

# 換算等分布活荷重の確率論的考察

## STOCHASTIC STUDY ON EQUIVALENT UNIFORM LIVE LOAD

中 川 建 治\*

By Kenji Nakagawa

**要 旨** 交通量観測, および換算等分布活荷重に関して, いろいろな研究が発表されている。車線方向の車両の配列については, 一定区間に含まれる車両台数は, 2項分布にしたがうものと, ポアソン分布にしたがうものとに大別されている。

本文は, 車頭間隔が, ポアソン分布にしたがっている場合を想定して, これと従来の研究との関連を示し, 簡単ながら, 時間のパラメーターを考慮した場合もあわせて, 換算等分布活荷重について論じたものである。

なお, 車線に対して直角方向の配列と, 車両の重量変化については, なんら考慮していない。

### 1. ま え が き

構造物の設計においては, 影響線, あるいは影響面を画いて, 正(負)の部分には荷重を満載し, 負(正)の部分には無載荷として, 最もきびしい載荷状態を想定して計算するのが, 一般的な方法である。この方法は, 現象の生起確率という概念にとらわれずに, 想定し得る最もきびしい載荷状態にも耐え得るようにする考え方である。もし, このように, 安全性のみにこだわらずに, 経済性も加味して設計してもよい場合は, ただちに, 現象の生起確率という概念を導入する必要が生ずる。載荷区間が長くなればなるほど, 荷重満載という現象も, 無載荷という現象も生起しがたくなり, 地震時の荷重に対してのみならず, 場合によっては, 全区間満載という現象に対しても, 安全率の低下を許してもよいという推論を得る。

交通量観測によって, 走行車両には, 車群とみなすべきものと, 単独走行車とみなすべきものとがあって, 混合して交通流を形成しているという報告がある<sup>9),10)</sup>。

車線方向の車両配列については, 文献 6)~9) は, 一定区間に含まれる車両台数は, ポアソン分布にしたがっているものとみなしている。文献 10) は, 観測結果より, 車頭間隔はポアソン分布にしたがっているとしている。そのほかに, 2項分布によって車両配列を論じたものには, 文献 5), 6) がある。

2項分布は, 極限において, ポアソン分布に近づく<sup>7)</sup>ので, 本文では, (1) 車頭間隔がポアソン分布にしたがっている場合について理論式を導く。車両台数がポアソ

ン分布にしたがうということは, 車頭間隔が指数関数分布にしたがっていることである。ほとんどの文献では, 車頭間隔が指数分布にしたがう場合を論じているが, 高速走行中の車両では, 次第に車頭間隔が大きくなっていく<sup>9)</sup>ことも考えると, 車頭間隔のモード(最頻値)が0となる指数分布は不合理になる。したがって, モードと平均値がほぼ一致するようなポアソン分布を想定することは, 文献 10) の結果によっても, 十分根拠のあることであろう。

つぎに, (2) 車頭間隔が指数分布にしたがう場合, すなわち, 車両台数がポアソン分布にしたがう場合を論じて, 両者の相互関係を近似式によって導く。

本文において, 換算等分布活荷重を導く場合の, 他の制約として, つぎのように規定した。

車両は, 同一重量であって, 集中荷重として作用する。車群は形成しない。

車線は一車線であって, 横方向は考慮しない。

速度による車頭間隔の変化は無視する。すなわち, 静的な配列状態のみをまず考える。

なお, 車線横方向の配列については, 主として, 文献 2), 5), 8) にくわしく論じられている。車種変化による重量の乱れについても同様である。

生起確率を論ずる場合, ほとんどの研究では, 時間と走行車の速度の乱れについては言及していない。車両を車線方向に静的に配列した場合の配列状態の生起確率と, これらの車両が, すべて同一速度で一定区間(たとえば, 橋梁上)を通過する場合の, その区間における配列状態の単位時間当りの生起回数には, 多少の相違がある。文献 7) は, 時間をパラメーターとして生起確率を論じている。たとえば, 1000 回に1回生ずる現象としても, その1000回の現象が生起するには, どれほどの時間が必要であるかということである。

したがって, 本文では, 静的配列の生起確率より, 換算分布活荷重のてい減率を論じた後に, 時間のパラメーターによって, どのようにてい減率が変化するかを検討した。

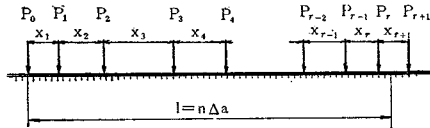
### 2. ポアソン分布にしたがう場合

#### (1) 分布関数

隣接する単位の集中荷重の間隔は, それぞれ独立で,

\* 正会員 工修 名古屋大学工学部講師 土木工学教室

図-1 荷重配列



かつ等しいパラメーターをもつポアソン分布法則にしたがうものとする。すなわち、適当に長さの単位  $\Delta a$  を定めると、図-1における荷重間隔(車頭間隔)  $x_i$  は、 $i$  に関係なく確率変数とみなし得て、

$$P\{(k-1)\Delta a < x_i \leq k\Delta a\} = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \dots\dots(2.1)$$

としてその生起確率が定義されるものと仮定する。ここで、 $\nu$  は  $x_i$  の平均値が  $\nu \Delta a$  であることを意味している。区間の長さは、図-1に示すように、 $l = n\Delta a$  であり、区間原点はつねに任意の荷重位置に定める。区間  $l$  に  $r$  個の荷重 ( $r$  台の車両) が載荷する確率を  $p_0(r)$  と表わし、区間の左端(原点)の荷重は無視して  $r$  個配列する場合を考える。なお、第  $r$  番目の荷重は、区間の右端に配置することも許す。したがって、区間  $l$  として両端も含めるならば、 $r+1$  個の荷重が配列していることになる。

