

円弧部材を含む任意形立体骨組構造の解法

AN ANALYSIS FOR THREE DIMENSIONAL FRAMES WITH CIRCULAR BEAMS

後 藤 茂 夫*
By Shigeo Goto

1. 緒 言

最近、ようやく高速大記憶容量の大型電子計算機の使用が一般化し、構造工学の分野においても、計算機の使用は不可欠なものとなりつつある。

ここにおいて、筆者は円弧部材をふくみ、節点において、部材の主軸が不規則な角度で交わる、任意形状の立体骨組構造物の一解法を考えてみた。

いままでも、円弧材の立体たわみ角式は、すでに種々の提案がなされ、貴重な研究成果が得られている。また、これらにより、節点で各部材の主軸が直交する立体曲線ラーメンの材端断面力に関する平衡方程式も、あるていど機械的に作成することが可能となった。

しかし、いかに方程式の作成が容易になったとはいえ新しい立体構造物にとりくむごとに、平衡方程式を作成してプログラミングしていたのでは、労力、時間のむだを生じ能率的とはいえない。

以下に述べる立体骨組構造の解析法は、あらゆる形状の骨組構造の一般平衡方程式を包含し、本解法により、組まれたプログラムによれば、立体構造を問わず、平面トラス、ラーメン、格子桁などでも、なんらプログラムを変更することなく、すべての断面力、変位を算出することができる。

しかもインプットデータの作成は非常に容易であるので、技術者の熟練はそれほど必要ではなく、構造物の形状による難易は、ほとんど問題とはならない。

なお平衡方程式は、節点の変位を未知量として作成する関係上(変形法)支点でない節点においては6個の未知変位を有し、使用する計算機は相当な大型機を必要とする。しかし、IBM 7090 クラスの計算機では百数十元の逆行列の計算もわずかに数分で計算でき、将来、IBM ではシステム 360、CDC では 3600 クラス、国産では FONTAC などの最新機が、わが国においても稼働態勢にあり相当複雑な立体構造においても、なんら支障なく演算可能となり、本解法の意義も十分生きてくるものと思われる。

2. 座 標 系

(1) 絶対座標系; ω

空間に直交座標 ξ, η, ζ を定め、各部材の節点の位置を表わすことにする。座標は右手系とし、特に支障がなければ $\xi\eta$ 平面を水平面とし、 ζ を鉛直下方にとる。

この空間に固定され、全構造系に共通な座標に関する諸値を $\omega = \{\xi, \eta, \zeta\}$; $\{ \}$ 列ベクトルを表わす; と表わし座標系を ω 系と称する。

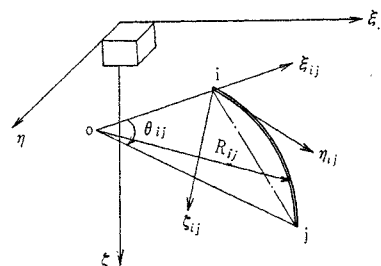
(2) 部材座標系; ω_{ij}

部材 ij の i 点における法線、接線および ζ 軸に対して正の方向余弦を示す向きの陪法線よりなる座標系 ω_{ij} を図-1のように、

$$\omega_{ij} = \{\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ij}\}$$

と定義する。また部材断面の主軸は i 点において、 ξ_{ij} 、 ζ_{ij} に一致するものとする。

図-1



円弧としての性質 R_{ij}, θ_{ij} は図のように ζ_{ij} を下に見て、部材の右側に曲率中心がある場合を正とする。また ji 座標系 ω_{ji} の方向を ω_{ij} が ζ_{ij} のまわりに $\pi + \theta_{ij}$ だけ回転したものに一致させることにする。

したがって、

$$A_{ij}^{\circ} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{ij} & -\sin \theta_{ij} \\ \sin \theta_{ij} & -\cos \theta_{ij} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

とおけば、両者の変換は、

$$\omega_{ji} = A_{ij}^{\circ} \omega_{ij}$$

$$\omega_{ij} = A_{ji}^{\circ} \omega_{ji}$$

となる。なお A_{ij}° は ω_{ij} の ω_{ji} に対する方向余弦を表わす行列であることはいうまでもない。もちろん、

* 正会員 K K宮地鉄工所技術部第二設計課

$$\theta_{ji}, R_{ji} = -\theta_{ij}, -R_{ij}$$

である。

(3) 座標変換

∠iOj の二等分線 \vec{OC} に平行な ξ_{ij}' , 直線 ij 方向の η_{ij}' および ζ_{ij} よりなる座標系を ω_{ij}' とすれば,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_{ij}}{2} & \sin \frac{\theta_{ij}}{2} & \\ -\sin \frac{\theta_{ij}}{2} & \cos \frac{\theta_{ij}}{2} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

とおいて,

$$\omega_{ij}' = A_{ij} \omega_{ij}$$

となる。

以後, 式(2)のような行列を表わす場合, 右辺の要素の suffix は左辺と同じものを使用するものとして省略する。つぎに \vec{OC} が η_{ij}' のまわりに, 反時計方向 φ_{ij} 回転すれ

