

疲労破壊機構のモデル化について*

ON THE MODEL ANALYSIS OF FATIGUE FRACTURE

奥村 敏 恵**・堀川 浩 甫***

By Toshie Okumura and Kohsuke Horikawa

1. はじめに

最近、合金元素の添加や焼入れ焼戻しによる調質などの処理によって、抗張力の大きい高張力鋼がつくられている。これらは引張強度が高いばかりでなくいわゆる降伏比も大きいので、降伏点を基準として設計応力を考える慣用設計法のもとでは、大変有利な構造材料として長大橋などにさかんに使用される傾向にある。しかしながら鉄道橋のように大きな変動荷重を受ける構造物においては構造材料の疲労を考慮しなければならないが、高張力鋼の疲労強度は引張強度や降伏点が上昇している割合にくらべると向上されていないことが指摘されており、高張力鋼の利用上の大きな問題の一つとなっているが、高張力鋼の疲労性状の本質を捉えた研究はまだ少ない。

近年、構造材料のもつ強度を十分に利用して合理的な設計を行なおうとする極限設計の思想から、鋼構造においては部材が降伏した後の耐力を考えた、いわゆる塑性設計法が体系づけられつつある。塑性設計においては降伏点を越え、塑性変形を伴う変動応力を受ける場合が考えられ、漸増塑性変形 (incremental plasticity)、交番塑性変形 (alternative plasticity) とともに、いわゆる低サイクル高応力疲労を考察しなければならないが、これらについての研究はまだ日も浅く、解明されていない点が多い。

ところで疲労に関する研究の歴史を振り返ってみると、たとえば横堀武夫の“材料強度学”¹⁾ などによってその概要を知ることができるように、疲労に関する研究は古くから数多くなされており、これらは大別してつぎの三つのグループに分けて考えることができる。

まず第一のグループに属する研究は、実際の構造物やその部材、これらの模型、あるいはもっと単純にした試験片についてくり返し荷重の負荷試験を行なって、試験材に生じた応力またはひずみの振幅の大きさと、破壊までに必要なくなり負荷の回数との関係を求めるタイプのもので、疲労限 (または 2×10^6 あるいは 1×10^7 回強

度) を求めるか、S-N 曲線の形に整理して、試験材の形状や負荷荷重の性質、雰囲気の性質が疲労限にどのような影響を与えているかを研究するものである。このグループの研究は数多くなされているが、その結果はその実験に用いた材料、実験装置などその研究に固有な要素によって左右されるところが多く、定性的には捉えることができても異なる材料や異なる形状の構造に定量的に適用することはむずかしく、結局、構造の材料や形状が異なるたびに実験がなされているようである。

第二のグループの研究は、顕微鏡 (電子顕微鏡) や X 線 (透過, 回折) の利用などによって初期き裂の発生する時期や場所、その成長速度を調べたり、疲労にともなう金属の性質のさまざまな変化と、これらの因果関係を考察している。これらの研究によって、疲労もまた他の破壊現象と同じくミクロ的には結晶転位論によって説明されるべき確率過程として表わされる現象であることなど、疲労の本質についての多くの基本的な事項が明らかにされており、観測技術の進歩によってさらに発展することが期待される。

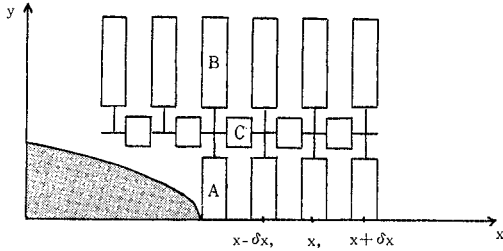
第三のグループの研究は上述の 2 グループの研究によって知られた現象を理論的に説明しようとするものである。このグループには疲労の理論の古典ともいえるべき Orowan の著名な理論があり²⁾、加工硬化とその飽和、疲労限の存在などの事象をよく説明している。現今の疲労の理論の主流としては、結晶粒内に生ずる応力の確率分布と結晶粒内の結合力の頻度分布から各サイクルに破壊の生ずる確率を計算し、これから疲労き裂の成長速度を求めたり、核生成速度から応力振幅と平均くり返し負荷回数との間の関係を導いたり、あるいは結晶転位論的考察によって疲労の機構を説明しようとする試みも数多くなされている³⁾。これらの方向は疲労の本質を知るための正攻法ではあるが、工学的実用との間にはまだ大きな隔りがある。Head は (1) き裂の先端には応力集中により塑性領域が生ずる、(2) くり返し負荷により加工硬化する、(3) 加工硬化による流動応力が破断応力を越えるときき裂が進行する、と考え図-1 のごときモデルについてき裂の成長速度を導いているが³⁾、この速度は実験結果と性質は一致するが、大きさが実験値の $10^{2\sim3}$ 倍となっている。