それぞれの荷重間隔  $x_i (i=1, 2, \dots, r)$  はポアソン分布にしたがっているから、 $\sum_{i=1}^r x_i$  はパラメーター  $r\nu$  のポアソン分布にしたがいが、 $\sum_{i=1}^{r+1} x_i$  はパラメーター  $(r+1)\nu$  のポアソン分布にしたがうことになる。ここで、 $x_i = k_i \Delta a$  であるから、 $p_0(r)$  は、つぎのようにして求められる。

$$\begin{aligned} p_0(r) &= P\left(\sum_{i=1}^r k_i \leq n < \sum_{i=1}^{r+1} k_i\right) \\ &= \sum_{\beta=0}^n \sum_{k=\beta+1}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \cdot \frac{(\nu r)^{n-\beta}}{(n-\beta)!} e^{-\nu r} \\ &= e^{-\nu(r+1)} \sum_{\beta=0}^n \sum_{k=\beta+1}^{\infty} \frac{\nu^k (r\nu)^{n-\beta}}{k! (n-\beta)!} \\ &= e^{-\nu(r+1)} \sum_{\beta=0}^n \frac{(r\nu)^{n-\beta}}{(n-\beta)!} \left( e^{\nu} - \sum_{k=0}^{\beta} \frac{\nu^k}{k!} \right) \\ &= e^{-\nu r} \sum_{\beta=0}^n \frac{(r\nu)^{n-\beta}}{(n-\beta)!} \\ &\quad - \left\{ \sum_{\beta=0}^n \sum_{k=0}^{\beta} \frac{\nu^k (r\nu)^{n-\beta}}{k! (n-\beta)!} \right\} e^{-\nu(r+1)} \end{aligned} \dots\dots(2.2)$$

式(2.2)の第2項の{ }内は、

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta=0}^n \sum_{k=0}^{\beta} \frac{\nu^k (r\nu)^{n-\beta}}{k! (n-\beta)!} \\ &= \sum_{\beta=0}^n \sum_{j=0}^{\beta} \frac{\nu^{\beta-j} (r\nu)^{n-\beta}}{(\beta-j)! (n-\beta)!} \\ &= \sum_{\beta=0}^n \sum_{j=0}^{\beta} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-j)!}{(\beta-j)! (n-\beta)!} \nu^{\beta-j} (r\nu)^{n-\beta} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{\{\nu(r+1)\}^{n-j}}{(n-j)!} \dots\dots(2.3) \end{aligned}$$

となる。したがって、式(2.3)を式(2.2)に代入して

つぎのように  $p_0(r)$  を得る。

$$\begin{aligned} p_0(r) &= e^{-\nu r} \sum_{\beta=0}^n \frac{(\nu r)^{\beta}}{\beta!} \\ &\quad - e^{-\nu(r+1)} \sum_{\beta=0}^n \frac{\{\nu(r+1)\}^{\beta}}{\beta!} \dots\dots(2.4) \end{aligned}$$

ここでは、 $r \geq 1$  でないと  $p_0(r)$  は意味をなさない。しかし、 $p_0(0)$  とは、第1番目の荷重が区間  $l$  からはずれる確率であり、

$$p_0(0) = e^{-\nu} \sum_{\beta=n+1}^{\infty} \frac{\nu^{\beta}}{\beta!}$$

となる。したがって、 $p_0(r)$  は全確率の定理をつぎのようにして満足していることがわかる。

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} p_0(r) &= p_0(0) \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \left[ e^{-\nu r} \sum_{\beta=0}^n \frac{(\nu r)^{\beta}}{\beta!} - e^{-\nu(r+1)} \sum_{\beta=0}^n \frac{\{\nu(r+1)\}^{\beta}}{\beta!} \right] \\ &= p_0(0) + e^{-\nu} \sum_{\beta=0}^n \frac{\nu^{\beta}}{\beta!} \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\nu(r+1)} \sum_{\beta=0}^n \frac{\{\nu(r+1)\}^{\beta}}{\beta!} \\ &= 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\nu(r+1)} \sum_{\beta=0}^n \frac{\{\nu(r+1)\}^{\beta}}{\beta!} \\ \therefore \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^N p_0(r) &= 1 \dots\dots(2.5) \end{aligned}$$

さて、式(2.4)として得た  $p_0(r)$  は、級数の部分積の差という形であるから、平均値、あるいは分散値を求めるには不都合である。本来は、変数  $r$  は離散値であるから、定積分法による総和は許されないはずであるが、平均値や、分散値の近似値を求めるために、あえて  $r$  を連続変数とみなすならば、 $p_0(r)$  は、つぎのようになる。

$$H(x) = e^{-\nu x} \sum_{\beta=0}^n \frac{(\nu x)^{\beta}}{\beta!} \dots\dots(2.6)$$

と定義すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dH(x)}{dx} &= e^{-\nu x} \left\{ \nu \sum_{\beta=1}^n \frac{(x\nu)^{\beta-1}}{\beta!} - \nu \sum_{\beta=0}^n \frac{(x\nu)^{\beta}}{\beta!} \right\} \\ &= -\nu e^{-\nu x} \frac{(\nu x)^n}{n!} \dots\dots(2.7) \end{aligned}$$

$$\therefore p_0(r) = -\{H(r+1) - H(r)\} \dots\dots(2.8)$$

となり、式(2.8)の右辺は、 $H(x)$  を原始関数とする関数  $H'(x)$  の定積分であって、式(2.7)を用いて、

$$\begin{aligned} p_0(r) &= - \int_r^{r+1} H'(x) dx \\ &= \frac{\nu^{n+1}}{n!} \int_r^{r+1} e^{-\nu x} x^n dx \dots\dots(2.9) \end{aligned}$$

として表わされる。

ここで改めて、離散値であるべき  $r$  を連続変数とみなして、区間  $l$  に  $r$  個の荷重が含まれる確率を  $p_1(r)$  と定義する。これは、 $p_0(r)$  の近似式ともみなされるべきであるが、含まれる荷重が  $(r+dr, r)$  の区間になる確率を  $p_1(r) dr$  と仮定するのである。

$$p_1(r) dr = \nu e^{-\nu r} \frac{(\nu r)^n}{n!} dr \dots\dots(2.10)$$

$$\int_0^\infty p_1(r)dr = \frac{\nu^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-\nu r} r^n dr = 1 \dots\dots(2.11)$$

