バスの路側停車による交通遅滞現象について

ON THE TRAFFIC DELAY DUE TO A BUS STOPPED AT A ROAD-SIDE STOP

明　神　　証*

By　Shō　Myōzin

1. 緒　　言

都市における大衆輸送機関の一つとしてバスの果たす役割がしだいに大きくなってきた。実際，高速鉄道，路面電車等の輸送機関利用者数の増加傾向にくらべバス利用者のそれはきわめて顕著なものがある。このようにバス利用者数が増加する一方，一般の街路交通の混雑はいよいよその度を増してきたため，街路路側のバス停留所におけるバスの停車がこれら一般交通におよぼす影響も無視できなくなった。すなわち，バスが路側の停留所に到着・停車し，客が降車・乗車を行なう間その車線は一時的に交通不能の状態におかれ，他の交通流が渋滞する。停留所における乗降客数の増加に比例してバスの停車時間は長くなりこの部分の交通遅滞はそれだけ増大する。

ところで，この交通遅滞は，後方からバスと同一車線上を走行してきた車が停車中のバスの右側方を円滑に通過することができないために生ずるものであるから，交通遅滞量を表わす尺度として，バスの後方にたまる一般車の台数，停車したために生ずる損失時間あるいはこの車線の交通容量の低下量をあげることができる。このような交通遅滞量を求める方法として，シミュレーションによる方法，交通流を一種の圧縮性流体とみなす流体力学的解法および待ち合せ理論を応用した確率論的方法の3つが考えられる。ここでは，バスの停車時間と乗降客数との関係について若干の観測結果を述べ，ついで交通遅滞量を待ち合せ理論によって考察し，数値計算を行なった結果について述べる。

交通量，乗降客数ないしバス運行回数が増加すれば，この種の交通遅滞は必然的に増大するが，実験的あるいは理論的方法で適切な遅滞量の基準を設定し，それに応じて停留所の形式や配置を合理的に設計することによって遅滞量の軽減をはかることが可能であると考える。

2. バス乗降客数と停車時間について

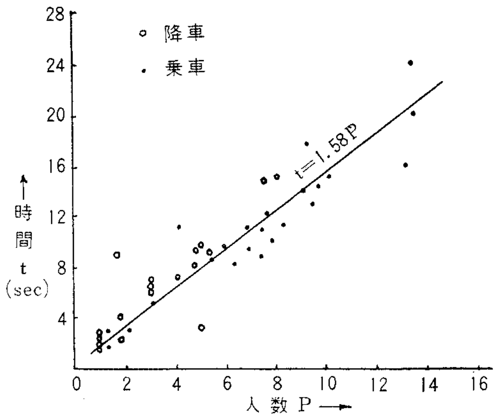
停留所におけるバスの1回あたり停車時間は乗降客数に比例するであろうことが当然予想されるが，バスの形式（座席形式，扉の形式，乗降口の広さなど），乗降客の質（通勤客か否か，年令層，手荷物の大小など），あるいは車内の混み具合などにより変動することも考えられる。

乗車および降車所要時間について，京都市四条烏丸東側の停留所において週日の午後5時から6時までの約1時間にわたって観測した結果を表—1に示す。この表から乗降人員に対して乗降所要時間をプロットし直線式をあてはめたものが図—1である。ここに乗降所要時間はバスが扉をあけた時から閉め終るまでの時間であって，実際の停車時間はこれに平均約3秒を加えたものとなる。図—2に乗車人員，降車人員のそれぞれに対し，乗車，降車所要時間を示す。1人当り平均所要時間は降車時間が乗車時間よりやや長く出ているが，観測時刻が夕方のラッシュ時であったため乗車人員とくらべて降車人員がきわめて少なく，したがって平均1人当り降車時間にはいわばむだな時間が含まれている割合が大きい。むだな時間を生じる原因は，バスが扉をあけた後最初の降