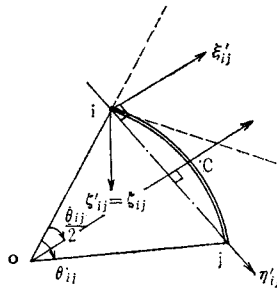


図-2

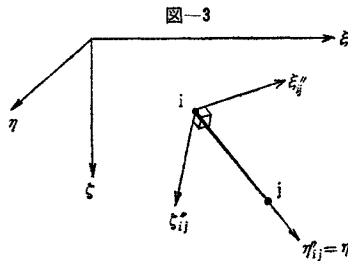


図-3

ば, $\xi\eta$ 平面と平行になるものとし, こうして得られる座標系 (ω_{ij}' が η_{ij}' のまわりに回転したもの) を ω_{ij}'' とする。したがって, \nearrow

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \nu \cos \varphi \cos \frac{\theta}{2} - \alpha \sin \frac{\theta}{2} + r \sin \nu \sin \varphi \cos \frac{\theta}{2}, \\ -\sin \nu \cos \varphi \cos \frac{\theta}{2} - \beta \sin \frac{\theta}{2} + r \cos \nu \sin \varphi \cos \frac{\theta}{2}, \\ -r \sin \frac{\theta}{2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \varphi \cos \frac{\theta}{2}, \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} & \cos \nu \cos \varphi \sin \frac{\theta}{2} + \alpha \cos \frac{\theta}{2} + r \sin \nu \sin \varphi \sin \frac{\theta}{2}, & \cos \nu \sin \varphi - r \sin \nu \cos \varphi \\ & -\sin \nu \cos \varphi \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2} + r \cos \nu \sin \varphi \sin \frac{\theta}{2}, & -\sin \nu \sin \varphi - r \cos \nu \cos \varphi \\ & r \cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \varphi \sin \frac{\theta}{2}, & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

また ij 部材が直線材の場合には, $\theta_{ij} = 0$ を代入して,

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \nu \cos \varphi + r \sin \nu \sin \varphi & \alpha & \cos \nu \sin \varphi - r \sin \nu \cos \varphi \\ -\sin \nu \cos \varphi + r \cos \nu \sin \varphi & \beta & -\sin \nu \sin \varphi - r \cos \nu \cos \varphi \\ -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \varphi & r & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

なお, 方向余弦行列の一般的な性質として,

$$D_{ij}^{-1} = D_{ij}^* \quad * : \text{転置記号}$$

なる関係がある。

$$A_{ij}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ & 1 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

とおけば,

$$\omega_{ij}'' = A_{ij}' \omega_{ij}'$$

なお, $\varphi_{ji} = -\varphi_{ij}$

この ω_{ij}'' なる座標系の方向は, i, j 点の位置を (ξ_i, η_i, ζ_i) および (ξ_j, η_j, ζ_j) として,

$$\alpha_{ij} = \frac{\xi_j - \xi_i}{l_{ij}}, \quad \beta_{ij} = \frac{\eta_j - \eta_i}{l_{ij}}$$

$$r_{ij} = \frac{\zeta_j - \zeta_i}{l_{ij}}$$

$$l_{ij} = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2}$$

とおき,

$$D_{ij}'' = \begin{bmatrix} \cos \nu & \alpha & -r \sin \nu \\ -\sin \nu & \beta & -r \cos \nu \\ 0 & r & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。ただし ν_{ij} は \vec{ij} が ξ 軸に平行なときは ξ 軸と ξ_{ij}'' 軸となす角であり, そうでないときは次式で与えられる。

$$\sin \nu_{ij} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\cos \nu_{ij} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

なお, $\nu_{ji} = \pi + \nu_{ij}$ である。

したがって,

$$\omega = D_{ij}'' \omega_{ij}'' = D_{ij}'' A_{ij}' A_{ij} \omega_{ij}$$

となる。 ω_{ij} の ω に対する方向余弦行列を D_{ij} とすれば,

$$D_{ij} = D_{ij}'' A_{ij}' A_{ij}$$

すなわち,

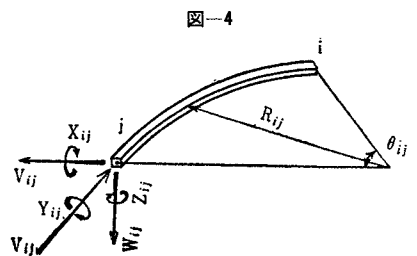


図-4

(4) 材端断面力および節点の変位の表示

ij 部材の i 点に働く材端力, 材端モーメントを ω_{ij} 系に関して,

$$Q_{ij} = \{U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}\} \quad M_{ij} = \{X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}\}$$

ω 系に関して,

$$Q_{ij}' = \{U_{ij}', V_{ij}', W_{ij}'\} \quad M_{ij}' = \{X_{ij}', Y_{ij}', Z_{ij}'\}$$

また, i 点の移動変位, 回転変位を,

ω_{ij} 系に関して,

$$d_{ij} = \{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}\} \quad r_{ij} = \{x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}\}$$

ω 系に関して,

$$d_i = \{u_i, v_i, w_i\} \quad r_i = \{x_i, y_i, z_i\}$$

と表わすことにする。したがって両系の間には,

$$M_{ij}' = D_{ij} M_{ij} \quad Q_{ij}' = D_{ij} Q_{ij}$$

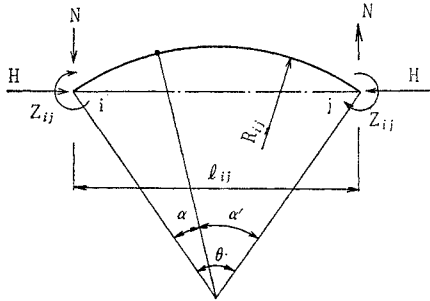
$$r_{ij} = D_{ij} * r_i \quad d_{ij} = D_{ij} * d_i$$