式(2.11)は、確率密度関数  $p_1(r)$  に対する全確率の定理である。この場合の載荷量  $r$  の平均値  $m$  と分散値  $\sigma^2$  を求めよう。

$$m = \int_0^\infty r p_1(r) dr = \frac{\nu^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-\nu r} r^{n+1} dr = \frac{n+1}{\nu} \dots\dots(2.12)$$

$$\bar{r}^2 = \int_0^\infty r^2 p_1(r) dr = \frac{(n+1)(n+2)}{\nu^2}$$

$$\therefore \sigma^2 = \bar{r}^2 - m^2 = \frac{n+1}{\nu^2} \dots\dots(2.13)$$

不連続量を連続量とみなしたことによる誤差はさげられないので、真の平均値  $m_0$  の上下限の検定を行なう。

$$m_0 = \sum_{r=1}^\infty r \left\{ \int_r^{r+1} p_1(x) dx \right\} < \int_0^\infty r p_1(x) dx$$

$$\int_0^\infty (r-1) p_1(x) dx < m_0 < \int_0^\infty r p_1(r) dx$$

$$\therefore \frac{n+1}{\nu} - 1 < m_0 < \frac{n+1}{\nu} \quad |m_0 - m| < 1 \dots\dots(2.14)$$

誤差の最大値でも1以下となるので、 $r$  を連続量とみなし、確率密度関数として  $p_1(r)$  を採用しても、結果には大差がないことがわかる。

確率密度関数  $p_1(r)$  の分布関数を求めるために、つぎのように変数変換を用いて積分を行なう。

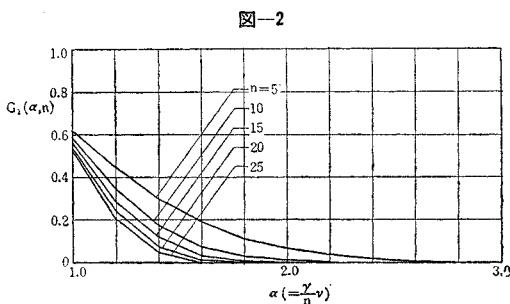
$$\left. \begin{aligned} \int p_1(r) dr &= \frac{\nu}{n!} \int e^{-\nu r} (\nu r)^n dr \\ x &= r \frac{\nu}{n}, \quad dx = \frac{\nu}{n} dr \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.15)$$

$$\begin{aligned} F_1(\alpha, n) &= \int_0^\alpha p_1(r) dr = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^\alpha e^{-n x} x^n dx \\ &= 1 - e^{-n\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{(n\alpha)^k}{k!} \dots\dots(2.16) \end{aligned}$$

すなわち、 $n/\nu$  を単位にすれば、 $r \leq n\alpha/\nu$  となる確率は  $F_1(\alpha, n)$  となる。なお、 $G_1(\alpha, n)$  をつぎのように定義すれば、区間  $l$  に  $n\alpha/\nu$  個以上載荷する確率を与える。

$$\begin{aligned} G_1(\alpha, n) &= 1 - F_1(\alpha, n) \\ &= e^{-n\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{(n\alpha)^k}{k!} \dots\dots(2.17) \end{aligned}$$

図-2 に  $G_1(\alpha, n)$  を示す。



(2) 換算等分布活荷重 (その 1)

荷重間隔がポアソン分布にしたがう場合、区間  $l$  に  $r$  個載荷する確率は  $p_1(r)$  であり、平均値は  $(n+1)/\nu$  となることがわかった。しかし、この平均値に近い値  $n/\nu$  を単位にすれば、 $n\alpha/\nu$  個以上含まれる確率は  $G_1(\alpha, n)$  であり、 $n\alpha/\nu$  個以下しか含まれない確率は  $F_1(\alpha, n)$  となることもわかった。

ここで、換算等分布活荷重を、区間  $l$  に  $r$  個載荷した場合は、

$$q = r/l \dots\dots(2.18)$$

と定義する。実際には、 $r$  個の荷重は区間  $l$  の内部で不規則な配列をするが、等間隔に配列する現象がもっとも起こりやすいので、等間隔分布と仮定して換算等分布活荷重を定義する。

さて、現象の生起確率を考慮して構造物の設計を行なうということは、ある生起確率、たとえば、 $1/1000$  をもつ危険荷重をもって設計することであり、

$$\left. \begin{aligned} G_1(\alpha_1, n) &= \frac{1}{1000} \\ q_{\max} &= \frac{1}{l} \times \frac{n}{\nu} \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.19)$$

として得る  $q_{\max}$  を影響線の正 (あるいは負) の部分に載荷し、

$$\left. \begin{aligned} F_1(\alpha_2, n) &= \frac{1}{1000} \\ q_{\min} &= \frac{1}{l} \cdot \frac{n}{\nu} \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.20)$$

より得る  $q_{\min}$  を影響線の負 (正) の部分に載荷して、最大応力、あるいは最大変形を計算して設計することである。ここで、長さの単位を  $\Delta a$  として、 $l = n \Delta a$  としているが、影響線の符号が正の部分と負になる部分とで、それぞれの区間長を  $l$  とする。符号の反転の多い場合は、それぞれの連続した載荷長さが異なるので、 $l$  すなわち、 $n$  の値もそれぞれ変化し、それに対応して式(2.19)、式(2.20)より得る  $q_{\max}$ 、 $q_{\min}$  はすべて異なる値とするのである。