表—1　乗降人数と乗降時間

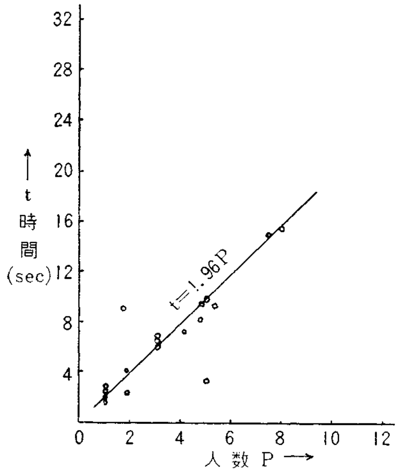
降車				乗車			
人数		時間		人数		時間	
範囲（人）	回数	範囲（sec）	回数	範囲（人）	回数	範囲（sec）	回数
0～4	24	0～5	16	0～4	4	0～5	3
5～9	6	5～10	11	5～9	13	5～10	7
10～14	0	10～15	3	10～14	9	10～15	9
15～19	0	15～20	0	15～19	2	15～20	4
20～24	0	20～25	0	20～24	2	20～25	3
25～29	0	25～30	0	25～29	0	25～30	2
30～34	0	30～35	0	30～34	0	30～35	2
計	30		30		30		30

図—1　乗・降人数と乗・降時間

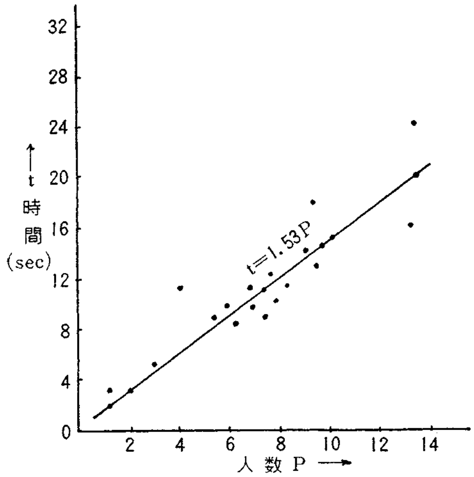


* 正会員　京都大学助手　工学部交通土木工学科

図—2 (a) 降車時間と降車人数



図—2 (b) 乗車時間と乗車人数

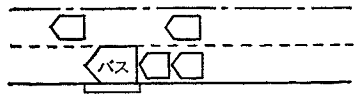


車客が扉口を通過するまでの時間が長いこと，最後に降車する客は乗車客に車内へおしもどされることにある。降車人員がかなり多くなればこのようなむだな時間が1人当り平均降車時間にしめる割合も減少し乗車時間と大差なくなるものと思われるので，客1人当りの平均所要時間は約1.5秒とみなしてよいであろう。上述のようにバスの実際の停車時間は乗降人数によって定まる乗降時間に約3秒を加えて，〔停車時間〕=1.53×〔乗降人数〕+3.0（秒）となる。なお，乗降時間のバラツキは本質的に存在するものと考えられるが，その他のおもな理由として扉形式の相違，乗降口の広さをあげることができる。

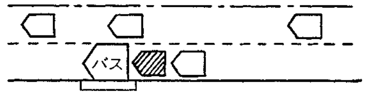
3. 待ち合せモデルの設定およびその解

想定する道路は1方向1車線，2車線のいずれでもよいが，ここでは1方向2車線と考える。バスは外側車線を走行しており他の一般の交通は外側車線，内側車線上

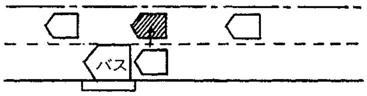
図—3 バス停車による車線閉塞



図—4 待ち行列流入前



図—5 待ち行列流入後



をそれぞれたがいに影響し合うことなく自由に走行しているものとする。さて，バスは図—3に示すように外側車線を走行してきて停留所に停車し外側車線を一時的に閉塞する。このため外側車線上を走行してきた車は停車したバスの後方で順次待ち行列をつくって待たなければならない。もし待っている間，内側車線上に適当な車頭間隔が生じたならば，待ち行列車のうちの先頭車が内側車線に流入することができるものとする。流入は瞬間的に行なわれかつ流入した車によって内側車線上の車の流れは乱されないと仮定する。図—4，図—5 はそれぞれ流入直前，流入直後のようすを示す。

この問題は一つの待ち合せ系としてつぎのように記述することができる。「サービス窓口はバスが停車した瞬間から稼動を開始しバスの発車をもって閉鎖される。この間バスの後方に生ずる行列車のうち先頭車だけがサービスをうけておりそれより後方の車は行列をつくって待っている。先頭でサービスをうけている車は，内側車線上にある長さ以上の車頭間隔を発見した瞬間にこの窓口を去る。この窓口への到着は外側車線上の車のランダムな到着によって生じ，サービスは先着順，窓口は1個である」。さて，バスが発車すれば後方の行列車はもはや内側車線に流入する機会を探すことをやめ，バスにつづいて順次発車するものとする。そうすると窓口が稼動しているのはバスが停車している間だけであり，観測結果によればバスの停車時間はそんなに長くないから，この待ち合せ問題は過渡状態について解く必要がある。到着はポアソン分布にしたがい，サービス時間分布として指数分布を仮定すれば，この過渡状態の解はつぎのようにして求められる[1]。