なる関係がある。

3. 円弧材の面内変形と材端断面力

円弧材 ij に図-5 のように材端力が作用しているとすれば, m 点の曲げモーメント M , 軸力 S は,

図-5



$$M = Z_{ij} \frac{\sin \frac{\alpha'}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - Z_{ji} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha'}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - 2HR \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha'}{2} \dots \dots \dots (7)$$

$$S = -\frac{Z_{ij} + Z_{ji}}{l} \sin \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right) + H \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right) \dots \dots \dots (8)$$

図-6

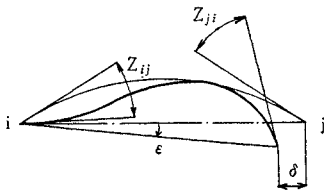


図-6 のように材端変位をとれば,

$$z_{ij} - \epsilon = \int_0^\theta \frac{RM}{EI_z} \frac{\partial M}{\partial Z_{ij}} d\alpha + \int_0^\theta \frac{RS}{EA} \frac{\partial S}{\partial Z_{ij}} d\alpha$$

$$z_{ji} - \epsilon = \int_0^\theta \frac{RM}{EI_z} \frac{\partial M}{\partial Z_{ji}} d\alpha + \int_0^\theta \frac{RS}{EA} \frac{\partial S}{\partial Z_{ji}} d\alpha$$

$$\delta + \epsilon_t l = \int_0^\theta \frac{RM}{EI_z} \frac{\partial M}{\partial H} d\alpha + \int_0^\theta \frac{RS}{EA} \frac{\partial S}{\partial H} d\alpha$$

ϵ_t : 温度変化による単位長当たりの伸び

これを解いて,

$$z_{ij} - \epsilon = \frac{R^3}{2EI_z l^2} \times [\{2\theta - \sin \theta - \theta \cos \theta - \tau^2(\theta + \sin \theta)\} Z_{ij} - \{\sin \theta - \theta \cos \theta + \tau^2(\theta + \sin \theta)\} Z_{ji} - (2 - 2 \cos \theta - \theta \sin \theta) l H]$$

$$z_{ji} - \epsilon = \frac{R^3}{2EI_z l^2} \times [-\{\sin \theta - \theta \cos \theta + \tau^2(\theta + \sin \theta)\} Z_{ij} + \{2\theta - \sin \theta - \theta \cos \theta - \tau^2(\theta + \sin \theta)\} Z_{ji} + (2 - 2 \cos \theta - \theta \sin \theta) l H]$$

$$\delta + \epsilon_t l = \frac{R^3}{2EI_z l^2} \times [- (2 - 2 \cos \theta - \theta \sin \theta) l (Z_{ij} - Z_{ji}) + \{2\theta - 3 \sin \theta + \theta \cos \theta + \tau^2(\theta + \sin \theta)\} l^2 H]$$

ただし,

$$\tau = \frac{\bar{R}}{R} \quad \bar{R}: \zeta_{ij} \text{ 軸に関する断面回転半径}$$

ここで,

$$s = \frac{EI_z}{R} \left\{ \frac{1}{\theta} + \frac{1 - \cos \theta}{(1 - \tau^2)\theta - (1 + \tau^2)\sin \theta} \right\}$$

$$s' = \frac{EI_z}{R} \left\{ -\frac{1}{\theta} + \frac{1 - \cos \theta}{(1 - \tau^2)\theta - (1 + \tau^2)\sin \theta} \right\}$$

$$p = \frac{2EI_z}{R^3} \frac{\theta}{\theta(1 + \tau^2)(\theta + \sin \theta) - 4(1 - \cos \theta)}$$

$$t = l \left\{ \frac{1}{\theta} - \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right\}$$

とにおいて Z_{ij}, Z_{ji}, H に関して解けば,

$$Z_{ij} = (s + pt^2)z_{ij} + (s' - pt^2)z_{ji} - (s + s')\epsilon + pt\delta + pt\epsilon_t l \dots \dots \dots (9)$$

$$Z_{ji} = (s' - pt^2)z_{ij} + (s + pt^2)z_{ji} - (s + s')\epsilon - pt\delta - pt\epsilon_t l \dots \dots \dots (10)$$

$$H = pt(z_{ij} - z_{ji}) + p\delta + p\epsilon_t l \dots \dots \dots (11)$$

さらに,

$$\epsilon = \frac{u_{ij} + u_{ji}}{l} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{v_{ij} - v_{ji}}{2R}$$

$$\delta = (v_{ij} + v_{ji}) \cos \frac{\theta}{2} - (u_{ij} - u_{ji}) \sin \frac{\theta}{2}$$

