長さ 14 m (中央に急拡部・急縮部を設置), 深さ 20 cm, 水路幅 15 cm および 30 cm の長方形断面水路である。勾配は可変であって、図-2 に示した、A, B, C の領域に対応させるため、それぞれ 7×10^{-3} , 5×10^{-3} , 2×10^{-3} の 3 種類について実験を行なった。安定した接近流を得るために水路上流端に漸変遷移部を取り付け、また下流水位の調節は水路下流端に設置した可動せきによって行ない、必要な下流 Froude 数 Fr_2 を与えた。実験流量の範囲は 4~20 l/sec である。実験水路はラッカ一塗装の木製水路で、その粗度としては水面形の実測結果から Manning の粗度係数 $n=0.011$ (m·sec 単位) を採用した。水深の測定にはポイント ゲージを用い、水面変動のいちじるしい部分では、白金抵抗線水位計とペンオシロ グラフによって平均水深を測定した。

b) 遷移水面形 急拡部の遷移水面形はすでに図-4 にその一例を示したが、一連の実験結果を前節の一次

元解析法によって整理すると図-10 のようになる。この図から、(i) 下流水路が十分長い場合には、その水深は等流水深に漸近し、前節に述べたように射流遷移となって Fr_1 と ϕ の関係は式 (3-6) にしたがう。(ii) 下流水位を徐々にせき上げて Fr_2 を小さくしていくと、 ϕ が増大するが、 Fr_1 は変化しない。これは急拡部なお支配断面が存在し、下流の影響が上流に伝播していないことを示している。しかしながら、支配断面の下流における水面形は不安定な波状水面をなし、いわゆる不安定遷移に属するものである。(iii) さらに、下流水位をせき上げると、下流の影響が上流に伝わり、 Fr_1 は急激に減少して常流遷移を示す式 (3-7) にしたがうことがわかる。このように実際に現われる遷移水面形は、図-6 に示したような簡単なモデルについて得られた解析結果とほぼ一致し、とくに図-7において $\beta_* = 2$ の臨界下流水深に対する Froude 数は $Fr_{st} = 0.37$ となり、図-10 に示した実験結果とよく一致している。

c) エネルギー損失係数 本実験 ($\beta_* = 2$) によって

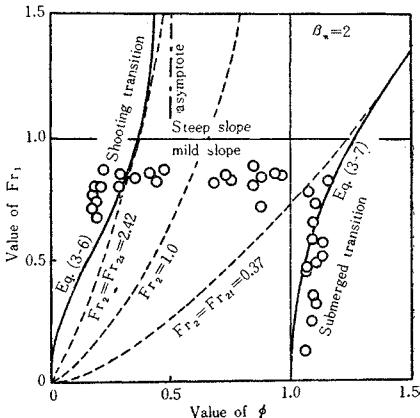
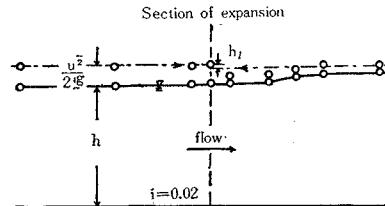
図-10 Relation between Fr_1 and ϕ .

図-11 Evaluation of head loss.



得られた結果および従来の実験結果⁴⁾は、図-8 にプロットしたとおりである。この場合、損失水頭 h_l は図-11 に示すような方法で求められたものである。これらの図より、簡単な仮定のもとに得られた式 (3-14), (3-15) および (3-16) の関係が実際の流れをよく説明し得ることがわかる。

また急拡部におけるエネルギーの形状損失係数についてつぎのことが明らかとなった。(i) 常流遷移では損失係数 ζ は Fr_2 の増加とともに増大し、臨界下流水深

に対する Froude 数 Fr_{2t} に近づくにしたがって急激に増大する。Formica³⁾ は $\beta_* = 1.73$ の水路を用いて実験 ($Q = 15.6 \sim 52.5 l/sec$) を行ない、その結果を、

と表わし、損失係数 ζ_0' は流量のいかんにかかわらず一定の値 $\zeta_0' = 0.82$ を示すと結論した。しかしながら、式(3-12)に対すると同様な計算を行なうと、

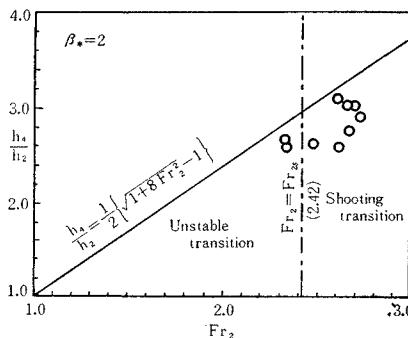
$$\zeta_0' = \frac{2(1-\phi) + Fr_2^2 \phi (\alpha_1 \beta_*^2 \phi^2 - \alpha_2)}{Fr_2^2 \phi (\beta_* \phi - 1)^2} \dots \dots (3-18)$$

となり、流量による C_p の変化を考えるより、むしろ Fr_2 による変化を考えるのが妥当であることがわかる。このことから Formica の実験は実験流量を変えてもほぼ同様な Fr_2 のもとで行なわれたものと推測される。

(ii) 拡大比 β_* が増大するにつれて実測値が理論値から離れるのは、エネルギー補正係数 $\alpha_1=\alpha_2=1.0$ という大きい仮定によるものと考えられるが、この実験のみで十分な説明をすることは困難である。(iii) 不安定遷移の領域における Fr_2 の範囲では、いわゆる波状跳水となり、水深の測定が困難で比エネルギーの評価が容易ではなく、実験値は記入されていない。(iv) 射流遷移では流速が増大するにつれて、損失水頭 h_l 自体は増大するが、下流の速度水頭 $u_2^2/2g$ も増大するから逆にこの値は減少する。しかしながら、 Fr_2 が大きくなると、 $\alpha_1=\alpha_2=1.0$ の仮定が妥当性を失い、実測値は理論値より小さくなる。ここで注意すべきことは、前にも述べたように射流遷移の損失水頭には跳水による損失水頭が加えられていないことである。したがって遷移にともなう損失水頭を論ずる場合には、式 (3-12) に跳水による損失を加えて形状損失を考えなければならない。

一般に急拡部下流に生ずる跳水は複雑で、跳水の上下流における運動量関係を求めることが困難である。図12は本実験によって得られた水深比とFroude数との関係を示したものであるが、実測値は非常にばらついて

图-12 Relation between h_4/h_2 and Fr_2 for hydraulic jump in downstream channel.