バスの停車時刻を時間の基準にとりこれから t 時間だけ経過したときサービス中の先頭車を含めてバス後方でたまっている車の台数を n とする。t 時間後に n 台がいる確率を $p_n(t)$ と表わせば

$$
\left.\begin{aligned}
&p_n(t+\varDelta t)=p_n(t)(1-\lambda_1\varDelta t-\mu\varDelta t)\\
&\qquad\qquad +p_{n-1}(t)\lambda_1\varDelta t+p_{n+1}(t)\mu\varDelta t,\quad n\geqq 1\\
&p_0(t+\varDelta t)=p_0(t)(1-\lambda_1\varDelta t)+p_1(t)\mu\varDelta t
\end{aligned}\right\}
$$

ただし，$0\leqq t\leqq c$，c：バスの停車時間

λ_1：平均到着率（外側車線上の車の平均到着率であって当該バスの到着率を含まない）

μ：平均サービス率

……………(1)

式（1）では $\varDelta t$ の2次以下の項は省略してあり，サービス時間については単に平均値 μ の指数分布を仮定している。

式（1）において $p_n(t)$ を左辺に移行して

$$\lim_{\varDelta t\to 0}[p_n(t+\varDelta t)-p_n(t)]/\varDelta t=p_n'(t)$$

とおけば

$$
\left.\begin{aligned}
&p_n'(t)=-(\lambda_1+\mu)p_n(t)+\lambda_1 p_{n-1}(t)\\
&\qquad +\mu p_{n+1}(t)\quad n\geqq 1\\
&p_0'(t)=-\lambda_1 p_0(t)+\mu p_1(t)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)
$$

を得る。ここで $p_n(t)$ の母関数をつぎのように定義する。

$$p(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)z^n\quad |z|\leqq 1\cdots\cdots\cdots(3)$$

式（2）の各式の両辺に z^{n+1} を乗じ n について0から ∞ まで加えると，式（3）の右辺は $|z|\leqq 1$ で収束するから次式を得る。

$$z\frac{\partial p(z,t)}{\partial t}=(1-z)[(\mu-\lambda_1 z)p(z,t)-\mu p_0(t)]$$

……………(4)

初期条件は $t=0$ で $n=0$ であるから $p_0(0)=1$，$p_n(0)=0$ $(n\geqq 1)$。この条件のもとで式（4）の両辺を t に関してラプラス変換すれば

$$
\left.\begin{aligned}
&p(z,s)=\frac{z-\mu(1-z)p_0(s)}{sz-(1-z)(\mu-\lambda_1 z)}\\
&p(z,s)=\int_0^{\infty}e^{-st}p(z,t)dt,\ R_e(s)>0
\end{aligned}\right\}\cdots(5)
$$

$p(z,s)$ が存在するためには $|z|\leqq 1$ において式（5）の分子の0点は分母のそれと一致しなければならないこと，かつ分母の2つの根を $z=\alpha_1,\ \alpha_2$ $(|\alpha_2|<|\alpha_1|)$ とすればその0点は α_2 でなければならないことから $p_0(s)$ がつぎのように求められる。

$$p_0(s)=\frac{\alpha_2}{\mu(1-\alpha_2)}\cdots\cdots\cdots(6)$$

したがって式（5）はつぎのように表わされる。

$$
\begin{aligned}
p(z,s)&=\frac{z-(1-z)\cdot\dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}}{-\lambda_1(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}\\
&=\frac{1}{\lambda_1\alpha_1(1-\alpha_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\alpha_1}\right)^k,\quad \left|\frac{z}{\alpha_1}\right|<1
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_1&=[(\lambda_1+\mu+s)+\sqrt{(\lambda_1+\mu+s)^2-4\lambda_1\mu}]/2\lambda_1\\
\alpha_2&=[(\lambda_1+\mu+s)-\sqrt{(\lambda_1+\mu+s)^2-4\lambda_1\mu}]/2\lambda_1
\end{aligned}\right\}
$$

……………(7)