$G_1(\alpha, n)$ 、 $F_1(\alpha, n)$ 、 $n$  および  $\alpha$  の関係は非常に複雑であって、これ以上簡単な関係を求めにくい。しかし、 $G_1(\alpha, n)$ 、 $F_1(\alpha, n)$  は、 $n/\nu$  を単位にするかぎり、 $\nu$  が陽に含まれなくなるので、つぎのように予想を立てて、近似的な関係式を数値計算より求めることを考える。ある生起確率のもとで予想される  $r$  の最大値  $r_{\max}$  は、平均値  $m$  と、標準偏差  $\sigma$  を用いて、

$$\begin{aligned} r_{\max} &= m + \alpha' \sigma \\ &= \frac{n+1}{\nu} \left( 1 + \frac{\alpha'}{\sqrt{n+1}} \right) \dots\dots(2.21) \end{aligned}$$

として、生起確率より定められる  $\alpha'$  より近似的に得られないであろうか。すなわち、生起確率  $G_1(\alpha, n)$ 、 $F_1(\alpha, n)$  を一定にした場合の  $\alpha, n, \nu$  の関係を検討するのである。

図-3は、縦軸に  $\log(\alpha_1-1)$ 、横軸に  $\log n$  をとり  $G_1(\alpha_1, n)$  を 0.1 より 0.0001 まで変化させた場合の関係を示したものである。それぞれほぼ等しい勾配の直線とみなされることがわかったので、これより式(2.21)に類似した関係をつぎのように導く。

$$\log A - \log(\alpha_1 - 1) \approx 0.64 \log(n/10) \dots (2.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &\approx 1 + \frac{4.36}{n^{0.64}} A \\ G_1(\alpha_1, n) &= \theta_1 \\ r_{\max} &= \frac{n}{\nu} \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots (2.27)$$

$\theta_1$  と  $A$  の関係を表-1に示す。このようにして、生起確率を適当に定めた場合の換算等分布活荷重  $q_{\max}$  は、近似的に、

$$q_{\max} = \frac{1}{\nu d a} \left( 1 + \frac{4.36}{n^{0.64}} A \right) \dots (2.28)$$

表-1

$\theta_1(\theta_2)$	A	B
0.1	0.54	0.31
0.01	1.05	0.54
0.001	1.45	0.68
0.0001	1.85	0.76
0.00001	—	0.82
0.000001	—	0.87

と予想される。 $l$ が増加すれば  $n$ も増加するので、 $q_{\max}$  は平均値に近づくことがわかる。

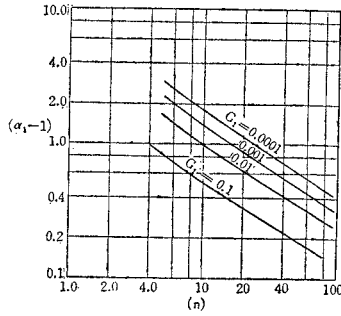
$q_{\max}$  を導いた理論で推論すれば、荷重区間が長くなるにしたがって無荷重ということが不合理となって、 $n$ の増加にしたがって増加する分布荷重  $q_{\min}$  を荷重すべきであるという結論を得る。したがって、

$$F_1(\alpha_2, n) = \theta_2 \quad \theta_2 = 0.1 \sim 0.000001$$

という条件のもとに、数値計算の結果を図示すると、図-4となる。これより、 $\log(1-\alpha_2)$  と  $\log n$  との関係は、勾配のほぼ等しい直線関係とみなしてよいことがわかるので、

$$\left. \begin{aligned} \log B - \log(1-\alpha_2) &\approx 0.38 \log(n/10) \\ \alpha_2 &\approx 1 - \frac{2.395}{n^{0.38}} B \\ r_{\min} &\approx \frac{n}{\nu} \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots (2.29)$$

図-3



$$q_{\min} = \frac{1}{\nu d a} \left( 1 - \frac{2.395}{n^{0.38}} B \right) \dots (2.30)$$

を得る。 $B$  は  $\theta_2$  の関数として表-1に示す。

### 3. 指数関数分布にしたがう場合

#### (1) 分布関数

区間  $l$  に含まれる荷重の数  $r$  がポアソン分布にしたがう確率変数である場合を論ずる。ここで、区間  $l$  に  $r$  個含まれるということは、図-1で定義したような状態とする。すなわち、区間  $l$  の原点は任意の荷重位置に固定して、その荷重は載荷個数に含めない。第  $r$  番目の荷重は、区間  $l$  の右端へ位置してもよいとする。分布関数を、パラメーター  $\mu$  のポアソン分布とすれば、

$$P(r=k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \dots (3.1)$$

となる。ここで、 $k=0$  とすれば車頭間隔が指数関数分布にしたがうことがわかる。分布関数を  $F(r)$  とすれば、

$$F(r) = e^{-\mu} \sum_{k=0}^r \frac{\mu^k}{k!} \dots (3.2)$$

となるが、これは、式(2.17)の  $G_1(\alpha, n)$  と等しい形となる。

$$F(r) = G_1\left(\frac{\mu}{r}, r\right)$$

さて、ここで、前節の  $\alpha$  と同じように、平均値  $\mu$  を単位にして  $\beta$  を定義する。

$$r = \beta \mu \dots (3.3)$$

したがって、分布関数も、平均値  $\mu$  を単位にして  $\beta$  の関数  $F_2(\beta, \mu)$  とすれば、 $G_1(\alpha, n)$  と関連していることが、つぎのようにして示される。

$$\begin{aligned} F_2(\beta, \mu) &= F(\beta \mu) \\ &= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\beta \mu} \frac{\mu^k}{k!} \\ &= G_1\left(\frac{1}{\beta}, \beta \mu\right) \end{aligned} \dots (3.4)$$

同じようにして、 $r \geq \beta \mu$  となる確率  $G_2(\beta, \mu)$  は、

$$\begin{aligned} G_2(\beta, \mu) &= 1 - F_2(\beta, \mu) \\ &= F_1\left(\frac{1}{\beta}, \beta \mu\right) \end{aligned} \dots (3.5)$$