12 の実測値は h_2 として単純な断面平均水深を用いて整理したものである。

4. 急拡部における常流遷移流の流速分布

(1) 概 説

急拡部における流れの最大の特徴は、水路壁面から流れがはく離することである。急拡部の両側に形成されるはく離領域内では、流体は複雑な渦運動を行なっている。しかしながら、巨視的にみれば、この平均運動は上流側水路から放出された流れがはく離領域から流体を連行しつつ徐々にその幅を増し、やがて下流側水路側壁に達するものであることがわかっている。しかも、流れの一部は逆流となってはく離領域に補給され、他の部分は流下方向の流れとなってほぼ一様な流速分布を持った状態に達する。このような流れの状態を考慮して急拡部における流速分布の特性を検討するには、(i) 流速分布の形状、(ii) 中心線流速の低減特性、(iii) はく離領域の形状と長さ、(iv) はく離領域内の流れの状態などを明らかにしなければならない。しかしながら、急拡部における流れの遷移は常流遷移・不安定遷移および射流遷移に大別され、それぞれの流速分布特性は非常に異なっている。不安定遷移および射流遷移では現象が不安定かつ急激であるため、流速分布の特性を検討することは非常に困難である。したがってここでは現象が比較的安定した常流遷移に着目し、その流速分布特性を吟味するにとどめる。

(2) 噴流理論適用の可能性

常流遷移における急拡部近傍の流れに関する問題は、幅の広い下流側水路に放出された流れの、側壁よりの拘束がある場における拡散とその下流側水路における変化というのに帰せられよう。もちろん開水路急拡部を通過する流れでは、その特異性が種々な形であらわれるが、急拡部の流速分布形や中心線流速の低減特性は、2次元噴流のそれとかなり類似していることが実験的に明らかにされている。このような観点から、噴流理論適用の可能性を明らかにするため、つぎに示す事項について詳細な実験的検討を行なった。もちろん境界条件については異なるところがあることはいうまでもない。

- (i) 急拡部における流速の水深方向分布
 - (ii) 接近流に対する急拡部の影響
 - (iii) 噴流の領域区分

流速の水深方向分布は、水深 h と水路幅 B との比によって異なるが、 h/B が小さくなるにつれて一様になるという事実が従来の実験¹⁾から指摘されている。図-13 は本実験 ($0.13 < h/B_2 < 0.25$) の一例であるが、すべての実験結果からも図-13 とほぼ同様な分布が得られることがわかっている。ここに u_{\max} : 最大平均流速, B_2 : 下流側水路の幅, y : 幅方向座標である。したがって急拡部における流速分布は水深方向に対し二次元的であるとみなしうるものと思われる。図-14 は急拡断面

図-13 Velocity distribution at the expansion.

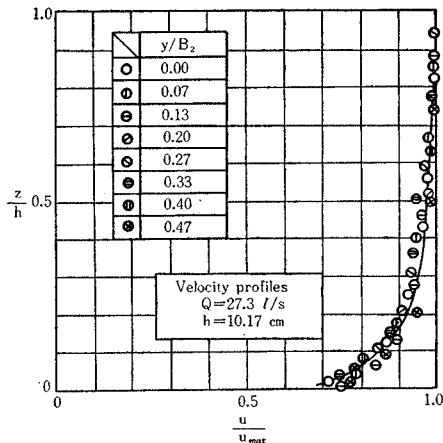


図-14 Velocity distribution of approaching.

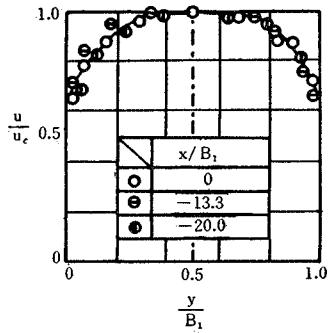
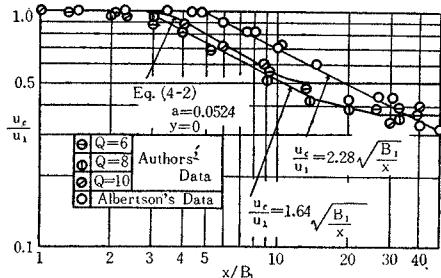


図-15 Characteristics of center velocity decay.



(噴出口)における流速分布を示すもので、上流側接近流の流速分布をもって代表させ得ることがわかる。ただし、 u_c は中心線流速を示し、この場合の実測値は、断面平均流速に近いと考えられる水路底より 60% の水深の流速を代表値として示した。図-15 は急拡部噴出口から噴出した流れの中心線流速 u_c の低減特性を示すもので、この図から流速分布が下流水路で一様になるまでの過程は 3 つに区分されることがわかる。すなわち、

- (i) 噴出流速 u_1 が保持されるいわゆる Zone of flow establishment と呼ばれる領域
- (ii) 幅方向の拡散が卓越して行なわれる Zone of established flow と呼ばれる領域
- (iii) 下流水路側壁による拘束の効果が卓越し、次第

に下流側水路の流れとして確立されていく遷移領域

なお、図-15 には Albertson⁹⁾ の実験によって得られた 2 次元理想噴流の流速低減特性が示されているが、著者らの実験値と比較すれば、低減特性はいずれも Tollmien¹⁰⁾ の低減公式

$$\frac{u_c}{u_1} = K_0 \left(\frac{B_1}{x} \right)^{1/2} \quad \dots \dots \dots \quad (4-1)$$

を満足しており、急拡部における流れの流速低減特性は 2 次元理想噴流と同様に、自由乱れによる混合の卓越する領域が存在することを表わしている。ここに、 u_1 : 噴出口の流速、 K_0 : 定数、 B_1 : 噴出幅、 x : 流下距離に沿った噴出口よりの距離である。 K_0 は Zone of flow establishment の長さを左右する実験定数で、Albertson⁹⁾ は 2 次元噴流で 2.28、岩崎・千秋¹¹⁾ は 3 次元噴流で 2.20 を与えている。しかし、噴出口の幅および接近流の流速によってそれぞれ異なる値を示すもので、この実験では、開水路急拡部において 1.64 が得られた。また 図-15 には急拡部下流の流れを Mass flux の拡散現象と考え、境界条件として側壁における完全反射を仮定して得られた式 (4-2) の計算結果が示されている。

$$\begin{aligned} \frac{u(x,y)}{u_1} = & \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{y-nB_2 + \frac{B_1}{2}}{2ax} \right) \right. \\ & \left. + \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{B_1}{2} - y + nB_2}{2ax} \right) \right\}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (4-2)$$

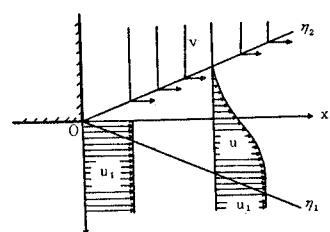
ここに、 x, y : 流下方向および幅方向の座標、 B_1, B_2 : 上下流水路の水路幅、 a : 定数である。

以上の結果を比較することによって、急拡部の流れを拘束された流れの場へ拡散される一つの噴流現象と考える立場がほぼ妥当であると結論されよう。もちろん、この他に流速分布の self-preservation に対する検討も行なわれなければならないが、これについては後節に述べる。