さて，時刻 t にバス後方に n 台がいる確率 $p_n(t)$ は式（3）からわかるとおり z^n の係数として求められるから，$p_n(t)$ のラプラス変換形 $p_n(s)$ は $p(z,s)$ の z^n の係数で与えられる。したがって式（7）から

$$
\begin{aligned}
p_n(s)&=\frac{1}{\lambda_1\alpha_1^{\,n+1}}(1+\alpha_2+\alpha_2^{\,2}+\cdots\cdots)\\
&=\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda_1}\right)^k\cdot\alpha_1^{-k}\ \cdots\cdots(8)
\end{aligned}
$$

ここで $\alpha_1\alpha_2=\mu/\lambda_1$ なる関係を用いている。

しかるに式（7）から

$$\alpha_1^{-k}=\left[\frac{2\lambda_1}{(\lambda_1+\mu+s)+\sqrt{(\lambda_1+\mu+s)^2-4\lambda_1\mu}}\right]^k$$

また $\mathfrak{L}^{-1}$ で逆ラプラス変換を表わせば，

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\left(\frac{2\lambda_1}{s+\sqrt{s^2-4\lambda_1\mu}}\right)^k\right]=k\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\mu}}\right)^k t^{-1}I_k(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)$$

ここに $I_k(z)$ は第1種の変形ベッセル関数であって

$$I_k(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{k+2m}}{m!\,\Gamma(k+m+1)}$$

したがって

$$\mathfrak{L}^{-1}(\alpha_1^{-k})=e^{-(\lambda_1+\mu)t}\frac{k}{t}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\mu}}\right)^k I_k(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
p_n(t)&=\mathfrak{L}^{-1}\{p_n(s)\}\\
&=\frac{e^{-(\lambda_1+\mu)t}}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k}{t}\right)\\
&\quad\times\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_1}}\right)^k I_k(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)\cdots\cdots\cdots(9)
\end{aligned}
$$

ここで

$$I_k(z)=\frac{z}{2k}[I_{k-1}(z)-I_{k+1}(z)]$$

なる関係を用いて式（9）を変形すると $p_n(t)$ は結局つぎの形に表わされる。

$$
\begin{aligned}
p_n(t)=e^{-(\lambda_1+\mu)t}\{&(\sqrt{\rho})^n I_n(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)\\
&+(\sqrt{\rho})^{n-1}I_{n+1}(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)\\
&+(1-\rho)\rho^n\sum_{k=n+2}^{\infty}(\sqrt{\rho})^{-k}I_k(2\sqrt{\lambda_1\mu}\,t)\}
\end{aligned}
$$

……………(10)

ただし，$\rho=\lambda_1/\mu\quad 0\leqq t\leqq c$

式（10）で与えられる $p_n(t)$ が求める過渡解である。ただし初期条件として $t=0$ においてバスの後方に1台の車も停車していないという条件を与えている。

さて，式（10）において λ_1 は外側車線上の車の平均到着率として与えられるものであり，μ は指数サービス分布の平均値である。ここで，サービスというのは行列の先頭車が待っているという現象であるが，そのサービス時間が指数分布にしたがうかどうか，μ はいかなるものであるかを吟味する必要がある。以下これについて検

討する。

いま，内側車線上に T 以外の車頭間隔があったとき，行列の先頭車がサービスを完了する（内側車線へ流入する）と仮定する。また，内側車線上の車頭間隔は平均値 λ_2 の指数分布にしたがうものとしてその密度関数を，

$$f(t)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \quad \cdots\cdots(11)$$

とおく。

任意の時刻からサービスをうけはじめた車が，内側車線上 n 台の車を見過したのちはじめて T より大きい車頭間隔を発見してそこへ流入したとすれば，この間のサービス時間（待ち時間）x は

$$x=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i \quad \cdots\cdots(12)$$

しかるに $0<t_i<T$, $(i=1,2,\cdots,n)$ でなければならないから t_i の密度関数は式 (11) の $f(t)$ と同じものでない。式 (11) の $f(t)$ は $0<t<\infty$ の範囲で定義されるが，式 (12) の t_i は $0<t_i<T$ である。t_i の密度関数は

$$\frac{f(t_i)}{F(T)},\ 0<t_i<T,\ F(T)=\int_0^T f(t)dt \cdots(13)$$

となる。ここで $x=\sum_{i=1}^{n} t_i$ の分布 $w(x)$ ついて考えてみよう。

$$\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{f(t_i)}{F(T)}\right]\right\}[F(T)]^n[1-F(T)],\ 0<t_i<T \quad \cdots\cdots(14)$$