となる。

すでに、 $G_1(\alpha, n)$ 、 $F_1(\alpha, n)$  の値を適当に定めて、 $\alpha$  と  $n$  との関係、あるいは  $\alpha$  の最大値、最小値と  $n$  との関係を、数値計算法によって近似的に求めてあるので、生起確率  $G_2(\beta, \mu)$ 、 $F_2(\beta, \mu)$  を適当に定めた場合の  $\beta$  の最大値、および最小値の  $\mu$  との関係は容易に求められる。 $\beta$  の最小値を求めるには、 $\alpha$  の最大値を求める式(2.27)において、 $\alpha = 1/\beta$ 、 $n = \beta \mu$  を代入して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta_{\min}} &\approx 1 + \frac{4.36}{(\beta_{\min} \mu)^{0.64}} A \\ \beta_{\min}^{-0.36} - \beta_{\min}^{-0.64} &\approx \frac{4.36}{\mu^{0.64}} A \end{aligned} \right\} \dots (3.6)$$

を得る。 $\beta_{\max}$  に関しては、 $\alpha$  の最小値を求める式(2.29)

より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta_{\max}} &\cong 1 - \frac{2.390}{(\mu\beta)^{0.38}} B \\ \beta_{\max}^{0.38} - \beta_{\max}^{-0.62} &= \frac{2.395}{\mu^{0.38}} B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

を得る。

$\beta_{\max} > 1, \beta_{\min} < 1$  であるから、式 (3.6), 式 (3.7) のかわりに、近似的に、つぎのような関係式を導く。

$$\beta_{\min}^{2/31} < 1 - \frac{4.36}{\mu^{2/3}} A \dots\dots\dots(3.8)$$

$$\beta_{\max}^{1/3} > 1 + \frac{2.395}{\mu^{1/3}} B \dots\dots\dots(3.9)$$

(2) 確率密度関数による換算等分布活荷重

$F_2(\beta, \mu)$  は分布関数であって、 $r \leq \beta\mu$  となる現象の生起確率であり、生起確率を適当に定めた場合の  $\mu$  と  $\beta$  の関係を求めた。ここでは、分布関数でなく、確率密度関数を一定とした場合の  $\mu$  と  $\zeta = r/\mu$  との関係を求めて  $\beta$  と  $\mu$  との関係に類似した近似式を導くことを考える。区間  $l$  に  $r$  個の荷重が含まれる確率  $p_3'(r, \mu)$  は、

$$p_3'(r, \mu) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$$

であるが、 $r = \zeta\mu$  として、平均値  $\mu$  を単位にすれば、

$$\begin{aligned} p_3(\zeta, \mu) &= p_3'(\zeta\mu, \mu) \\ &= \frac{\mu^{\zeta\mu}}{(\zeta\mu)!} e^{-\mu} \dots\dots\dots(3.10) \end{aligned}$$

と表わされる。ここで、 $p_3(\zeta, \mu) = \theta_3$  を  $10^{-1}$  から、 $10^{-7}$  まで変化させて、 $\zeta$  の最大値と最小値の  $\mu$  に対する関係

図-5

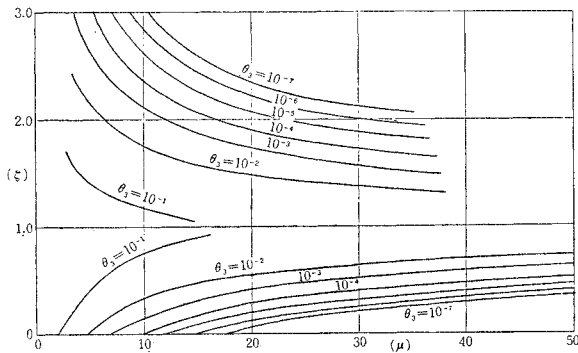


図-6

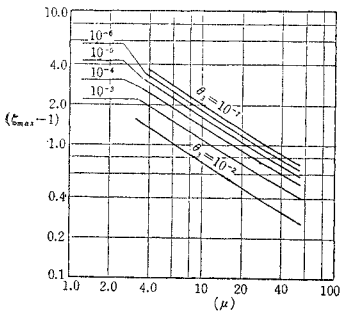
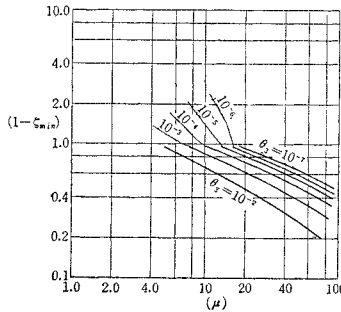


図-7



を、図-5 に示した。

$\mu$  に対する  $\zeta_{\max}$  の近似的な関係式を得るために、 $\log \mu$  と  $\log(\zeta_{\max}-1)$  の関係を 図-6 に示す。同じく、 $\zeta_{\min}$  に関しては、 $\log \mu$  と  $\log(1-\zeta_{\min})$  の関係を 図-7 に示す。いずれも近似的には直線関係とみなしてよい。

これより、つぎのように近似的な関係式を得る。

$$\zeta_{\max} = 1 + C\mu^{-0.616} \dots\dots\dots(3.11)$$

$$\zeta_{\min} = 1 - D\mu^{-E} \dots\dots\dots(3.12)$$

定数  $C, D, E$  は生起確率  $\theta_3$  によって異なるので、表-2 に示す。

表-2

$\theta_3$	C	D	E
$10^{-2}$	3.06	2.53	0.460
$10^{-3}$	4.64	2.67	0.620
$10^{-4}$	5.67	2.67	0.730
$10^{-5}$	6.79	2.78	0.815
$10^{-6}$	7.58	2.83	0.870
$10^{-7}$	8.58	2.90	0.940

車頭間隔が指数関数分布にしたがう場合は、生起確率として分布関数をとるならば、間隔がポアソン分布にしたがう場合の関係式から導かれ、生起確率として確率密度関数をとる場合でも、類似した関係式を得ることがわかった。

生起確率を規定するにあたって、分布関数より、 $r \geq \beta\mu$  となる確率、あるいは、 $r \leq \beta\mu$  となる確率を論ずべきであって、確率密度、すなわち、 $r = \beta\mu$  となる確率を採用すべきでない。したがって、式 (3.11), 式 (3.12) に得た結果は、荷重てい減率の規定にあたって、その傾向を検定することにのみ役立つものである。