(3) 境界条件の選択に関する検討

急拡部の水理学的性状は、はく離領域の形成と噴流の拡散過程によって代表されるといえる。2 次元理想噴流では、噴流によって連行される流体の補給は 図-16 のように拘束なく行なわれる。ところが本実験の場合には、下流側水路側壁のため幅方向の流れは拘束され、噴流によって連行される流体は逆流によって補給され

図-16 Jet boundary and co-ordinate system



ねばならず、噴流と側壁との間に逆流領域が形成される。

しかしながら、逆流領域内の流速分布は不安定で、これを測定することは非常に困難であるから、実際現象を説明するためには何らかのモデルを作る必要があり、しかも2次元噴流に関する Tollmien の理論から明らかかなように、解を決定する境界条件を与えられた問題の特殊性と関連せしめて十分妥当に選ぶことが、モデル化の基本的要件である。しかしあく離領域内の流速分布の実相は複雑で明らかではなく、実験的事実にもとづく何らかの関係を必要とする。そこで、あく離領域内に一定流速の逆流をもつ新しい領域(以下これを等逆流領域と呼ぶ)を考えた流れモデルを作つてみよう。表-4 は従来の研究に用いられた境界条件と著者らのそれを一括表示したものである。

表-4

	Tollmien	Keuthe	Ashida	Authors
Spreading through infinite rest fluid	Spreading through co-flowing fluid	Spreading through confined counterflowing fluid		
$\eta = \eta_1$	$u = u_1$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $v = 0$	$u = u_i$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $u_1 v_i = -u_2 v_2$	$u = u_1$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $v = 0$	$u = u_1$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $v = 0$
$\eta = \eta_2$	$u = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$u = u_2 = mu_1$ $m = \text{given}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$u = 0$	$u = 0$
$\eta = \eta_3$				$u = u_2 = mu_1, m < 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
Unknown	$d_1, d_2, d_3, \eta_1, \eta_2$	$d_1, d_2, d_3, \eta_1, \eta_2$	$d_1, d_2, d_3, \frac{d_1}{a}, \eta_1, \eta_2$	$d_1, d_2, d_3, m, \eta_1, \eta_2, \eta_3$
Definition sketch	(a)	(b)	(c)	(d)

(4) 流速分布の計算法

表-4 (d) のようなモデルにおける流速分布の計算に当っては 7 つの未知数が含まれているが、境界条件は 6 つである。したがつて残りの条件としては、各断面における運動量保存の関係を用いる必要がある。周知の噴流拡散の式より

$$u = u_1 F'(\eta') \quad (4-3)$$

$$F(\eta') = d_1 e^{-\eta'} + e^{(1/2)\eta'} \left\{ d_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta' + d_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta' \right\} \quad (4-4)$$

$$\eta' = \frac{1}{(2c^2)^{1/3}} (\eta - \eta_1) \quad (4-5)$$

ここに、 u_1 : 噴出口における流速

d_1, d_2, d_3 : 積分定数

c : 混合距離に関する定数

η : y/x

として、表-4 (d) の境界条件は次のように表わされる。

$\eta' = 0$ において

$$\begin{cases} F'(0) = 1 \\ F''(0) = 0 \end{cases} \quad (4-6)$$

$$\begin{cases} F'(0) = 0 \\ F''(0) = 1 \end{cases} \quad (4-7)$$

$$\left\{ \frac{\eta_1}{(2c^2)^{1/3}} F'(0) - F(0) \right\} = 0 \quad (4-8)$$

$$\eta' = \eta_2' = \frac{1}{(2c^2)^{1/3}} (\eta_2 - \eta_1) \quad \text{において}$$

$$F'(\eta_2') = 0 \quad (4-9)$$

$$\eta' = \eta_3' = \frac{1}{(2c^2)^{1/3}} (\eta_3 - \eta_1) \quad \text{において}$$

$$\begin{cases} F'(\eta_3') = m \\ F''(\eta_3') = 0 \end{cases} \quad (4-10)$$

$$\begin{cases} F'(\eta_3') = m \\ F''(\eta_3') = 0 \end{cases} \quad (4-11)$$

したがつて積分定数 d_1, d_2, d_3 および流速比 m はつきのようになる。

$$d_1 = \frac{1}{2} (d_2 - 1) \quad (4-12)$$

$$d_2 = \frac{1 - e^{(3/2)\eta_3'}}{1 - e^{(3/2)\eta_3'}} \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_3' - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_3' \right\} \quad (4-13)$$

$$d_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4-14)$$

$$m = -d_1 e^{-\eta_3'} + \frac{1}{2} e^{(1/2)\eta_3'} \times \left\{ d_2 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_3' - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_3' \right) + d_3 \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_3' + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_3' \right) \right\} \quad (4-15)$$

また η_1, η_2' については、

$$\frac{1}{(2c^2)^{1/3}} \eta_1 = d_1 + d_2 \quad (4-16)$$

$$-d_1 e^{-\eta_2'} + \frac{1}{2} e^{(1/2)\eta_2'} \times \left\{ d_2 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_2' - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_2' \right) + d_3 \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_2' + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_2' \right) \right\} = 0 \quad (4-17)$$

が得られる。

第 7 番目の条件としては運動量保存の関係を用いる。急拡部近傍の流れに直角な任意の断面における運動量は、常流遷移では水深の変化が微小であると仮定して計算し、噴出口の運動量と等しいとおくと、

$$u_1^2 \left(\frac{1}{2} B_1 - y_1 \right) + \int_{y_2}^{y_1} u^2 dy - \int_{y_3}^{y_2} u^2 dy - (4B + y_3) u_2^2 = \frac{1}{2} B_1 u_1^2 \quad (4-18)$$

が得られる。これを変数変換すると、

$$(d_1 + d_2) + \int_0^{\eta_2'} \{F'(\eta')\}^2 d\eta' + \int_{\eta_3'}^{\eta_2'} \{F'(\eta')\}^2 d\eta' + m^2 \left\{ \frac{1}{(2c^2)^{1/3}} \frac{4B}{x} + \eta_3' + (d_1 + d_2) \right\} = 0 \quad (4-19)$$

表-5

m	d ₁	d ₂	d ₃	η _{2'}	η _{3'}	η ₁ /(2c ²) ^{1/3}	
						v ₁ =0	u ₁ v ₁ =u ₂ v ₂
0	-0.0061	0.988	0.577	-3.020	-3.020	0.982	0.982
-0.02	-0.0057	0.990	0.577	-2.865	-3.074	0.984	1.060
-0.04	-0.0044	0.991	0.577	-2.685	-3.126	0.987	1.147
-0.06	-0.0036	0.993	0.577	-2.605	-3.184	0.989	1.235
-0.08	-0.0028	0.994	0.577	-2.550	-3.250	0.992	1.335
-0.10	-0.0021	0.996	0.577	-2.500	-3.324	0.994	1.444
-0.12	-0.0013	0.997	0.577	-2.460	-3.407	0.996	1.556
-0.14	-0.0006	0.999	0.577	-2.430	-3.502	0.998	1.698
-0.16	-0.0001	1.000	0.577	-2.405	-3.612	1.000	1.846
-0.18	-0.0004	1.001	0.577	-2.390	-3.745	1.001	2.015
-0.20	-0.0009	1.002	0.577	-2.375	-3.952	1.003	2.225