とおけば，$\prod_{i=1}^{n}[f(t_i)/F(T)]$ は第 n 台目の車が到着するまでサービスが完了しないとした場合の確率密度をあらわし，$[F(T)]^n[1-F(T)]$ は第 n 台目の車が到着するまでサービス未完了かつ第 n 台目と $(n+1)$ 台目との間隔が T 以上であってこの間にサービスを完了するという確率であるから，式(14)は結局サービス時間 $x=\sum_{i=1}^{n} t_i$, $(0<t_i<T)$ の密度関数を表わしていることがわかる。x を用いて式 (14) をかきかえれば，

$$\left[\frac{f(x)}{F(T)}\right]^{n*}[F(T)]^n[1-F(T)],\ 0<x<nT \quad \cdots\cdots(15)$$

となる。ただし，$[f(x)/F(T)]^{n*}$ は $[f(x)/F(T)]$ の n 重のたたみこみを示す。しかるに任意の x に対して到着台数 n は $1\sim\infty$ の範囲に存在しうるから n について加え合せると式 (16) を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{f(x)}{F(T)}\right]^{n*}[F(T)]^n[1-F(T)]$$
$$=[1-F(T)]\sum_{n=1}^{\infty}[f(x)]^{n*} \quad \cdots\cdots(16)$$

式 (16) では $n=0$ の場合すなわち最初に存在する車頭間隔の一部分が T より大きくてサービス時間 $x=0$ となる場合を考慮に入れていない。$x=0$ となる確率は明らかに $\int_T^{\infty} f(t)dt=1-F(T)$ であるから結局 x の分布の密度関数 $w(x)$ は

$$w(x)=[1-F(T)]\delta(x)+[1-F(T)]\sum_{n=1}^{\infty}[f(x)]^{n*} \quad \cdots\cdots(17)$$

で与えられる。ただし $\delta(x)$ はいわゆるデルタ関数である。

式 (17) の両辺のラプラス変換をとれば

$$w(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}w(x)dx$$
$$=[1-F(T)]+[1-F(T)]\times\int_0^{\infty} e^{-sx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[f(x)]^{n*}\right\}dx$$
$$=[1-F(T)]+[1-F(T)]\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[f(s,T)]^n\right\}$$
$$=[1-F(T)]+[1-F(T)]\cdot\frac{f(s,T)}{1-f(s,T)} \quad \cdots\cdots(18)$$

ただし，

$$f(s,T)=\int_0^T e^{-sx}f(x)dx,\quad |f(s,T)|<1$$

式 (11) で与えられる $f(x)$ に対して $f(s,T)$ はつぎのように求められる。

$$f(s,T)=\int_0^T e^{-sx}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}[1-e^{-(\lambda_2+s)T}]$$

$$1-F(T)=\int_T^{\infty}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx=e^{-\lambda_2 T}$$

この2つの式を式 (18) に代入して

$$w(s)=\frac{(s+\lambda_2)e^{-\lambda_2 T}}{s+\lambda_2 e^{-(\lambda_2+s)T}} \quad \cdots\cdots(19)$$

これがサービス時間分布の密度関数のラプラス変換形である[2)]。

さて，サービス時間分布の平均値 $\bar{x}$ は $w(s)$ を s で微分して $s=0$ とおくことによって

$$\bar{x}=\frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2 T}-1-\lambda_2 T) \quad \cdots\cdots(20)$$

この分布の $\bar{x}$ のまわりの分散を $\sigma^2(x)$ で表わすことにすれば

$$\sigma^2(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

しかるに

$$E(x^2)=\frac{d^2}{ds^2}\{w(s)\}|_{s=0}$$
$$=\frac{1}{\lambda_2^2}[2(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 T e^{\lambda_2 T}-e^{\lambda_2 T})+(2\lambda_2 T+\lambda_2^2 T^2)]$$

$$[E(x)]^2=\bar{x}^2$$
$$=\frac{1}{\lambda_2^2}[e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 T e^{\lambda_2 T}-2e^{\lambda_2 T})+(1+2\lambda_2 T+\lambda_2^2 T^2)]$$
$$=\frac{1}{\lambda_2^2}(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 T e^{\lambda_2 T}-1)$$
$$-\frac{2}{\lambda_2^2}\left[e^{\lambda_2 T}-\left(1+\lambda_2 T+\frac{\lambda_2^2 T^2}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \sigma^2(x)=\frac{1}{\lambda_2^2}(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 Te^{\lambda_2 T}-1) \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