として ω_{ij} 系に関する材端断面力と変位の関係式を導けば,

$$Z_{ij} = a_{ij}z_{ij} + a'_{ij}z_{ji} - b_{ij}u_{ij} - b'_{ij}u_{ji} + c_{ij}v_{ij} + c'_{ij}v_{ji} + p_{ij}t_{ij}\epsilon_t l_{ij} + Z_{oij} \dots (12)$$

$$U_{ij} = -b_{ij}z_{ij} - b'_{ij}z_{ji} + d_{ij}u_{ij} + d'_{ij}u_{ji} - e_{ij}v_{ij} - e'_{ij}v_{ji} - R_{ij}p_{ij}\epsilon_t(1 - \cos \theta_{ij}) + U_{oij} \dots \dots \dots (13)$$

$$V_{ij} = c_{ij}z_{ij} - c'_{ij}z_{ji} - e_{ij}u_{ij} + e'_{ij}u_{ji} + f_{ij}v_{ij} + f'_{ij}v_{ji} + R_{ij}p_{ij}\epsilon_t \sin \theta_{ij} + V_{oij} \dots \dots (14)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= pt \cos \frac{\theta}{2} - \frac{s+s'}{2R} \\
 c'_{ij} &= pt \cos \frac{\theta}{2} + \frac{s+s'}{2R} \\
 d_{ij} &= \frac{s+s'}{l^2} (1 + \cos \theta) + \frac{p}{2} (1 - \cos \theta) \\
 d'_{ij} &= \frac{s+s'}{l^2} (1 + \cos \theta) - \frac{p}{2} (1 - \cos \theta) \\
 e_{ij} &= \frac{s+s'}{l^2} - \frac{p}{2} \\
 e'_{ij} &= \frac{s+s'}{l^2} + \frac{p}{2} \\
 f_{ij} &= \frac{s+s'}{l^2} (1 - \cos \theta) + \frac{p}{2} (1 + \cos \theta) \\
 f'_{ij} &= -\frac{s+s'}{l^2} (1 - \cos \theta) + \frac{p}{2} (1 + \cos \theta)
 \end{aligned}$$

なお、右辺 $s, s', p, t, R, l, \theta$ は、いずれも suffix ij が省略してある。また $Z_{oij}, U_{oij}, V_{oij}$ は部材面内荷重による荷重項を表わす。 $Z_{jii}, U_{jii}, V_{jii}$ は、式 (12), (13), (14)において ij を ji と入れかえるだけでよい。このとき $R_{ji} = -R_{ij}, \theta_{jii} = -\theta_{ij}$ であるので、

$$\begin{aligned}
 c_{jii} &= -c_{ij}, c'_{jii} = -c'_{ij}, e_{jii} = -e_{ij}, \\
 e'_{jii} &= -e'_{ij}
 \end{aligned}$$

となり、他の係数は ij を入れかえても符号も値も変わらない。

4. 円弧部材の面外変形と材端断面力

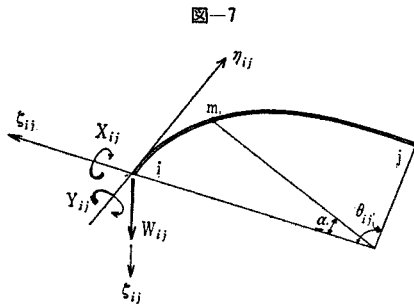


図-7のように、 i 端に曲げモーメント X_{ij} , ねじりモーメント Y_{ij} , せん断力 W_{ij} が働いている場合、 m 点の曲げおよびねじりモーメントはつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 M &= X_{ij} \cos \alpha + Y_{ij} \sin \alpha - W_{ij} R \sin \alpha \dots\dots(15) \\
 T &= -Y_{ij} \cos \alpha + X_{ij} \sin \alpha - W_{ij} R (1 - \cos \alpha) \\
 &\dots\dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

面内変形の場合のように、カスティリアノの定理を用いてもよいが、ここでは、曲げとねじりに関する連立微分方程式の境界値問題として考えた。円弧材面外のたわみ角を x , 回転角を y とすれば、つぎの連立微分方程式が得られる。

$$\frac{dx}{d\alpha} - y = -R \frac{M}{EI} \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} + x = R \frac{T}{GJ} \dots\dots\dots(18)$$

$$Rx = \frac{dw}{d\alpha} \dots\dots\dots(19)$$

ここで、 w は ζ_{ij} 方向のたわみ、 EI は ξ_{ij} 軸まわりの曲げ剛さ、 GJ は η_{ij} 軸まわりのねじり剛さ、境界条件は、

$$\begin{aligned}
 \alpha = 0 \text{ において、} \\
 x = x_{ij}, y = y_{ij}, w = w_{ij}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha = \theta_{ij} \text{ において、} \\
 x = -x_{ji}, y = -y_{ji}, w = w_{ji}
 \end{aligned}$$

である。これを解いて、 X_{ij}, Y_{ij}, W_{ij} を求めれば、結局次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
 X_{ij} &= A_{ij} x_{ij} - A'_{ij} x_{ji} + B_{ij} y_{ij} + B'_{ij} y_{ji} \\
 &\quad + C_{ij} (w_{ij} - w_{ji}) + X_{oij} \dots\dots\dots(20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{ij} &= B_{ij} x_{ij} - B'_{ij} x_{ji} + D_{ij} y_{ij} + D'_{ij} y_{ji} \\
 &\quad + E_{ij} (w_{ij} - w_{ji}) + Y_{oij} \dots\dots\dots(21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{ij} &= C_{ij} (x_{ij} - x_{ji}) + E_{ij} (y_{ij} + y_{ji}) \\
 &\quad + F_{ij} (w_{ij} - w_{ji}) + W_{oij} \dots\dots\dots(22)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$q_{ij} = \frac{GJ}{R} \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\mu\theta(\theta - \sin \theta) + \theta(\theta + \cos \theta) - 4(1 - \cos \theta)}$$

$$q'_{ij} = \frac{GJ}{R} \frac{1 + \cos \theta}{\mu(\theta + \sin \theta) + \theta - \sin \theta}$$

$$r_{ij} = \frac{2}{\theta} - \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$r'_{ij} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\mu_{ij} = \frac{GJ}{EI}$$