となる。x, 4B は与えられ,

d_1, d_2 は η'_3 の関数であるから、式 (4-19) は η_1, η'_2, η'_3 および m の関数となる。したがって式 (4-15), (4-16), (4-17) および (4-19) から $\eta_1, \eta'_2, \eta'_3, m$ を求めるこ

とができる。この連立方程式の計算は非常に繁雑であるが、 $u_2/u_1=m(<0)$ の値は大きく変化をせず、実験によるとせいぜい $0 > m > -0.2$ の範囲であるから、各種の m について η_1, η'_2, η'_3 を容易に計算することができる。表-5 および 図-17 は m の代表値に対する η_1, η'_2, η'_3 を計算したもので、図中 $u_1v_1=u_2v_2$ とあるのは、式 (4-8) の境界条件の代りに、Keuthe¹¹⁾ と同様な条件(表-4 (b) 参照)から η_1 を計算したものである。

c の値はいまだ理論的に決定することが困難で、従来より多くの実験が行なわれ、Förthmann¹²⁾ : 0.0165, 佐藤・細井¹³⁾ : 0.0197, Tollmien : 0.0174, 岩崎・千秋¹⁴⁾ : 0.0129~0.0180 という結果が与えられている。したがって平均値として適当な c を採用すれば、流速分布を必要とする断面の位置 $x/4B$ が与えられると、式 (4-15), (4-16), (4-17) および式 (4-19) を満足する $m, \eta_1/(2c^2)^{1/3}, \eta_2/(2c^2)^{1/3}, \eta_3/(2c^2)^{1/3}$ の値が求められ、流速分布が得られる。図-18 はこれらの計算によって得られた流速分布の一例を示したものである。以上の計算は等逆流領域の仮定と自由乱れ、および流速分布の self-preservation の仮定の下で成り立つものであり、流下距離が大きくなり、逆流をともなっていても等逆流領域自体が存在しない領域では、表-4 (d) に示した境界条件と異なったそれぞの条件のもとで解かなければならぬことは明らかである。

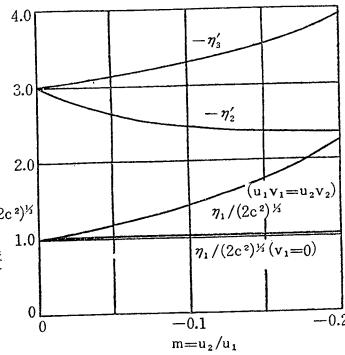
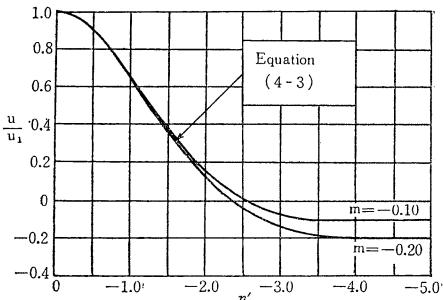
図-17 Boundary of the regions as function of m .

図-18 Velocity distribution obtained through the analysis.



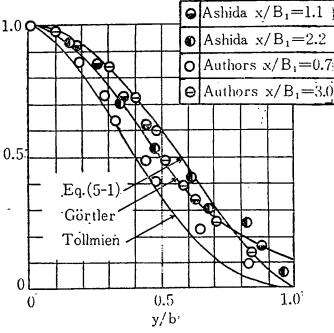
5. はく離領域の性状

(1) 概 説

4.においては表-4 (d) に示したモデルに対し流速分布を計算する一つの方法を示した。しかし前述の方法は繁雑で多量の計算を必要とするばかりでなく、工学的見地から開水路急拡部における水理学的特性を検討する場合、流速分布よりもむしろ、はく離領域の形状・大きさあるいは一様な流速分布に回復するまでの流下距離などが重要な問題となる。また、流速分布の計算には多くの方法がある

図-19 Velocity distribution in the mixing region.

が、図-19 に示したようにいずれの方法も実測による誤差に比較して大差がない。したがってここでは実用上の見地から、はく離領域の形状・長さについて考察する。



いま、流速分布として、Schlichting¹⁵⁾ の式：

$$\frac{u_1 - u}{u_1 - u_2} = f(\eta) = (1 - \eta^{3/2})^2 \quad \dots \dots \dots (5-1)$$

$$\eta = \frac{y - y_3}{y_1 - y_3} = \frac{y - y_3}{b} \quad \dots \dots \dots (5-2)$$

を用いることにする。ここに、 y_1, y_3 は混合距離端部の幅方向座標で、 $y=y_1$ で $u=u_1$, $y=y_3$ で $u=u_2 < 0$ を満足している(表-4 (d) 参照)。したがって $y_1 - y_3 = b$ は混合領域の幅を与える。 b は乱れの特性によって決まるものであるが、自由乱れの場においては、流下方向に対しほぼ直線的に増大するものと考えられ、式 (5-3) のように表わされる。

$$b = \frac{1}{\sigma} x \quad \dots \dots \dots (5-3)$$

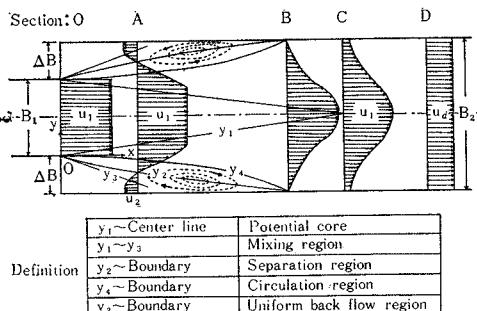
ここに、 x : 流下距離, σ : 定数である。 σ の値が大きいほど混合領域の幅は小となり、 σ は拡散の拘

束の程度を表わす一つの指標となるから、以下これを拘束係数 (confine parameter) と呼ぶことにする。なお式 (5-1) の適用性については、Forsthmann や Albertson の実験によって、非常によい近似であることが明らかにされている。

(2) 流れのモデル化

ここでは表-4(d) に示した流れパターンをさらに詳細に説明し、従来から拡散域・渦動域・逆流域あるいはく離域など個々別々に用いられていた領域区分を統一し、急拡部下流の流れをモデル化した場合の解析的取り扱いの可能性と限界とを検討する。図-20 ははく離領域の長さが Potential core の長さより小さい場合における急拡部下流の流れパターンモデルを示したものであって、水路中心線と y_1 座標との間の速度勾配のない Potential core, y_1 座標と y_3 座標との間の混合領域、流速 0 の点を連ねた線の外側のはく離領域、流れ方向の質量が保存される y_4 座標と水路側壁との間の渦動領域および y_3 座標と水路側壁との間の等逆流領域からなっている。このようなモデルに対する流速分布の計算は、すでに Abramovich¹⁶⁾ によって試みられているが、いまだ不完全である。著者らはこの方法を修正するとともに、実験にもとづいて噴出口近傍のはく離領域の実用的計算法について考察を行なった。なお、はく離領域の長さが Potential core の長さより大きい場合には、中心線流速の低減を考慮した別の条件によるモデル化を必要とすることはいうまでもない。

図-20 Symmetrical flow model assumed in the analysis.