* 要旨は土木学会第 20 回年次学術講演会で報告

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 工修 東京大学大学院 土木工学専門課程 博士課程

図-1 Head のモデル



- A: 長さ a , 幅 δx の引張要素で, 降伏後 B まで直線的に加工硬化し, ついには破断する。
- B: 長さ d , 幅 δx の弾性的な引張要素で, A 要素が降伏すれば, その荷重を分担する。
- C: $G = \frac{1}{2}E$, 長さ $\frac{1}{2}a$, 幅 δx のせん断要素で, A 要素が降伏するとつぎの A 要素に応力を伝える。

構造物を設計, 製作する工学の分野からの疲労に関する研究は, もっぱら第一のグループ, すなわち設計に直接必要なデータを実験によって集めることにあったようで, このため高張力鋼の合理的な利用のためには, 新たに経験(実験データ)を蓄積することが必要になっている。

著者たちは, 高張力鋼の疲労とか低サイクル高応力疲労といった疲労についての新しい問題を含めて疲労の問題を統一的に検討するにあたり, 実際に構造物を設計, 製作することの結び付きを考えて, 疲労の問題を連続体の力学の立場からマクロ的に眺め, 工学的実験によって捉えることができる, 降伏, 加工硬化などをそれぞれ一つのまとまった概念と考え, これらの組み合わせられた事象として疲労の機構をモデル化し, このモデルについて考察を行なっている。

2. モデルの提案

疲労における微小きれつの発生機構をつぎのように分解して考える(図-2)。

- (1) 材料には疲労の原因となる微小欠陥が存在する。
- (2) きれつまたは微小欠陥(以下ではあわせてきれつという)の先端には応力集中がある。
- (3) くり返し負荷荷重の振幅があるレベルより大きければ, 応力集中箇所材料は降伏し, 塑性流動を生ずる。
- (3') くり返し負荷荷重の振幅がこのレベルに達しなければ塑性流動は生ぜず, 疲労の現象はない。
- (4) 塑性流動により材料は硬化する。
- (5) 負荷荷重があるレベルを越えないとき, くり返し負荷により材料の硬化はすすむ。
- (5') くり返し負荷荷重の振幅がこのレベルを越えるときは, くり返し負荷によって材料が硬化されなくとも微小きれつ発生条件は満たされ, きれつは伝播して破壊にいたる。

(6) くり返し負荷荷重の振幅があるレベルより大きければ, 加工硬化により, 一定のくり返し負荷回数のおち, 微小きれつ発生条件に達し, きれつは成長する。

(6') くり返し負荷荷重の振幅がこのレベルに達しなければ, 微小きれつ発生条件に達する前に加工硬化が飽和し, きれつは成長しない。

(7) 微小きれつが発生し, きれつが成長すれば(2)に戻る。

(8) きれつの成長によって断面が減少し, (5')の状態になるまで(2)~(7)のループをくり返す。

(2)~(7)のループの一つのサイクルには何回ものくり返し負荷の回数を含んでおり, (5')の状態になるまでのくり返し回数の総和が疲労の寿命となる。

以上のモデルの各事象を数式で表わそう。材料は均質で十分薄く平面応力状態と考えてよい板で, その内部または側縁に切欠のある場合も考え, 微小欠陥は切欠の先端または母材の側縁にあるものを考慮するものとし, 負荷荷重は偏心する場合も含む縦方向引張荷重とする(図-3)。