とにおいて、

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= q + q', \quad A'_{ij} = q - q' \\
 B_{ij} &= qr + q'r', \quad B'_{ij} = qr - q'r'
 \end{aligned}$$

$$C_{ij} = \frac{2GJ}{R\theta} q$$

$$D_{ij} = \frac{GJ}{R\theta} + qr^2 + q'r'^2, \quad D'_{ij} = \frac{GJ}{R\theta} + qr^2 - q'r'^2$$

$$E_{ij} = \frac{GJ}{R^2\theta} + \frac{2qr}{rR\theta}$$

$$F_{ij} = \frac{GJ}{R^2\theta} + \frac{4q}{R^2\theta^2}$$

である。なお右辺の suffix ij は省略した。また X_o, Y_o, W_o は荷重項、 $X_{jii}, Y_{jii}, W_{jii}$ は式 (20), (21), (22) において ij を ji とすればよい。このとき、

$$\begin{aligned}
 B_{ji}, B'_{ji} &= -B_{ij}, -B'_{ij} \\
 E_{ji} &= -E_{ij}
 \end{aligned}$$

となるが他は符号、値とも変わらない。

5. 材端断面力の行列表示および座標変換

2. で定めた記号にしたがって、 ij 部材 i 点の断面力を行列表示する。右辺係数行列の suffix ij を省略して表わせば、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_{ij} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \\ & & a \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{t}}_{ij} &= \begin{bmatrix} -A' & B' \\ -B' & D' \\ & & a' \end{bmatrix} \\
 \mathbf{s}_{ij} &= \begin{bmatrix} C \\ E \\ -b & c \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{s}}_{ij} &= \begin{bmatrix} -C \\ -E \\ -b' & c' \end{bmatrix} \\
 \mathbf{q}_{ij} &= \begin{bmatrix} d & -e \\ -e & f \\ & & -F \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{q}}_{ij} &= \begin{bmatrix} d' & -e' \\ e' & f' \\ & & F \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

とおいて次式が得られる。

材端モーメント

$$\mathbf{M} = \mathbf{t}_{ij} \mathbf{r}_{ij} + \bar{\mathbf{t}}_{ij} \mathbf{r}_{ji} + \mathbf{s}_{ij} \mathbf{d}_{ij} + \bar{\mathbf{s}}_{ij} \mathbf{d}_{ji} + \mathbf{M}_{oij} \quad \dots\dots\dots (23)$$

材端力

$$\mathbf{Q} = \mathbf{s}_{ij} \mathbf{r}_{ij} + \bar{\mathbf{s}}_{ij} \mathbf{r}_{ji} + \mathbf{q}_{ij} \mathbf{d}_{ij} + \bar{\mathbf{q}}_{ij} \mathbf{d}_{ji} + \mathbf{Q}_{oij} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし,

$$\mathbf{M}_{oij} = \{X_{oij}, Y_{oij}, Z_{oij}\}$$

$$\mathbf{Q}_{oij} = \{U_{oij}, V_{oij}, W_{oij}\}$$

なお Z_o, U_o, V_o には温度項を含めている。

これを ω 系へと変換すればつぎのようになる。

$$\mathbf{M}'_{ij} = \mathbf{D}_{ij} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{r}_i + \mathbf{D}_{ij} \bar{\mathbf{t}}_{ij} \mathbf{r}_j + \mathbf{D}_{ij} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{D}_{ij} \bar{\mathbf{s}}_{ij} \mathbf{d}_j + \mathbf{M}'_{oij} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\mathbf{Q}'_{ij} = \mathbf{D}_{ij} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{r}_i + \mathbf{D}_{ij} \bar{\mathbf{s}}_{ij} \mathbf{r}_j + \mathbf{D}_{ij} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{d}_i + \mathbf{D}_{ij} \bar{\mathbf{q}}_{ij} \mathbf{d}_j + \mathbf{Q}'_{oij} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで,

$$\mathbf{A}_{ij} \equiv \mathbf{D}_{ij} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^*$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{ij} \equiv \mathbf{D}_{ij} \bar{\mathbf{t}}_{ij} \mathbf{D}_{ji}^* = \bar{\mathbf{A}}_{ji}^*$$

$$\mathbf{B}_{ij} \equiv \mathbf{D}_{ij} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^*$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{ij} \equiv \mathbf{D}_{ij} \bar{\mathbf{s}}_{ij} \mathbf{D}_{ji}^* = (\mathbf{D}_{ji} \bar{\mathbf{s}}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^*)^*$$

$$\mathbf{C}_{ij} \equiv \mathbf{D}_{ij} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^*$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{ij} = \mathbf{D}_{ij} \bar{\mathbf{q}}_{ij} \mathbf{D}_{ji}^* = \bar{\mathbf{C}}_{ji}^*$$