(3) 噴流拡大角

上流側水路から噴出された流れが拡大していく角度は、空気を用いた理想噴流のそれについて従来から多くの実験がなされ、とくに Tollmien は風洞実験によって拡大角 $11^{\circ}10'$ を与えた。しかしながら、開水路急拡部におけるこれまでの実験では、拡大角はこの値より小さく、したがってはく離領域の長さは非常に長くなることが指摘されている。図-20において、断面 0 と断面 A との間における運動量保存と連続の関係は、圧力差を無視すると、それぞれ

$$\frac{1}{2} B_1 u_1^2 = \left(\frac{1}{2} B_1 - y_1 \right) u_1^2 + \int_{y_2}^{y_1} u^2 dy \\ - \int_{y_3}^{y_2} u^2 dy - u_2^2 (A B + y_3) \quad \dots \dots \dots (5-4)$$

$$\frac{1}{2} B_1 u_1 = \left(\frac{1}{2} B_1 - y_1 \right) u_1 + \int_{y_3}^{y_1} u dy + u_2 (A B + y_3) \quad \dots \dots \dots (5-5)$$

となる。つぎに渦動領域内の連続の条件から、

$$\int_{y_2}^{y_4} u dy = - \int_{y_3}^{y_2} u dy - u_2 (A B + y_3) \quad \dots \dots \dots (5-6)$$

が得られる。

これらの式は式 (5-2) によって無次元化され、それぞれつぎのようになる。

$$\frac{y_1}{b} \bar{b} = \bar{b} \int_{y_2}^{y_1} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 d\eta \\ - \bar{b} \int_0^{y_2} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 d\eta - m^2 \left(1 + \frac{y_3}{b} \bar{b} \right) \quad \dots \dots \dots (5-7)$$

$$\frac{y_1}{b} \bar{b} = \bar{b} \int_0^1 \frac{u}{u_1} d\eta + m \left(1 + \frac{y_3}{b} \bar{b} \right) \quad \dots \dots \dots (5-8)$$

$$\bar{b} \int_0^{y_4} \frac{u}{u_1} d\eta = -m \left(1 + \frac{y_3}{b} \bar{b} \right) \quad \dots \dots \dots (5-9)$$

ここに、

$$\frac{u_2}{u_1} = m, \quad (m < 0) \quad \dots \dots \dots (5-10)$$

$$\frac{b}{A B} = \bar{b} \quad \dots \dots \dots (5-11)$$

$$\eta_i = \frac{y_i - y_3}{b}, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots \dots \dots (5-12)$$

式 (5-7) と (5-8) とから \bar{b} を消去すると、

$$\frac{y_1}{b} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 d\eta + m \int_0^1 \frac{u}{u_1} d\eta - 2 \int_0^{y_2} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 d\eta}{1+m}$$

が得られる。流速分布式 (5-1) を用いて上式を積分すると、

$$\frac{y_1}{b} = \frac{1}{1+m} \left\{ 0.416 + 0.718m + 0.766m^2 \right. \\ \left. - 2 \int_0^{y_2} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 d\eta \right\} \quad \dots \dots \dots (5-13)$$

となる。また式 (5-2) より

$$\frac{y_3}{b} = \frac{y_1}{b} - 1 \quad \dots \dots \dots (5-14)$$

である。式 (5-13), (5-14) を式 (5-8) に代入すると \bar{b} は式 (5-15) のようになる。

$$\bar{b} = -m(1+m) / \left\{ 0.134 - 0.302m + 0.598m^2 \right. \\ \left. + 0.766m^3 + 2(1-m) \int_0^{y_2} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 d\eta \right\} \\ = \phi(m, \eta_2) \quad \dots \dots \dots (5-15)$$

また、 $y=y_2$ で $u=0$ であるから、

$$\frac{1}{1-m} = (1-\eta_2^{3/2})^2 \quad \dots \dots \dots (5-16)$$

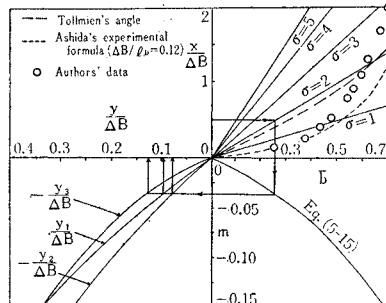
が得られる。式 (5-3), (5-11) および (5-15) から

$$\frac{x}{AB} = -m \sigma(1+m) / \left\{ 0.134 - 0.302m + 0.598m^2 + 0.766m^3 + 2(1-m) \int_0^{\eta_2} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 d\eta \right\} \dots (5-17)$$

が得られる。

σ は実験的に決められており、Albertson⁹⁾: 2.00~2.50, Abramovich¹⁰⁾: 3.33, Tollmien¹⁰⁾: 2.46 を与えている。これはもちろん自由乱れの場合の値であり、開水路急拡部のように側壁の拘束がある場合には、 σ は大きな値となることが予想される。しかし、 σ の値が与えられると、流下方向の任意断面 x/AB における m と η_2 の値が式 (5-16), (5-17) から計算され、式 (5-11), (5-12), (5-13) および式 (5-14) から y_1, y_2, y_3 の座標が求められる。図-21 はこの計算手順を図式化したものであり、実験値もプロットされている。適当な σ を選ぶことによって、流下距離 x/AB における逆流の平均流速 mu_1 が得られ、同時に $y_1/AB, y_2/AB$ および y_3/AB を求めることができる。図-21 の点線は、芦田博士によって得られたはく離領域の形状に関する実験式 (5-18) を示すものである。

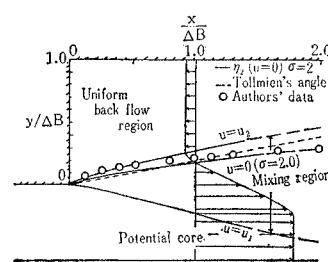
図-21 Relation between $x/AB, \bar{b}, m$ and y/AB .



$$\frac{b-b_1}{b_2-b_1} = \left(\frac{x}{l_D} \right)^n \dots (5-18)$$

ここに、 b : 流下距離 x における通水断面幅、 b_1, b_2 : 上下流水路幅、 l_D : はく離領域の長さ、 n : 実験定数 ($n=0.6$) である。図-21 からつぎのことことが明らかになる。すなわち、実験値を実験式 (5-18) および Tollmien の拡大角と比較すると、噴出口のごく近傍では Tollmien の値より大きく流下距離の増大とともに逆に小さくなっている。これは流下距離の増大とともに側壁による拘束の効果が現われるためと考えられる。したがって流下距離 x が大きくなるにつれて、拘束係数 σ は大きくなる。実験より σ の値は、噴出口

図-22 Boundary of the separation region.