加工硬化については, a) 加工硬化域での勾配 E' が增加する, b) 降伏点が増加する, c) これらの混じったもの, と考えられる(図-4)。どちらの場合にも加工硬化はくり返し負荷の回数とともにある値に漸近して, つ

図-2 モデルのフローチャート

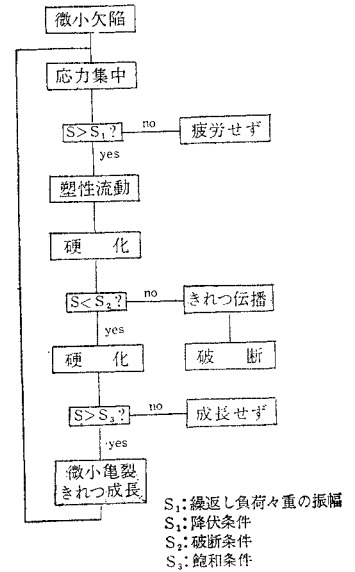


図-3 考察の対象とする材料

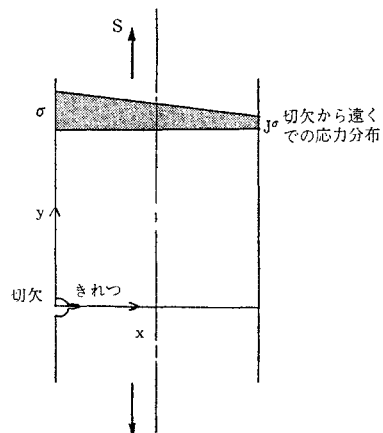
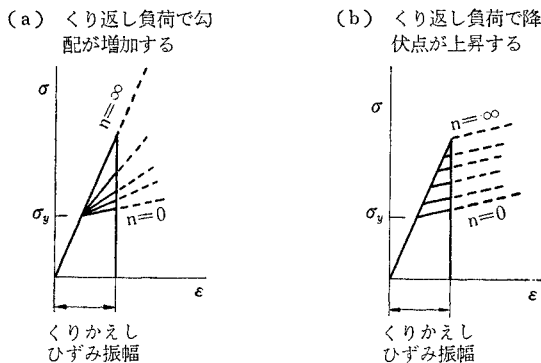


図-4 加工硬化モデル



いは飽和してしまうから、これを指数関数型の
 $(1 - e^{-\beta n^\alpha})$

の形で表わすことにする。a) の勾配の変化を考える場合、加工硬化が飽和したときにはヤング率 E に達すると考えて、

$$E_n = E_0 + (E - E_0)(1 - e^{-\beta n^\alpha \epsilon_p})$$

とすると応力は、

$$\begin{aligned} \sigma &= E_n \epsilon_p + \sigma_y \\ &= \{E_0 + (E - E_0)(1 - e^{-\beta n^\alpha \epsilon_p})\} \epsilon_p + \sigma_y \end{aligned}$$

ここに E_0 はくり返し負荷による加工硬化を受けるまえの勾配である。b) の降伏点の上昇を考えると、

$$\Delta \sigma_y = r(1 - e^{-\beta' n^\alpha}) \epsilon_p$$

降伏点の上昇 $\Delta \sigma_y$ による塑性ひずみの減少 $\Delta \epsilon_p = \Delta \sigma_y / E$ を考慮して、応力は、

$$\begin{aligned} \sigma &= E_0(\epsilon_p - \Delta \epsilon_p) + \sigma_y + \Delta \sigma_y \\ &= E_0 \epsilon_p + \Delta \sigma_y - E_0 \frac{\Delta \sigma_y}{E} + \sigma_y \\ &= \left\{ E_0 + r(1 - e^{-\beta' n^\alpha}) \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \right\} \epsilon_p + \sigma_y \end{aligned}$$

ここで $r = E$, $\beta' = \beta E$ とおくと前の式と一致するから、以下では加工硬化による応力を、

$$\sigma = \{E_0 + (E - E_0)(1 - e^{-\beta n^\alpha \epsilon_p})\} \epsilon_p + \sigma_y \quad \dots (1)$$