4. 換算等分布活荷重のてい減率

現象の生起確率という観点から、荷重てい減率を導いた。これらは、類似した傾向をもっているが非常に複雑であり、実用的ではない。慣用公式ともいふべき関係式を得るために、安全側に変形してつぎのような近似式を導く。

(1) 荷重間隔がポアソン分布にしたがう場合は、長さの単位を  $\Delta a$ , ポアソン分布のパラメーターを  $\nu$  とすれば、区間  $l = n\Delta a$  に  $r$  個の荷重の含まれる確率は式 (2.10) における  $p_1(r)$  である。適当な生起確率を定めた場合、載荷量  $r$

表-3

$\theta_1(\theta_2)$	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>
$10^{-1}$	2.355	1.352	2.227	4.078
$10^{-2}$	4.578	2.354	3.880	7.929
$10^{-3}$	6.322	2.965	4.886	10.950
$10^{-4}$	8.066	3.314	5.461	13.971
$10^{-5}$	—	3.575	5.892	—
$10^{-6}$	—	3.793	6.251	—

は  $n$  の関数となつて、

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{n}{\nu} \alpha, \alpha_{\max} \doteq 1 + \frac{A_1}{\sqrt[3]{n^2}} \\ \alpha_{\min} &\doteq 1 - \frac{B_1}{\sqrt[3]{n}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

を得る。ここで、 $A_1(B_1)$  は、 $r \geq n\alpha/\nu (r \leq n\alpha/\nu)$  となる現象の生起確率  $\theta_1(\theta_2)$  の関数であつて、表-3 に示してある。

(2) 荷重間隔が指数関数分布にしたがう場合は、区間  $l$  に  $r$  個の荷重が含まれる確率は、パラメーター  $\mu$  のポアソン分布で表わされるが、このパラメーター  $\mu$  で載荷量を表わすと、式 (3.8)、および式 (3.9) より、つぎの結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} r &= \beta\mu, \beta_{\max} \doteq 1 + \frac{A_2}{\sqrt[3]{\mu}} \\ \beta_{\min} &\doteq 1 - \frac{B_2}{\sqrt[3]{\mu^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.2)$$

$A_2(B_2)$  は、 $r \geq \beta\mu (r \leq \beta\mu)$  となる現象の生起確率  $\theta_1(\theta_2)$  の関数で、表-3 に示す。

生起確率として、確率密度をとるならば、

$$\left. \begin{aligned} r &= \zeta\mu, \zeta_{\max} = 1 + \frac{C}{\sqrt[3]{\mu^2}} \\ \zeta_{\min} &= 1 - \frac{D}{\mu E} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.3)$$

となり、 $C, D, E$  は表-2 の値である。

さて、荷重  $\nu$  の減率として導いた  $\alpha, \beta, \zeta$  は、それぞれの場合の平均値に対する比率であつた。すなわち、区間  $l$  に含まれる荷重の個数  $r$  を、それぞれの場合の平均荷重  $\nu$  を 1 とした値で定義してある。また、実際の橋梁において車両満載という場合、一定区間に含まれる車両台数には限界が存在し、鋼道路橋設計示方書においては 14 m あたり 1 台配列する状態を満載と定義している。ここに導いた  $\alpha_{\max}, \beta_{\max}, \zeta_{\max}$  の近似式は、 $n$  が 0 に近づくにしたがつて、すなわち、載荷区間  $l$  が小さくなるにつれて無限大に発散する。この不合理な点をさけるために、平均値に対する比率がある限界値以上に達した場合を満載とみなし、このときの  $\nu$  の減率を改めて 1 と置き換へるような操作を行なえばよい。たとえば、 $\alpha_{\max}$  の限界値を  $\alpha_c$  とすれば、 $\alpha'_{\max} = \alpha_{\max}/\alpha_c, \alpha'_{\min} = \alpha_{\min}/\alpha_c$  として、荷重  $\nu$  の減率を  $\alpha'_{\max}, \alpha'_{\min}$  とするのである。 $\alpha_{\max}$  が限界値  $\alpha_c$  以上になる区間、 $\alpha_c \leq \alpha_{\max}$  では、 $\alpha'_{\max} = 1$  とする。

$\beta, \zeta$  についても同じようにして、 $\beta'_{\max}, \beta'_{\min}, \zeta'_{\max}, \zeta'_{\min}$  を定義すればよい。

現行の鋼道路橋設計示方書に規定されている等分布活荷重の最大値は、350 kg/m<sup>2</sup> であるが、橋梁が長大化した場合、ここに導いたような  $\nu$  の減率、 $\alpha'_{\max}, \alpha'_{\min}, \beta'_{\max}, \beta'_{\min}$  によって、荷重  $\nu$  の減の理論的根拠を与えることが本文の主題である。しかし、表-2、表-3 に示した諸定数は、数値計算で近似計算を行ない、絶対安

全の限界値を示したものであり、いずれを採用すべきかを論じたものではない。

式 (2.1) における長さの単位  $la$ 、それにとりまう  $n = l/la$ 、およびパラメーター  $\mu, \nu$  は、道路の種類、あるいは、地域的特性によって一定値とはならない。他方、生起確率は、道路の重要性によって規定されるべきものである。したがつて、等分布活荷重を、連続した載荷区間が長くなるにつれて  $\nu$  を減させることを設計示方書に盛り込むことは、容易なことではない。ここに述べた理論は、この意味から、 $\nu$  の減法則の理論的根拠とその  $\nu$  の減率の傾向を与へたものにすぎない。

車両の重量は一定ではないので、重量分布についても考慮しなければならないが、これは、車両の車線上の分布とは独立なものと考へられる。道路の種類による車両の重量分布の変化は、当然考へられるが、載荷長には一応関係ないものとして導いたものである。