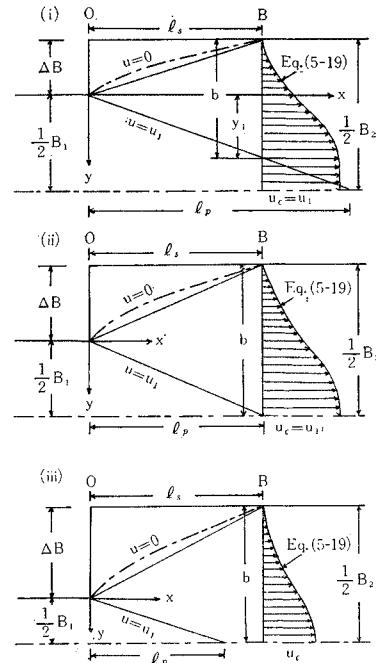
近傍で 0.5, $x/AB=1$ 付近で $\sigma=2.0$ となる。

図-22 は $\sigma=2.0$ とおいて計算された噴出口近傍の流れのはく離を示したものである。

(4) はく離領域の長さ

上に示した計算法は、等逆流領域の仮定が許される噴出口のごく近傍におけるはく離領域に適用されるもので、はく離領域全体の長さを推定することはできない。現在のところ、これは理論的に評価されていないもので、多くの実験より経験的を得られているにすぎない。本節では流下距離が増大するにつれて拘束係数 σ の値が大きくなることから、はく離領域全体について平均化された拘束係数 σ_m を考え、これと以下に示す流れのモデルと用いて、はく離領域の長さについて考察する。急拡部における常流遷移流のパターンは、Potential core の長さ l_p とはく離領域の長さ l_s とによって、(i) $l_p > l_s$, (ii) $l_p = l_s$ および (iii) $l_p < l_s$ の 3 つの形式に分類できる。一般に水路幅拡大比 β_* が小さい拡大部では $l_p > l_s$ と考えられ、 β_* が大きい場合には、これと反対に $l_p < l_s$ と考えられる。図-23 はこれらの関係を示した流れのモデルであり、つぎのような仮定にもとづいている。

図-23 Flow model assumed in the analysis.



- (a) 常流遷移の流れでは水面勾配が小さく、二次元的な取り扱いができる。
- (b) 断面 B における混合領域の幅 b はそれぞれ図に示したようにとする。
- (c) 混合領域内の流速分布は、式 (5-1), (5-2) から $u_1=u_c, u_2=0, y_3=-AB$ とおいてつぎのよ

たことから、「Coanda効果」と呼ばれている。

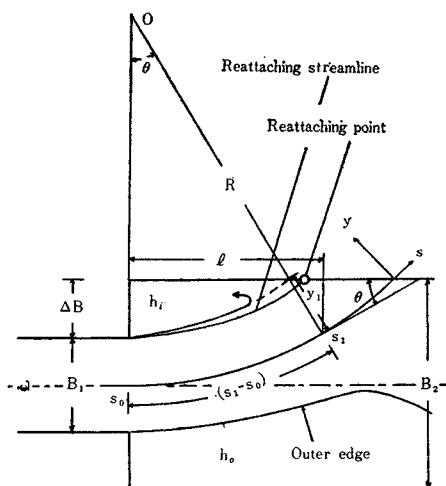
これら2つの主要な原因によって、急拡部における噴流は偏向すると考えられる。しかしながら、これら2つの原因は互いに独立しているわけではなく、逆流補給に関する初期条件の非対称性は第一の原因によって影響を受ける場合が多いと考えられるから、これら2つの原因が有機的に作用して噴流の偏向を支配しているとみてよい。

(2) 流れのモデル化

急拡部における流れの本質的特性は、噴流によるはく離領域からの連行にあるといえる。噴流はわん曲して周囲の流体を連行しつつ下流側水路側壁に衝突して2分され、一部はふたびはく離領域に逆流として返される。

いま、安定状態では連行される流量と逆流として補給される流量とが平均的にバランスしていると考えると、Bourque¹⁸⁾, Dodds¹⁹⁾, Sawyer²⁰⁾などの一連の実験に用いられたものを修正して作った開水路急拡部の流れのモデルが説明される(図-25参照)。

図-25 Asymmetrical flow model assumed in the analysis.



噴流の流速分布は2次元噴流のものと同様であると仮定して、

$$\frac{u_m - u}{u_m} = f(\eta) = (1 - \eta^{3/2})^2 \quad \dots \dots \dots (6-1)$$

ただし

$$\eta = \frac{b - y}{b} \quad \dots \dots \dots (6-2)$$

とし、混合領域の幅 b は式(5-3)と同様に拘束係数 σ を用いて、

$$b = \frac{1}{\sigma} s \quad \dots \dots \dots (6-3)$$

として与えられるとする。ここに、 u_m : 噴流中心線上における流速、 b : 混合領域の幅、 s : 噴流中心線に沿ってとる流れ方向の座標である。

ただし、下流水路側壁の拘束効果のため、 σ は自由乱れの場に対して与えられる値よりも大きい値をとるべきであり、また噴流がわん曲する場合、混合領域の外縁と内縁では、異なった σ の値を示すことを注意しなければならない。すなわち、噴流の内縁では流れのわん曲による遠心力のため、乱れによる混合が抑制されて σ は大きく、外縁では逆に小さくなると考えられる。しかしながら、実際にはこの評価が困難であるから、解析にあたっては簡単のため、これを等しいとして一つの実験定数と考えて取り扱わざるを得ない。

つぎに単位水深当たりの噴流の運動量を M 、流量を Q とすると、これらは式(6-1)、(6-2)および(6-3)を用いてつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^b \rho u^2 dy = 2b \rho u_m^2 \int_0^1 \{1 - (1 - \eta^{3/2})^2\}^2 d\eta \\ &= 2c_1 \rho u_m^2 \frac{s}{\sigma} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6-4)$$

ただし、

$$c_1 = \int_0^1 \{1 - (1 - \eta^{3/2})^2\}^2 d\eta = \text{const} \quad \dots \dots \dots (6-5)$$

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_0^b u dy = 2bu_m \int_0^1 \{1 - (1 - \eta^{3/2})^2\} d\eta \\ &= 2c_2 u_m \frac{s}{\sigma} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6-6)$$

ただし、

$$c_2 = \int_0^1 \{1 - (1 - \eta^{3/2})^2\} d\eta = \text{const} \quad \dots \dots \dots (6-7)$$