みかけの勾配を、

$$E_n = E_0 + (E - E_0)(1 - e^{-\beta n^\alpha \epsilon_p}) \quad \dots (1a)$$

として取り扱う。

くり返し負荷を受け、その一部の領域では降伏点を越え加工硬化しつつある材料内のひずみおよび応力の分布を求めると、これを場所によって係数の異なる直交異方性板として解かねばならない。その基本方程式は応力関数を用いると、

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} a_{11} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} a_{21} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ + \left(2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} a_{21} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_{22} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ + \frac{\partial^2}{\partial xy} a_{66} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 1 \end{aligned}$$

ここに係数 $a_{11} \sim a_{66}$ は $(1 - e^{-\beta n^\alpha \epsilon_p})$, すなわち ϵ_p に依存しており、結局 x, y の関数であるから、解析的に解くことはできない。しかしきれつのディメンジョン (たとえば曲率半径 r) は材料のディメンジョン (たとえば全幅 B) にくらべて十分小さいから、きれつ先端の近くでは、ひずみおよび応力の分布を級数展開により表わすことができる。

ここで問題とする x 軸上で y 方向のひずみ $\epsilon(x)$ を

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \epsilon_0(x) \left\{ a_0 + a_1 \left(\frac{r}{x-z} \right)^2 + a_2 \left(\frac{r}{x-z} \right)^4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + b_1 \left(\frac{x-z}{r} \right)^2 + b_2 \left(\frac{x-z}{r} \right)^4 + \dots \right\} \\ &= \epsilon_0(x) \cdot \alpha(x) \end{aligned}$$

とする。ここに $\epsilon_0(x)$ はきれつを考えないときのひずみ分布、 r はきれつ先端の曲率半径、 z は曲率の中心の座標である。 $\epsilon_0(x)$ は材料に切欠があって応力集中をなし、また負荷荷重が偏心していて応力に勾配がある場合も考慮すると、同様に、

$$\begin{aligned} \epsilon_0(x) &= \bar{\epsilon}(1-ix) \left\{ A_0 + A_1 \left(\frac{R}{x-Z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + A_2 \left(\frac{R}{x-Z} \right)^4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + B_1 \left(\frac{x-Z}{R} \right)^2 + B_2 \left(\frac{x-Z}{R} \right)^4 + \dots \right\} \\ &= \bar{\epsilon} \cdot (1-ix) \bar{\alpha}(x) \end{aligned}$$

ここに $\bar{\epsilon}$ はひずみの大きさの絶対量を表わす値で、外力 S_0 とのつりあいから、

$$S_0 = \int_A^B \sigma(x) dx$$

を満たすように決められる。また i は負荷荷重の偏心による勾配で R と Z はそれぞれ切欠先端の曲率半径とその中心である。結局ひずみの分布は、

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \epsilon_0(x) \alpha(x) \\ &= \bar{\epsilon}(1-ix) \bar{\alpha}(x) \alpha(x) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

で表わされる。

応力分布はさておき、ひずみの分布は弾性域でのひずみの分布をそのまま拡張したものと考えてよく、これを

$$\alpha(x) \doteq 1 + k \frac{r^2}{(x-z)^2} \quad \bar{\alpha}(x) \doteq 1 + K \frac{R^2}{(x-Z)^2}$$

で近似すると、

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \bar{\epsilon}(1-ix) \left\{ 1 + K \frac{R^2}{(x-Z)^2} \right\} \left\{ 1 + k \frac{r^2}{(x-z)^2} \right\} \\ &\quad \dots (2a) \end{aligned}$$

微小きれつ発生の条件としては、周囲を拘束された中でただ一点だけが破壊応力 σ_F に達しても破壊が生ずるとは考えがたいこと、一般に破面は平滑でなく、破壊が不連続に伝播していることから、きれつ先端 A (座標 $x=a$) から A_1 点 (座標 $x=a_1$) まで長さ δ にわたって応力 σ が σ_F を越えたら、長さ δ の微小きれつが生じ、それだけきれつは成長すると考える。

ここに破壊応力 σ_F はいわゆる引張破断強度 σ_B とは

異なった、たとえば真破断応力とでも対比されるような材料に固有な特性値で、平滑材の軸方向の静的引張り ($n=0$ で破断すると考える) の条件からつぎのように決められる。式 (1) から、

$$\sigma_F \leq \{E_0 + (E - E_0)(1 - e^{-\beta n^\alpha \varepsilon_p(a_1)})\} \varepsilon_p(a_1) + \sigma_y$$