ここで，式 (20) で与えられる $\bar{x}$ を平均サービス時間（平均サービス率 $1/\bar{x}$）とする指数サービス分布の密度関数 $g(y)$ を考えてみると

$$g(y)=\frac{1}{\bar{x}}e^{-(1/\bar{x})y}, \quad \bar{y}=\bar{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

平均値 $\bar{y}$ のまわりの分散 $\sigma^2(y)$ は $1/(1/\bar{x})^2=\bar{x}^2$ で与えられるから上記のごとく，

$$\sigma^2(y)=\frac{1}{\lambda_2^2}\left\{(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 Te^{\lambda_2 T}-1) -2\left[e^{\lambda_2 T}-\left(1+\lambda_2 T+\frac{\lambda_2^2 T^2}{2}\right)\right]\right\} \cdots (23)$$

しかるに，$\lambda_2 T \leq 1$ のとき { } 内の第2項を省略すれば

$$\sigma^2(y)\approx\frac{1}{\lambda_2^2}(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 Te^{\lambda_2 T}-1) \cdots\cdots\cdots (24)$$

したがって，式 (21) と (24) からつぎの関係が成り立つ。

$$\sigma^2(y)\approx\sigma^2(x), \quad \lambda_2 T\leqq 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

つぎに原点に関する2次モーメントを吟味してみる。

式 (19) をラプラス変換形とする確率密度関数 $w(x)$ の原点に関する2次モーメントはすでに求めたとおり

$$E(x^2)=\frac{1}{\lambda_2^2}[2(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 Te^{\lambda_2 T}-e^{\lambda_2 T}) +(2\lambda_2 T+\lambda_2^2 T^2)]$$

$g(y)$ のそれは $2/(1/\bar{x})^2=2\bar{x}^2$ であるから

$$\begin{aligned}E(y^2)&=\frac{2}{\lambda_2^2}(e^{\lambda_2 T}-1-\lambda_2 T)^2\\&=\frac{1}{\lambda_2^2}\left\{2(e^{2\lambda_2 T}-2\lambda_2 Te^{\lambda_2 T}-e^{\lambda_2 T})\right.\\&\quad+(2\lambda_2 T+\lambda_2^2 T^2)\\&\quad\left.-2\left[e^{\lambda_2 T}-\left(1+\lambda_2 T+\frac{\lambda_2^2 T^2}{2}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

同様に $\lambda_2 T\leqq 1$ のとき { } 内第3項を無視すれば

$$E(x^2)\approx E(y^2), \quad \lambda_2 T\leqq 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

がえられる。

以上により，$\lambda_2 T\leqq 1$ のとき2つの確率密度関数 $w(x)$, $g(y)$ の平均値と原点とに関する2次モーメントはそれぞれほぼ相等しいこと，したがって実用的にはサービス時間分布として $w(x)$ のかわりに指数サービス分布 $g(y)$ を用いて計算してよいといえる。すなわち，式 (10) に仮定されている指数サービス時間分布は実は式 (22) で与えられて，その平均サービス率は $\mu=1/\bar{x}$ である。

さて，時刻 $t=c$ においてバス後方に行列をなしている車の平均台数を $\bar{n}(c)$ とすれば

$$\bar{n}(c)=\sum_{n=0}^{\infty}np_n(c) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

バスが時刻 c に発車すればそれにつづいてその後方で待っていた車も順次発車していく。これらの車の発車時間間隔を一定値 τ とすれば，最初にできた長さ $\bar{n}(c)$ の行列が解消するまでの所要時間は $\tau\bar{n}(c)$ であり，この間に新しく到着する車によって待ち行列が追加される。このように行列は先頭から順次解消していく一方，後部に新しく追加されていく。明らかに，$\lambda_1\tau=1$ ならば行列はいつまでも解消せず，$\lambda_1\tau>1$ ならば行列はしだいに長くなっていく。いま，$\lambda_1\tau<1$ を仮定すれば，行列が解消するまでに行列に加わった車の総数（$\bar{n}(c)$ も含めて）N は Borrel-Tanner 分布

$$P(N|r)=\left(\frac{r}{N}\right)\frac{(N\lambda_1\tau)^{N-r}e^{-N\lambda_1\tau}}{(N-r)!}, \quad N\geq r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

にしたがう[3]。ここで r は $\bar{n}(c)$ に相当するが整数値であるのでつぎのように定義しておこう。

$$r=[\bar{n}(c)]+\delta\{\bar{n}(c)-[\bar{n}(c)]\}$$

ただし，$[x]$：x をこえない最大の整数

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x=0\\1, & x>0\end{cases}$$

N の平均値 $\bar{N}$ はつぎのように与えられる。

$$\bar{N}=\frac{r}{1-\lambda_1\tau} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