したがって、

$$u_m = \sqrt{\frac{1}{2c_1} \frac{M\sigma}{\rho s}}, \quad Q = \sqrt{\frac{2c_2}{c_1} \frac{Ms}{\sigma\rho}} \quad \dots \dots \dots (6-8)$$

図-25において、はく離領域内の水深を一定と仮定して h_i および h_0 とすると、噴流を横切って働く圧力差 ΔP は、

$$\Delta P = \rho g(h_0 - h_i) \quad \dots \dots \dots (6-9)$$

であり、また噴流に作用する圧力差と噴流のわん曲による遠心力とのつりあいの関係は、

$$\Delta P = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho u^2}{r} dr \quad \dots \dots \dots (6-10)$$

として与えられる。ここに、 r : 噴流の任意点における回転半径、 R_1 、 R_2 : それぞれ噴流内縁と外縁における回転半径である。 R_1 、 R_2 は s の関数であり、 u は s と r との関数であるから、式(6-10)を積分することは困難である。したがって、噴流中心線を半径 R の円弧と仮定して、つりあいの関係をつぎのように近似する。

$$\Delta P = \rho g(h_0 - h_i) = \frac{M}{R} \quad \dots \dots \dots (6-11)$$

この関係は噴流の幅 B_1 が R に比較して小さい場合、すなわち水路幅拡大比 β_* が大きい場合ほど良い近似を与える。

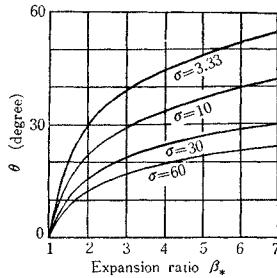
となる。ここに、 Q_0, Q_1 はそれぞれ s_0, s_1 断面における流下方向の流量である。

式(6-26)と式(6-27)とは等しい値となるはずであるから、式(6-19)を用いて結局つぎのようになる。

$$T_1 = c_2 \left\{ 1 - 2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots \text{(6-28)}$$

このようにして得られた式(6-28)を式(6-20), (6-21)および式(6-22)に代入すると、水路幅拡大比と衝突角との関係、水路幅拡大比とはく離領域の長さとの関係を求めることができる。図-27 は式(6-20)と式(6-28)によって得られた β_* と θ の関係を示したもので、拘束係数 σ の値を与えると、衝突角 θ を求めることができる。

図-27 Relation between θ and β_* .



(4) 実験結果とその考察

実験は拡大比 $\beta_* = 2$ の急拡部に対して行なった。はく離領域の形状はピトー管による流速測定と写真撮影によって測定された。この場合、tracerとしては、キシリレン、四鉛化炭素、酸化鉛、アルコールおよびアルミニウムの混合液を用いたが写真-1はその一例を示すものである。

図-28 はピトー管によって測定した混合領域内の流速分布の一例であるが、 $x = 10 \text{ cm}$ における値は Zone of flow establishment 内における流速分布を代表するものである。

$x = 45 \text{ cm}$ における値は Potential core の消滅した断面の流速分布を代表し、図-25 の s_1 断面の流速分布にほぼ対応するものである。これらの結果から、Reattaching するまでの流速分布の Self-preservation と 2 次元噴流の流速分布に対する式(6-1)の近似の程度とが明らかとなり、前に述べた仮定がほぼ妥当であるといい得るわけである。

写真-1

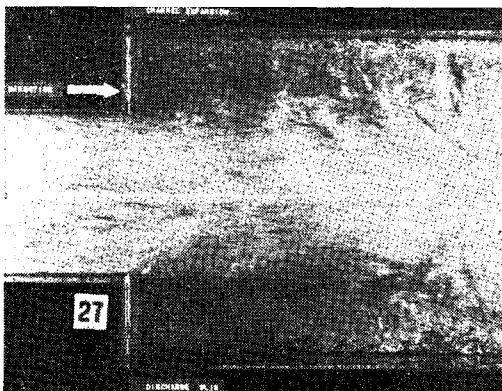


図-28 Velocity distribution in the mixing region.

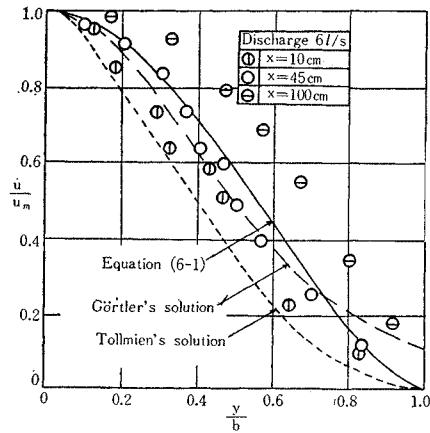
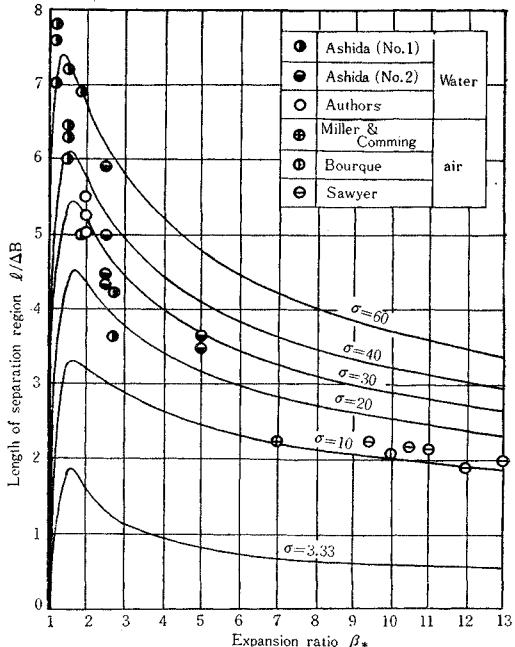


図-28 Relation between $I/\Delta B$ and β_* .



$x = 100 \text{ cm}$ における値は Reattaching 後の流速分布を代表するもので、下水流路側壁による運動量の反射のため、式(6-1)からかなりずれている。

図-29 に示す実線は、式(6-20), (6-21)および式(6-28)から得られた理論曲線を σ をパラメーターとして図示したもので、同時に従来の実験結果がプロットされている。わん曲した噴流では、その内縁の σ の値が 2 次元理想噴流の場合の $\sigma = 2 \sim 3$ にくらべて大きい値を示しており、噴流の拡散が大きく制約されていることがわかる。これは側壁の噴流拡散の拘束効果に加えて、噴流わん曲の遠心力による抑制効果があるためと考えられる。 β_* が無限大のとき、 σ は $2 \sim 3$ の値となるはずであるが、図-29 では $\beta_* = 7 \sim 13$ の範囲でほぼ 10 と評価される。 β_* が大きい急拡部では側壁による拘束は非常