$n=0$ において、

$$\begin{aligned} \sigma_F &\leq E_0 \varepsilon_p(a_1) + \sigma_y \\ &= E_0 \{\varepsilon(a_1) - \varepsilon_y\} + \sigma_y \\ &= E_0 \{\varepsilon_0(a_1) \alpha(a_1) - \varepsilon_y\} + \sigma_y \end{aligned}$$

静的破断のとき ε_0 は塑性領域にあり、きれつを考えないときには ε_0 は一定であるから、

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{E_0} + \varepsilon_y$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_F &\leq E_0 \left\{ \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_y}{E_0} + \varepsilon_y \right) \alpha(a_1) - \varepsilon_y \right\} + \sigma_y \\ &= \alpha(a_1) \sigma_0 - (\alpha(a_1) - 1) \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \sigma_y \\ \therefore \sigma_F &= \alpha(a_1) \sigma_B - (\alpha(a_1) - 1) \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \sigma_y \quad \dots (3) \end{aligned}$$

微小きれつ発生に必要なくり返し負荷の回数は、

$$\begin{aligned} \sigma_F &= \sigma(a_1) \\ &= \{E_0 + (E - E_0)(1 - e^{-\beta n^\alpha \varepsilon_p(a_1)})\} \varepsilon_p(a_1) + \sigma_y \end{aligned}$$

を解いて、

$$\beta n^\alpha = -\frac{1}{\varepsilon_p(a_1)} \ln \left\{ 1 - \frac{\sigma_F - \sigma_y - E_0}{\varepsilon_p(a_1) E - E_0} \right\} \quad \dots (4)$$

ここに $\varepsilon_p(a_1)$ は式 (2) より、

$$\varepsilon_p(a_1) = \bar{\varepsilon} (1 - i a_1) \bar{\alpha}(a_1) \alpha(a_1)$$

で、 $\bar{\varepsilon}$ は未知数であるから、

$$S_0 = \int_A^B \sigma(x) dx$$

と連立させて解かねばならない。

これをつぎのような手順によって数値計算を行なう。

まず式 (2a) から、

$$\varepsilon(x) = \bar{\varepsilon} (1 - ix) \left\{ 1 + K \left(\frac{R}{x - Z} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + k \left(\frac{r}{x - z} \right)^2 \right\}$$

とし、応力は式 (1) から、

$$\sigma(x) = \begin{cases} E \varepsilon(x) & (\sigma(x) \leq \sigma_y) \\ \{E_0 + (E - E_0)(1 - e^{-\beta n^\alpha \varepsilon_p})\} \varepsilon_p + \sigma_y & (\sigma(x) > \sigma_y) \end{cases}$$

とする。

(1) $\bar{\varepsilon}$ の第一近似を、切欠から十分はなれたところでの応力から、

$$\bar{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{\sigma(x)}{1 - ix} \cdot \frac{1}{E} & (\sigma(x) \leq \sigma_y) \\ \left(\frac{\sigma(x)}{1 - ix} - \sigma_y \right) \frac{1}{E_0} + \varepsilon_y & (\sigma(x) > \sigma_y) \end{cases}$$

(2) この $\bar{\varepsilon}$ を用いて式 (4) から、

$$\beta n^\alpha = \frac{1}{\varepsilon_p(a_1)} \ln \left\{ 1 - \frac{\sigma_F - \sigma_y - E_0}{\varepsilon_p(a_1) E - E_0} \right\}$$

を求め、

(3) この βn^α を用いて、数値積分により、

$$S = \int_a^b \sigma(x) dx$$

を計算し、負荷荷重 S_0 とくらべて差があれば、

$$\bar{\varepsilon} \times S_0 / S \rightarrow \bar{\varepsilon}$$

と修正して収れんするまでくり返す。

以上により微小きれつの1個の発生、すなわちきれつの一回の成長に要するくり返し負荷の回数 n が求められるからきれつが全断面に広がるまでくり返し n を求めれば、その総和として疲労の寿命 N が得られるが、成長の回数は 10^3 以上と考えられ、ぼう大な計算量となる。後の計算例によると、きれつの長さ x と、微小きれつの発生に用する負荷の回数の対数 $\log n$ との間の関係が折線で近似できるから、全断面を適当な区間 (たとえば、100 区間) に分割すると、区間 $x_i \sim x_{i+1}$ の間のくり返し数 n は、

$$\log n = \log n_i - \frac{\log n_{i+1} - \log n_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