車両の重量分布を論ずるには、現在走行している車両の車種別統計や、積載重量の分布を決定しなければならない。もし、重量分布がポアソン分布で表わされるならば、指数関数分布にしたがう車頭間隔の場合と全く同様な考え方で解決される。車両の重量が、パラメーター  $t$  のポアソン分布で表わされるならば、連続した  $r$  台の車両の全重量は、パラメーター  $rt$  のポアソン分布にしたがう。このとき、 $r$  台の車両の全重量の平均値は  $rt$  であるから、適当な生起確率を定めた場合の最大重量の平均値  $rt$  に対する比率  $\beta_{\max}$  は、車頭間隔がポアソン分布にしたがう場合の  $\mu = rt$  としたときの  $\beta_{\max}$  にほかならない。載荷区間が長くなると載荷台数  $r$  が大きくなり、 $r$  台総重量が増加するが、平均値  $\mu = rt$  に対する比率  $\beta_{\max}$  が、式 (4.2) にしたがつて  $\nu$  を減し、この  $\beta_{\max}$  がその区間に載荷している車両の 1 台あたりの重量 (1 台あたりの重量の平均値に対する比率) を与へることになる。したがつて、載荷区間が長くなると、車両配列状態にもとづく荷重  $\nu$  の減と、車両の重量分布にもとづく荷重  $\nu$  の減とを考慮するということは、十分理論的根拠をもつことがわかる。重量分布については全く考慮していない上記の  $\nu$  の減率は、重量分布を考慮する場合よりも、安全側の  $\nu$  の減率を与える。

### 5. 時間を考慮した生起確率

前述の理論は、すべて、車線方向の静的な配列にもとづいたものである。ここでは、このような車線方向に無限に配列している車両が、等速度  $V$  で走行しているものとして、一定区間  $l = nla$  を通過する各瞬間の配列状態を、その区間内  $l$  において観測して、一定時間内のある配列の生起回数、生起確率を考察する。

ある時刻における区間  $l$  の車両配列状態は、 $t_1 = d a/V$  時間後には、つぎの配列状態をとる。しかし、この場合

は、車両を  $\Delta a$  だけ平行移動させただけであるから、区間  $l$  内の  $(n-1)\Delta a$  の区間は、前の状態を  $\Delta a$  移動させただけで、新しい現象は  $\Delta a$  において起こるだけである。すなわち、時間  $t_1$  後の状態は、前の状態と独立したものではない。区間  $l$  において、全く新しい、前の配列とは独立な配列状態になるには、 $t_2=l/V$  の時間を要す。 $t_1$  は、配列状態が一部分変化して、つぎの配列状態になる時間であり、 $t_2$  は、区間  $l$  にわたって全く新しい配列状態に変わるための所要時間である。

静的な生起確率  $p$  をもつ配列状態の、時間あたりの生起確率は、それぞれ、 $p/t_1, p/t_2$  となる。 $t_1, t_2$  は  $V$  に逆比例するので、速度の増加とともに、単位時間当りの生起確率は増加し、逆に、その配列状態の継続時間  $t_1, t_2$  は減少する。一定時間  $T$  内のある配列状態の総継続時間は、それぞれの配列状態の単位の継続時間を  $t_1$ 、あるいは、 $t_2$  としても等しく  $pT$  となる。

したがって、高速運転になると、車頭間隔が変化しない場合は、それぞれの、単位時間内の生起確率は増加するが、それぞれの継続時間は不変である。

ある配列状態の単位の継続時間を  $t_2$  とみなす場合は、速度以外の因子を考慮する必要がある。 $V$  を一定としても、対象としている区間長  $l$  が変化すると、配列の継続時間  $t_2$  も比例して変化する。単位時間あたりの生起確率は、 $p/t_2=pV/l$  となるので、静的な場合のてい減率に  $1/n$  を乗ずるの必要が生ずる。 $t_2$  を単位にして、生起回数に着目して設計すべき場合は、 $n$  の増加とともに、てい減が著しくなるという結論を得た。

この結果から、つぎのことが推論し得る。車両の速度にそれぞれ乱れがあって、平均速度を  $V$  として、それぞれの車両が、時間的に変動する速度  $v$  をもって、 $V+v$  の速度で走行する場合、車群を形成することを論外にするならば、それぞれの配列状態の単位の継続時間  $t_1$  あるいは、 $t_2$  に多少の変動が生じて、それぞれの状態の総継続時間には変化がない。

### 6. 計算例と比較検討

荷重てい減率について、実測結果にもとづいて論じた研究が、すでに発表されている<sup>1),2)</sup>ので、それらの研究と比較する。なお、時間のパラメーターは無視する。

(1) 計算例として、建設省土木研究所と防衛大学校が、昭和 36 年 11 月 28 日に、横浜新道戸塚支線で交通量観測を行なったときのデータを採用した。

土木研究所の観測結果から、車頭間隔の集計を行なったが、車頭間隔は、ほぼ、つぎのような指数関数分布にしたがっているという結論を得た。

$$p(x) = e^{-0.0166x} \dots\dots\dots(6.1)$$

ここで、 $x$  は車頭間隔であり、単位は  $m$  である。この確率密度関数による  $x$  の平均値は、

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} xp(x)dx = 60.2 m$$

であり、観測データによる平均値は 59.7 m となっているので、式 (6.1) を採用することにする。

この結果より、 $\beta_{max}$  を得るには、式 (4.2) において、 $\mu = 0.0166x$

とする。車頭間隔の平均は約 60 m であるが、示方書の規定する満載という状態は、車頭間隔が 14 m という状態であるから、 $\beta_c = 4$  とする。