に小さく、わん曲による抑制効果が卓越していると考えられるから、わん曲による抑制効果はほぼ $\sigma = 10$ とみでよい。 β_* が小さくなると、この抑制効果に側壁による拘束効果が加わって σ は急激に増大する。しかしながら、 σ の急激な増大はたんに上に述べた拘束効果のみに起因するものではなく、 β_* が小になればなるほど、式(6-11)に示した近似が実際現象と離れていくことにも関係があると思われる。すなわち、 β_* が小さい場合には、Reattaching するときの流速分布は Zone of flow establishment の領域にあるから、さきに述べたような取り扱いは不可能となる。したがって β_* が小さい場合には、図-26 の流速分布を Potential core を含んだ形にするとともに、他の条件も変える必要がある。しかしながら、拘束係数 σ を一つの実験定数と考えて上のような取り扱いを行なうことも、実用的な立場から有用な一つの方法であると考えられる。

7. 結 言

本研究では、水路急変部における遷移流の水理学的特性を明らかにするための第一歩として、水路幅が急激に拡大する開水路の遷移現象について、とくに遷移の分類、遷移水面形状およびエネルギー損失を一次元解析によって明らかにするとともに、常流遷移について噴流理論を応用し、急拡部近傍の流速分布およびはく離領域の長さを理論的に考察し、実験的に検討を加えた。その結果明らかにされた事実はつぎのとおりである。

(i) 開水路急拡部における遷移現象については、流量と勾配との関係によって 9 種類のものが考えられ、下流下位によって常流遷移 (Submerged transition), 射流遷移 (Shooting transition) より両者の遷移領域における限界流に近い不安定な遷移 (Unstable transition) とに分類され、それぞれの限界は水路幅拡大比 β_* と下流の Froude 数 Fr_2 が式(3-10) および式(3-11) を満足する場合となる。

(ii) 急拡部の形状損失係数 σ は Fr_2 と β_* によって変化し、常流遷移では Fr_2 の増加とともに急激に増大し、射流遷移では逆に減少するが、同一の Fr_2 に対しては、 β_* の増加とともに急激に増大することが明らかとなった。

(iii) 急拡部近傍における従来の流速分布の計算法は逆流の影響を無視したものが多く、実際の現象を説明するのに不十分であった。本研究では、はく離領域内に平均化した等逆流領域を考えることにより、逆流の影響を考慮した場合の流速分布計算の可能性が明らかにされた。

(iv) 噴流拡散に対する下流水路側壁による拘束効果を表わす指標として mean confine parameter σ_m を導入し、さらに混合領域内における流速分布を仮定すること

によって、はく離領域の長さに関する一つの計算法が得られた。実験の結果、 σ_m の値は理想噴流の場合 2~3 であるが、流下距離の増大とともに側壁による拘束効果が大きくなり、平均して 4~6 であることが明らかにされた。

(v) 前項は急拡部下流の両側に形成されるはく離領域を平均化して対称な噴流拡散を対象としたものであるが、実際の水流ではそのほとんどが非対称のはく離領域を形成する。著者らはこれを下流水路側壁に流れが引き寄せられる、いわゆる Coanda effect によるものと考え、噴流のわん曲による遠心力の噴流拡散に対する抑制効果と逆流補給に関する側壁の拘束効果とを、実験定数である拘束係数 σ の増加によって説明した。実験の結果、拡大比 β_* が比較的大きく 7 以上の範囲では $\sigma = 10$ 、拡大比が小さい範囲では $\sigma = 30 \sim 60$ であると評価された。

以上のような考察および実験をすすめた結果、一次元的運動量解析と噴流理論とを適用することによって、急拡部における遷移流の水理学的特性の概略が説明できたと考えられる。しかしながら、本研究は急拡部遷移流のもつ水理学的特性に関する研究の第一歩であり、3 次元的な水理現象の考慮、拡大比 β_* が小さい場合の噴流拡散や Reattaching の特性および Reattaching した後の流れの水理学的特性の解明など、今後さらに理論的実験的検討を加えて水理構造物における急変部設計に合理的な指針を得るよう努力すべきであると考えている。

最後に、本研究を遂行するにあたり終始有益な助言をいただいた岩佐義朗教授ならびに協力をいたいた大学院学生河合恂二君（現、水資源開発公団）に厚く感謝する次第である。

参 考 文 献

- Hunter Rouse, B.V. Bhoota and En-Yun Hsu : Design of channel expansions, Trans. ASCE, Vol. 116, 1951.
- F. Engelund and J. Munch-Pertersen : Ecoulement permanent dans les canaux convergents et divergents, La Houille Blanche, Aout, 1953.
- G. Formica : Esperienze preliminari sulle perdite di carico nei canali, dovute a cambiamenti di sezione, L'Energia Elettrica, Vol. 32, 1955.
- 芦田和男：河川改修に伴なう断面急変部の水理とその適用に関する研究、学位論文、昭和 36 年 7 月
- 芦田和男・宮井 宏：断面変化部における河床変動に関する研究（II），断面急拡部の砂堆の運動、京都大学防災研究所年報、第 7 号、昭和 38 年
- H. Tults : Flow expansion and pressure recovery in fluids, Proc. ASCE, Vol. 80, 1954.
- 松下 玄：開水路常流の流れ、農業土木研究、第 25 卷、昭和 32 年 8 月
- C. Jeager : Engineering Fluid Mechanics, Blackie & Sons, London, 1956.
- M.L. Albertson, Y.B. Dai, R.A. Jensen and H. Rouse : Diffusion of submerged jets, Trans. ASCE, Vol. 115, 1948.
- W. Tollmien : Berechnung turbulenter Ausbreitungs vorgänge, ZAMM, Vol. 6, 1926.

- 11) A. Keuthe : Investigations of the turbulent mixing region formed by jets, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 2, 1935
- 12) E. Föthmann : Über turbulente Strahlausbreitung, Ing.-Arch, 5, 42, 1934.
- 13) 佐藤清一・細井正延 : 噴流に関する研究1, 土木研究所報告, 81号, 昭和26年
- 14) 岩崎敏夫・千秋信一 : 静水中に落下する噴流の実験, 土木学会誌, 38巻8号, 昭和28年
- 15) H. Schlichting : Über das ebene Windschattenproblem, Ing.-Arch, 5, 533, 1930.
- 16) G.N. Abramovich : The theory of turbulent jets, The MIT Press Cambridge Massachusetts, 1963.
- 17) B.G. Newman : The deflection of plane jets by adjacent boundaries-Coanda effect, Boundary layer and flow control, London Pergamon Press, 1963.
- 18) C. Bourque and B.G. Newman : Reattachment of a two-dimensional incompressible jet to an adjacent flat plate, Aero, Quart, 1960.
- 19) J.I. Dodds : Ph. D. Thesis, Cambridge University, 1960.
- 20) R.A. Sawyer : The flow due to a two-dimensional jet issuing parallel to a flat plate, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1960.
- 21) H. Görtler : Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, ZAMM, 22, 5, 1942.

(1965.9.13・受付)