で近似される。

$$\ln n = \ln n_i - \frac{\ln n_{i+1} - \ln n_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

において $\ln n = a - bx$ とおくと、

$$n = e^{a - bx}$$

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} n dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{a - bx} dx \\ &= \int_{a - bx_{i+1}}^{a - bx_i} e^t \left(-\frac{dt}{b} \right) = -\frac{1}{b} [e^t]_{a - bx_{i+1}}^{a - bx_i} \\ &= \frac{1}{b} \{ e^{a - bx_i} - e^{a - bx_{i+1}} \}, \end{aligned}$$

$$e^{a - bx_i} = n_i, \quad e^{a - bx_{i+1}} = n_{i+1}$$

$$b = \frac{\ln n_i - \ln n_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\log n_i - \log n_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{1}{\log e}$$

であるから、

$$\Delta N_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{\log n_i - \log n_{i+1}} \cdot \log e \cdot (n_i - n_{i+1})$$

これを加え合わせれば疲労の寿命 N が求められる。

3. 数値計算例

以上のモデルについて行なった数値計算の結果のいくつかを 図-5~図-8 に示す。設定したパラメーターの値は表-1 に示してある。図-5(a)~(c) は、それぞれ初期きれつ発生の際の、ひずみ、ひずみ硬化による勾配および応力の分布の一例 (case 1, $\sigma_0 = 80\% \sigma_B$) である。図-6 は初期きれつ発生に要するくり返し回数についての S-N 曲線である。図-7 はきれつの進展にともなう、微小きれつの発生 (きれつの成長) に要するくり返し回数、すなわちきれつの成長速度の逆数の変化を示したものである。図-8 は 図-7 のごとき曲線群と両軸で囲まれる面積を積分することによって求めた、材料の破断するまでのくり返し回数についての S-N 曲線である。これらのほかにも数多くの計算を行なっているが、

表-1 パラメーターの設定 (図-3 参照)

case	降伏比 σ_y/σ_B	初期ひずみ硬化 E_0	微小きれつ長さ δ	幅 b	初期きれつ			切 欠			応力勾配を表す係数 J
					形状係数 α	曲率半径 r	曲率中心 z	形状係数 α'	曲率半径 R'	曲率中心 Z'	
1	0.60	2.1×10^3	0.1	100	3	1	-1	-	-	-	1
2	0.80	"	0.1	100	3	1	-1	-	-	-	1
3	0.60	"	0.1	100	3	1	-1	3	10	-10	1
4	0.80	"	0.1	100	3	1	-1	3	10	-10	1

長さは相対寸法

表-2 疲労限の比較

鋼種	引張強度 σ_B (kg/mm ²)	降伏点 σ_y (kg/mm ²)	降伏比 σ_y/σ_B	計 算 値		実 験 値
				疲労限比 σ_D/σ_B	疲 勞 限 σ_D (kg/mm ²)	
SS41	45	27	0.60	0.62	28	24
HT50	53	37	0.70	0.60	32	31
HT60	64	55	0.86	0.52	33	36
HT80	85	81	0.95	0.46	39	38