バスが発車した後，後方の待ち行列が完全に解消するまでの時間は $\bar{N}\tau$，したがってバスが停車してからその車線が閉塞された時間は $c+\bar{N}\tau$ となる。いま，外側1車線当り交通量を v，1時間当りバスの停車回数を m とするとき交通量の低下率を次式で定義する。

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{m}{3\,600}(c+\bar{N}\tau) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

v として可能容量をとり，$\lambda_1=v/3\,600$ として式 (29) から $\bar{N}$ を求めれば式 (29) から容量低下率を算定することができる。

つぎに，バス停車による車線閉塞のために生じた総損失時間（総待ち時間）について吟味してみる。

時刻 $t=c$ 以後新しく行列に加わって待った車の台数は $\bar{N}-r=(r\lambda_1\tau)/(1-\lambda_1\tau)$ である。このうち第 i 番目の車が到着したときその前方にいる行列台数は

$$r-\frac{i}{\lambda_1\tau}+i-1$$

であるから，自身の発車おくれ τ をも含めてその損失時間は

$$\left(r-\frac{i}{\lambda_1\tau}+i-1\right)\tau$$

となる。したがって $(\bar{N}-r)$ 台の損失時間の総和は

$$\begin{aligned}s_1&=\sum_{i=1}^{\bar{N}-r}\left(r-\frac{i}{\lambda_1\tau}+i\right)\tau\\&=(\bar{N}-r)r\tau-\frac{(1-\lambda_1\tau)(\bar{N}-r)(\bar{N}-r+1)}{2\lambda_1}\\&=\frac{\lambda_1(r\tau)^2}{2(1-\lambda_1\tau)}-\frac{r\tau}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31)\end{aligned}$$

時刻 c までにすでに行列をつくって待っていた r 台が時刻 c 以後に受けた損失時間は

$$s_2=\sum_{i=1}^{r} i\tau=\frac{1}{2}r(r+1)\tau \quad \cdots\cdots(32)$$

したがって，バス発車以後の総損失時間は

$$s_3=s_1+s_2=\frac{r^2\tau}{2(1-\lambda_1\tau)} \quad \cdots\cdots(33)$$

さらに時刻 $t=0\sim c$ 間の損失時間は近似的に

$$s_4=\sum_{k=1}^{l}\overline{n}(k\cdot\Delta t)\cdot\Delta t,\quad l=c/\Delta t \quad \cdots\cdots(34)$$

で与えられるから $\Delta t=1\,\mathrm{sec}$ とすれば

$$s_4=\sum_{t=1}^{c}\overline{n}(t),\quad \overline{n}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}np_n(t) \quad \cdots\cdots(35)$$

したがって 1 回のバス停車により生じる後続車の総損失時間は式 (33)，(35) より

$$s=s_3+s_4=\sum_{t=1}^{c}\overline{n}(t)+\frac{r^2\tau}{2(1-\lambda_1\tau)} \quad \cdots\cdots(36)$$

で与えられ，1 時間当りバス停車回数を m とすれば，平均 1 時間当り総損失時間 S は

$$S=ms=m\left[\sum_{t=1}^{c}\overline{n}(t)+\frac{r^2\tau}{2(1-\lambda_1\tau)}\right] \quad \cdots\cdots(37)$$

によって求めることができる。

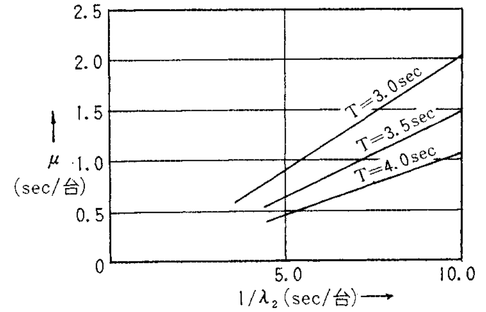
4. 計算結果および考察

式 (10) の μ の値として式 (20) で与えられる $\bar{x}$ の逆数を用いることができるから

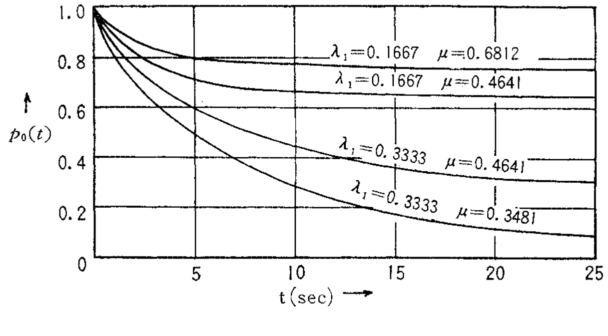
$$\mu=\frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2 T}-1-\lambda_2 T} \quad \cdots\cdots(38)$$