とおけば, 式 (25), (26) はつぎのようにかける。

$$\mathbf{M}'_{ij} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{r}_i + \bar{\mathbf{A}}_{ij} \mathbf{r}_j + \mathbf{B}_{ij} \mathbf{d}_i + \bar{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{d}_j - \mathbf{M}'_{oij} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\mathbf{Q}'_{ij} = \mathbf{B}_{ij} \mathbf{r}_i + \bar{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{r}_j + \mathbf{C}_{ij} \mathbf{d}_i + \bar{\mathbf{C}}_{ij} \mathbf{d}_j - \mathbf{Q}'_{oij} \quad \dots\dots\dots (28)$$

また ij が直線材の場合には,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_{ij} &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & & \\ & \frac{GJ}{l} & \\ & & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{t}}_{ij} &= \begin{bmatrix} -\frac{2EI}{l} & & \\ & \frac{GJ}{l} & \\ & & \frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{ij} &= \begin{bmatrix} & \frac{6EI}{l^2} \\ & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{s}}_{ij} &= \begin{bmatrix} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & \end{bmatrix} \\
 \mathbf{q}_{ij} &= \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & & \\ & \frac{EA}{l} & \\ & & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{q}}_{ij} &= \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & & \\ & \frac{EA}{l} & \\ & & -\frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

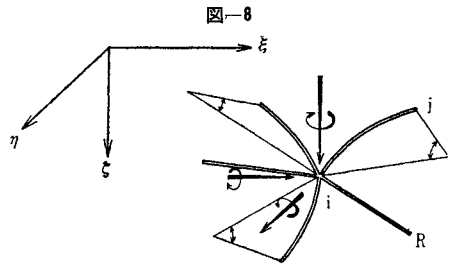
となる。

6. 絶体座標系 ω に関する立体平衡方程式

i 点に集まる全部材の他端を j で代表させ, i 点に作用する荷重を,

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\} \quad \bar{\mathbf{Q}}_i = \{U_i, V_i, W_i\}$$

と表わすことにする。



i 点のまわりの断面力のつりあいより,

$$\sum_j \mathbf{M}_{ij} = \bar{\mathbf{M}}_i \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\sum_j \mathbf{Q}_{ij} = \bar{\mathbf{Q}}_i \quad \dots\dots\dots (30)$$

式 (29), (30) を構造物全節点 $(1, 2, \dots, i, \dots, n)$ について考えれば,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \sum A_{1j} & & \bar{A}_{1k} \\ & \sum A_{2j} & \dots \sum A_{nj} \\ \bar{A}_{ki} & & \bar{B}_{ik} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \sum B_{1j} & & \bar{B}_{1k} \\ & \sum B_{2j} & \dots \sum B_{nj} \\ \bar{B}_{ki} & & \bar{C}_{ik} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \sum C_{1j} & & \bar{C}_{1k} \\ & \sum C_{2j} & \dots \sum C_{nj} \\ \bar{C}_{ki} & & \bar{C}_{nk} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

とにおいて (A, C は対称行列となる) 次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(31)$$

ただし、

$$r = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \quad d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

$$M_0 = \{\bar{M}_1 - \Sigma M'_{01j}, \bar{M}_2 - \Sigma M'_{02j}, \dots, \bar{M}_n - \Sigma M'_{0nj}\}$$

$$Q_0 = \{\bar{Q}_1 - \Sigma Q'_{01j}, \bar{Q}_2 - \Sigma Q'_{02j}, \dots, \bar{Q}_n - \Sigma Q'_{0nj}\}$$

である。

A, B, C の対角要素は、 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} の $1, 2 \dots n$ 点のまわりの各部材についての和を表わし、非対角要素 (i 行 k 列) は ik 間に部材があれば $\bar{A}_{ik}, \bar{B}_{ik}, \bar{C}_{ik}$, なければ3行3列のゼロ行列となる。

A, B, C 各行列は、3行3列の小行列を要素とする n 行 n 列の正方行列で、定数を要素とみれば $3n$ 行 $3n$ 列の行列である。

さて式 (31) は、立体任意形骨組構造の変形と荷重との関係を表わす一般式であるが、これには支点の条件は入っていない。したがって、この式がこのままで成立するためには右辺を構成する荷重群は、全体として荷重だけでつりあっていることが必要である。また荷重群がつりあい状態にあり、式 (31) が成立しても左辺の係数行列 K は、

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$$

その行列式 (determinant) が0となり、逆行列は求まらない。 K の逆行列を求めて変位を計算するには、構造物が外的に安定となる支点条件が必要である。

つぎに支点条件の挿入法について述べることにする。

まず、3行3列の単位行列を i , ゼロ行列を 0 としてつぎの各行列を定義する。

$$i_k : k \text{ 点の回転拘束を表わす } 3 \text{ 行 } 3 \text{ 列の行列}$$

$$j_k : k \text{ 点の移動拘束を表わす } 3 \text{ 行 } 3 \text{ 列の行列}$$

$$i_k' = i - i_k, \quad j_k' = i - j_k$$

- 1) 支点でないとき、
 $i_k = j_k = i$
- 2) ピン支点のとき、
 $i_k = i, \quad j_k = 0$
- 3) 固定支点のとき、
 $i_k = j_k = 0$
- 4) その他、たとえば ξ 軸まわりに回転自由、 η 軸方向に可動、他は固定のとき、

$$i_k = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad j_k = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