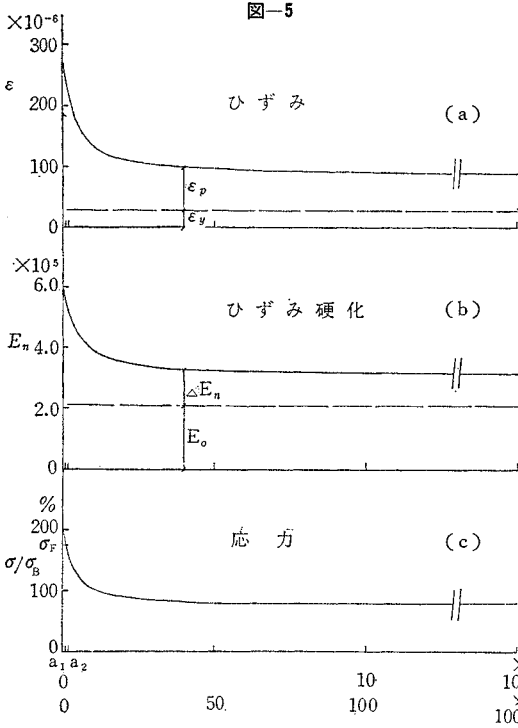


図-5

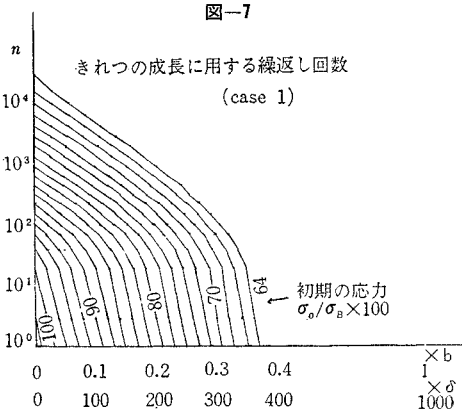


図-7

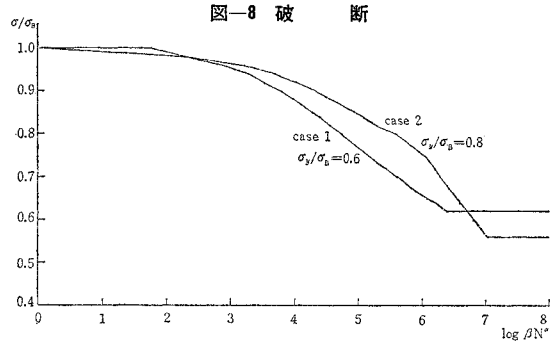


図-8 破 断

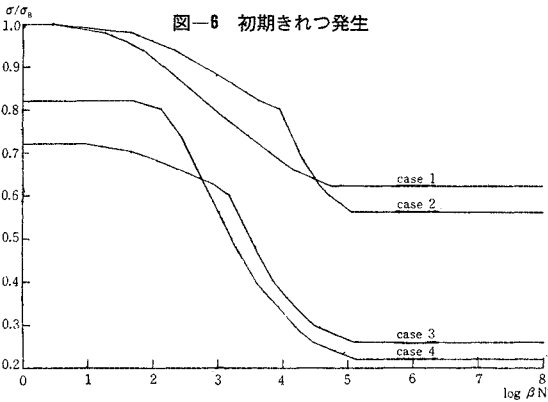


図-6 初期きれつ発生

これらは目下実施中である実験的研究の結果と合わせて検討のうえ報告することにして、ここではそのうちの一つ、疲労限についての結果を表-2に示す。計算値は降伏比を除いて case 1, case 2 と同じパラメーターを設定して、同様な計算を行ったものであり、実験値は八幡製鉄“高張力鋼デザインマニュアル”によるものである。

4. む す び

疲労の問題を連続体の力学の立場からマクロ的に眺め 2. に述べたモデルを設けて考察を加えている。

目下、くり返し負荷による材料の特性の変化、微小きれつ発生条件としての Fracture curve、高張力鋼の降伏後のひずみ特性、などについて実験的研究を行っており、これらの結果に照して考察しなければならないが 3. の計算結果は、経験的に知られている疲労のもつ特徴を相当程度に再現しており、このモデルは疲労のもつある一面を表わしていると考えられるから、ここにひとまず理論的考察のみをとりあげ報告することにした。

なお、この研究は文部省科学研究費による研究および鉄道建設公団からの受託研究に関連して行なっていることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 横堀武夫：“材料強度学”，技報堂（1955）および岩波全書（1963）
同名の異なる著書で後者は前者を補うものである。
- 2) E. Orowan : Proc. Roy. Soc. London, Vol. 171 (1937)
- 3) A.K. Head : Phil. Mag. Vol. 44 (1953)

(1965. 9. 2・受付)