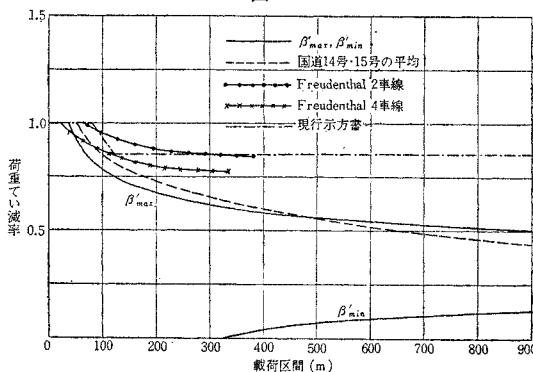
$$\beta'_{max} = \left(1 + \frac{A_2}{\sqrt[3]{0.0166x}}\right) \frac{1}{\beta_c}$$

$$\beta'_{min} = \left(1 - \frac{B_2}{\sqrt[3]{(0.0166x)^2}}\right) \frac{1}{\beta_c}$$

$$\beta_c = 4$$

生起確率を 1/10 000 として、図-8 に  $\beta'_{max}, \beta'_{min}$  を示す。

図-8



(2) 建設省土木研究所で、昭和 37 年度に行なった東京都交通調査の航空写真による結果より、荷重てい減率を導いたものが、土木技術資料 6-9 に報告されている<sup>1)</sup>。国道 14 号と 15 号における車両配列より求めた平均てい減率  $K$  は、つぎのようになっている。

$$K = 0.23 + \frac{240}{260 + l}$$

ここで  $l$  は載荷長さであり、 $l \geq 50 m$  とする。これを、図-8 に示す。

(3) A.M. Freudenthal の研究では<sup>2)</sup>、てい減率というものを明確に定義していないが、生起確率を 1/1000 とした場合の荷重強度を与えているので、1600 lb を基準(満載状態)として、てい減率を導き、図-8 に併記した。これは、2車線の場合と、4車線の場合である。

(4) 現行の鋼道路橋設計示方書の荷重てい減率は、 $l \leq 80 m, K = 1.0$

$$80 m \leq l \leq 120 m, K = \frac{1}{350} \left(450 - \frac{5}{4} l\right)$$

$$120 < l, K = \frac{300}{350}$$

と規定されている。

これらのいろいろな荷重てい減率を併記した図-8 よ

り、つぎの結論を得る。

a) 現行示方書の規定は、 $l \leq 400$  m の区間においては、生起確率を  $1/1000$  とする場合の Freudenthal のてい減率に近いものである。

b) 本文中で、生起確率を  $1/1000$  として得たてい減率  $\beta'_{\max}$  は、国道 14 号および 15 号線の実測値の平均値に近い値を示す。

c) 現行示方書の規定は、ここに示した他のてい減率と比較して、安全側の規定である。

d) 本文中で導いた  $\beta'_{\min}$  は、影響線の符号の反転している部分にも載荷する荷重の比率を与えたもので、現在の設計示方書には規定されていないものである。これは現象の生起確率を一定に保つという確率論にもとづいて必然的に導かれたものである。したがって、この  $\beta'_{\min}$  を無視するならば、載荷区間が長くなり、それにつれて影響線の反転した区間も長いような場合は、荷重てい減率をますます小さくしてよいであろう。

## 7. 結 語

現象の生起確率という観点から、橋梁に作用させる換算等分布荷重は、連続した載荷区間が長くなるにしたがって、てい減させるべきであることを説き、荷重てい減率について、一応の近似式を導いた。しかし、生起確率をいかに定めるかということは、橋梁の重要性や経済性に関連する問題であり、今後の課題である。

塑性解析について、最近、非常に多くの研究がなされているが、この生起確率の概念を導入して「非常にまれな生起確率をもって起こるような厳しい荷重状態に対しては、構造物の塑性変形を許して、その塑性変形による耐荷力を期待して設計する」という設計方針を採用することも、十分合理的な考え方ではなからうか。長大橋で荷重満載という現象は、実際には、なんらかの交通事故のような現象にもなっていて、交通が停滞して、衝撃係数を考慮しなくてもよくなる。

本研究は、車線横方向のてい減についてはふれていない。また、車両の走行による衝撃についても検討していないが、載荷区間の増大にともなう荷重てい減ということで、参考になるならば幸いである。

最後に、本研究において、終始適切なご指導を賜った成岡教授に、心から感謝の意を表したい。なお、建設省土木研究所の交通量観測のデーターその他の件で、いろいろと助言をいただいた枝村俊郎氏にも感謝する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 伊吹山四郎・大橋昭光：長大橋の設計活荷重について、土木技術資料、6-9、昭和 39 年 9 月、pp. 1-8
- 2) Freudenthal, A.M. : Reflections on Standard Specifications for Structural Design, Trans. of ASCE, Vol. 113, 1948, pp. 269-292
- 3) 田原保二：交通量と車両間隔の確率論、第 2 回日本道路会議論文集、昭和 29 年、p. 471
- 4) 田原保二：車両交通量と構造物（橋りょう）の安全度について、第 3 回日本道路会議論文集、昭和 30 年、p. 656
- 5) 西村 昭：鋼道路橋設計荷重に関する考察、土木学会論文集第 35 号、昭和 31 年 6 月、pp. 15-20
- 6) Asplund, S.O. : Probabilities of Traffic Loads on Bridges, Proc. ASCE, Vol. 81, No. 585, 1955
- 7) Stephenson, H.K. : Highway Bridge Live Load Based on Laws of Chance, Proc. ASCE, Vol. 83, No. ST 4, July 1957
- 8) Ichiro Konishi, Masanobu Shinozuka : Stochastic Study on Uniform Live Load in the Design of Highway Bridge, Technical Reports of the Engineering Research Institute, Kyoto Univ. Report No. 28, Feb. 1956, pp. 13-24
- 9) 高田 弘・栗本 譲：道路交通流における車群の走行特性について、防衛大学校理工学研究報告、第 2 巻第 2 号、昭和 39 年 12 月、pp. 175-189
- 10) 小堀為雄・吉田 博：電子計算機による自動車荷重列の模型化に関する研究、土木学会年次学術講演会講演概要、昭和 39 年 5 月
- 11) 西村 昭：荷重列としての自動車交通流の二、三の解析、土木学会誌 46 巻 2 号、昭和 36 年 2 月、pp. 37~42

(1965. 4. 19・受付)