すなわち、 i_k, j_k の対角要素の0は固定1は可動を意味し、第1,2,3行の順に ξ, η, ζ 軸方向を表わすものとする。

したがって、

$$I, I' : i_k, i_k' \text{ を対角要素とする対角行列}$$

$$J, J' : j_k, j_k' \text{ を対角要素とする対角行列}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

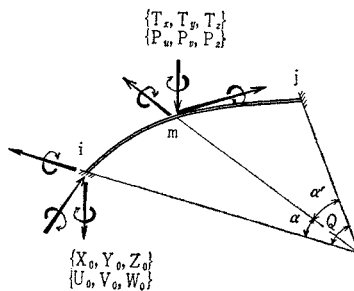
とおけば、支点条件を含んだつりあい方程式はつぎのように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} I' & \\ & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(32)$$

このようにすれば、左辺の係数行列の逆行列が存在することとなり r, d を計算することができる。

7. 部材荷重項

図-9



部材 ij の両端を固定し、図のように m 点に直荷重およびトルク荷重を作用させ、 i 点の不静定反力 (ω_{ij} 方向) を求めれば、それが荷重項となる。

以下の算式においては、とくにまぎらわしい場合のぞいては suffix ij は省略する。

まず、 i 点を自由端、 j 点を固定端とし、部材荷重に対して、 i 点の変位を求め、これを、 $\{u, v, w\}, \{x, y, z\}$ とする。つぎに、自由端 i に不静定力 $\{X_0, Y_0, Z_0\}, \{U_0, V_0, W_0\}$ を ω_{ij} 方向に作用させて i 点の変位を求め $\{u', v', w'\}, \{x', y', z'\}$ とする。両者を合成して i 点の変位を0、すなわち、

$$\{u', v', w'\} = -\{u, v, w\}$$

$$\{x', y', z'\} = -\{x, y, z\}$$

とし、これより求めた不静定力が i 点の ij 部材荷重項である。

さて、載荷点 m の変位を i 端自由として、カスティリアノの定理により求めれば、つぎのように表わされる。

$$u_m = \frac{R^2}{EI_z} \left[\frac{R}{2} (1 + \tau^2) (\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha') P_u \right. \\ \left. + R \left\{ (1 - \cos \alpha') - \frac{1}{2} (1 + \tau^2) \sin^2 \alpha' \right\} P_v \right. \\ \left. + (1 - \cos \alpha') T_z \right] \dots\dots\dots(33)$$

$$v_m = \frac{R^2}{EI_z} \left[R \left\{ 1 - \cos \alpha' \right\} - \frac{1}{2} (1 + \tau^2) \sin^2 \alpha' \right] P_u \\ + R \left\{ \alpha' - 2 \sin \alpha' + \frac{1}{2} (1 + \tau^2) (\alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha') \right\} P_v \\ + (\alpha' - \sin \alpha') T_z \dots\dots\dots(34)$$

$$z_m = \frac{R}{EI_z} [R(1 - \cos \alpha') P_u + R(\alpha' - \sin \alpha') P_v + \alpha' T_z] \dots \dots \dots (37)$$

$$x_m = \frac{R}{2GJ} [\{\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha' + \mu(\alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha')\} T_x - (1-\mu) T_y \sin^2 \alpha' - \{(1-\cos \alpha')^2 + \mu \sin^2 \alpha'\} R P_w] \dots \dots \dots (38)$$

$$y_m = \frac{R}{2GJ} [-(1-\mu) T_x \sin^2 \alpha' + \{\alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha' + \mu(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha')\} T_y - \{2(\alpha' - \sin \alpha') - (1-\mu)(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha')\} R P_w] \dots \dots \dots (36)$$

ただし、荷重と変位は、 m 点における法線、接線、陪法線方向、すなわち ω_{ij} が ζ_{ij} 軸のまわり α だけ回転した方向にとる。

ここで、

$$H_{ij} = \frac{R}{EI_z} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} R^2(1 + \tau^2)(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha'), & R^2(1 - \cos \alpha') - \frac{1}{2} R^2(1 + \tau^2) \sin^2 \alpha', & R(1 - \cos \alpha') \\ R^2(1 - \cos \alpha') - \frac{1}{2} R^2(1 + \tau^2) \sin^2 \alpha', & R^2(\alpha' - 2 \sin \alpha') + \frac{R^2}{2} (1 + \tau^2)(\alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha'), & R(\alpha' - \sin \alpha') \\ R(1 - \cos \alpha') & R(\alpha' - \sin \alpha') & \alpha' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (39)$$

$$L_{ij} = \frac{R}{2GJ} \begin{bmatrix} \alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha' + \mu(\alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha'), & -R(1 - \cos \alpha')^2 - R \mu \sin^2 \alpha' \\ -(1-\mu) \sin^2 \alpha', & -R(1 - \cos \alpha')^2 - R \mu \sin^2 \alpha' \\ -R(1 - \cos \alpha')^2 - R \mu \sin^2 \alpha', & -R(1 - \cos \alpha')^2 - R \mu \sin^2 \alpha' \\ -(1-\mu) \sin^2 \alpha', & -2R(\alpha' - \sin \alpha') + R(1-\mu)(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha') \\ \alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha' + \mu(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha'), & -2R(\alpha' - \sin \alpha') + R(1-\mu)(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha') \\ 2R(\alpha' - \sin \alpha') + R(1-\mu)(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha'), & 4R^2(\alpha' - \sin \alpha') - R^2(1-\mu)(\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha') \end{bmatrix} \dots \dots \dots (40)$$

とおき、式 (33), (34) … (38) を行列で表わせば、

$$\{u_m, v_m, z_m\} = H_{ij} \{P_u, P_v, T_z\} \dots \dots \dots (41)$$

$$\{x_m, y_m, w_m\} = L_{ij} \{T_x, T_y, P_w\} \dots \dots \dots (42)$$

また m 点と i 点の変位の関係は、

$$\mathfrak{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & R \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & R(1 - \cos \alpha) \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \\ -R \sin \alpha & R(1 - \cos \alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば、

$$\{u, v, z\} = \mathfrak{A}_{ij} \{u_m, v_m, z_m\}$$

$$\{x, y, w\} = \mathfrak{B}_{ij} \{x_m, y_m, w_m\}$$

である。したがって、

$$\{u, v, z\} = \mathfrak{A}_{ij} H_{ij} \{P_u, P_v, T_z\} \dots \dots \dots (43)$$

$$\{x, y, w\} = \mathfrak{B}_{ij} L_{ij} \{T_x, T_y, P_w\} \dots \dots \dots (44)$$

つぎに、 i 点に変位 $\{u', v', w'\}$, $\{\alpha', \beta', \gamma'\}$ を与えたときの材端力、材端モーメントを $\{U_0, V_0, W_0\}$, $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ とすれば、3, 4. より次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d-e-b \\ -e & f & c \\ -b & c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ z' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (45)$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ W_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (46)$$

右辺係数行列を h_{ij}, l_{ij} とおけば、

$$\{U_{0ij}, V_{0ij}, Z_{0ij}\} = -h_{ij} \mathfrak{A}_{ij} H_{ij} \{P_{uij}, P_{vij}, T_{zij}\} \dots \dots \dots (47)$$

$$\{X_{0ij}, Y_{0ij}, W_{0ij}\} = -l_{ij} \mathfrak{B}_{ij} L_{ij} \{T_{xij}, T_{yij}, P_{wij}\} \dots \dots \dots (48)$$

を得る。こうして求めた各要素が m 点の荷重による ij 部材、 i 点の荷重項である。 j 点の荷重項は suffix ij を ji とすればよい。このとき ω_{ij}, ω_{ji} の符号の約束により、

$$R_{ji} = -R_{ij}$$

$$\alpha_{ji} = -\alpha'_{ij} \quad \alpha'_{ji} = -\alpha_{ij}$$

$$T_{xji} = -T_{xij} \quad P_{uji} = -P_{uij}$$

$$T_{yji} = -T_{yij} \quad P_{vji} = -P_{vij}$$

$$T_{zji} = T_{zij} \quad P_{zji} = P_{zij}$$

となることに注意する。

8. 結 言

一般に、ある構造物の解析をプログラミングする場合、使用前提となる計算機システムにより、解析手段を十分吟味する必要がある。

設計技術者として、電子計算機による数値解析を行なう場合、そのプログラムがなるべく広範囲に適用できる便利なものであると同時に、経済性という点にも十分留意しなければならないのはもちろんである。この経済性という観点は、その技術者が所属する会社あるいは官庁などの計算機の使用状況により相当異なった様相を呈する。

たとえば、外部の計算センターを利用する場合、演算時間の増加は直接 cost の増加を意味する。これに反し、自社内に計算機をもち、これを利用している場合には演算時間の増減はそれほど痛痒は感じない。むしろ、多少演算時間が多くかかっても応用性のある便利なプログラムを採用するのが当然であろう。

また自社内に小中型システムを設置し、これで処理しきれない大きな問題は、同系統の大型機を有する外部の計算センターを利用することが有利な場合も十分考えられる。

このようなときには、プログラムはどうしても2本立にせざるを得ない。すなわち、小型機むきの、各形式ごとのプログラムと大型機むきの一般性のあるプログラムを用意しておく非常に便利である。

もちろん、本解法のようなきわめて一般性のある計算式で組まれたプログラムで単純な構造を短時間で処理することはできる。しかしながらその形式のために作られたプログラムによる所要演算時間に近づけるためには、形式を判断し、不要の計算式をとばしたり、単純化するための案外やっかいなサブルーチンを必要とし、コーディングのステップ数が多くなる。

したがって主記憶容量の小さい小型機ではコンパイルしきれず、また、同系統の大型機でオブジェクト・プログラムを作成して小型機に入れたとしても主記憶装置がオーバーフローしてしまうことになる。

ここに示した任意形骨組構造の解析法は、あくまでも大型システムを対象としたものであり、今後、計算機の高速、大記憶容量化(主記憶装置)に期待するところが大きい。

なお、本理論によるプログラミングは、未完成であるが、とりあえず、3., 4. の計算式を用い、単層任意径間の連続曲線ラーメンのプログラムを完成し、すでに数種の数値解析を行なった。後日、一般式のプログラムが完成すれば、各種の立体構造の数値解析についても発表させていただくつもりである。

参 考 文 献

- 1) 大地羊三：立体骨組構造物の解法，土木学会論文集第 69 号
- 2) 山崎・太田：円弧部材をもつラーメンの立体解析，土木学会論文集第 107 号
- 3) 小池・後藤：任意形立体ラーメンの解法，土木学会第 20 回年次学術講演概要

(1965.6.18・受付)