すなわち平均サービス率は λ_2 と T で定まる。若干の

図—6 平均サービス率



図—7 $p_0(t)$ の推移



表—2 $p_n(t)$ および $n(t)$ の変化

（$\lambda_1=0.1667$ 台/sec，$\mu=0.4641$ 台/sec）

n \ t	0 sec	5	10	15	20	25	29
0 台	1.0000	0.7110	0.6669	0.6527	0.6469	0.6439	0.6422
1	—	0.2196	0.2299	0.2307	0.2306	0.2304	0.2301
2	—	0.0556	0.0740	0.0792	0.0811	0.0819	0.0821
3	—	0.0115	0.0218	0.0260	0.0279	0.0287	0.0291
4	—	0.0020	0.0058	0.0081	0.0093	0.0099	0.0102
5	—	0.0003	0.0014	0.0024	0.0030	0.0033	0.0035
6	—	—	0.0003	0.0006	0.0009	0.0011	0.0012
7	—	—	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
8	—	—	—	—	—	0.0001	0.0001
9	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—
$\overline{n}(t)$	0.0000	0.3748	0.4753	0.5166	0.5363	0.5464	0.5506

注：—は 0 を示す

T および λ_2 に対して μ の値を 図—6 に示す。

$$e^{\lambda_2 T}-1-\lambda_2 T\approx(\lambda_2 T)^2/2$$

から $\mu\approx 2/\lambda_2 T^2$ となり μ は λ_2 に逆比例することが示され 図—6 はこのことを表現している。

式 (10) で与えられる $p_n(t)$ の計算結果の一例を表—2 に示す。この表は $\mu=0.4641$ 台/sec ($\lambda_2=0.3333$ 台/sec，$T=3.0$ sec)，$\lambda_1=0.1667$ 台/sec に対する値である。図—7 に $p_0(t)$ の変化のようすを示す。この図から，$p_0(t)$ は時間がたつにつれて減少し，当然のことであるがサービス率 μ が大きいほど $p_0(t)$ も大きいことがわかる。すなわち，$\lambda_2 T$ が小さくなるにしたがって内側車線に流入できる確率が大きくなり，バスの後方で 1 台の車も待っていないという状態はおこりやすくなる。

式 (10) において $\rho<1$ のとき $\lim_{t\to\infty}p_n(t)=(1-\rho)\rho^n$ が証明されている[4]。バスの停車時間 $t\to\infty$ のときこの収斂条件 $\rho<1$ について検討してみる。

$\rho<1$ ならば，$\lambda_2 T\leqq 1$ という条件から $\lambda_1 T<2$。したがって不等式

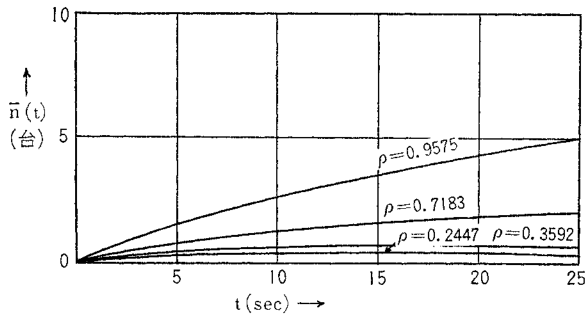
$$\lambda_1 T+\lambda_2 T<3 \quad \cdots\cdots(39)$$

は $\rho<1$ のための必要条件である。ところで実際上，バス停留所地点では停車したバスのために外側車線から内側車線に流入する車があり，内側車線の交通量はそれだけ増加するが，この増加した交通量は内側車線の交通容量をこえることができない。すなわち λ_0 をその容量に相当する最大の到着率とすれば，$\lambda_1+\lambda_2>\lambda_0$ のとき $\lambda_1\to\lambda_2$ のごとき流入がおこるが λ_2 は λ_0 をこえることができないから流入は λ_1 のうちの一部分だけがおこない，残りの車はもはや内側車線に流入できない。したがって $\lambda_1+\lambda_2>\lambda_0$ ならば事実上定常状態は存在しない。定常解が存在するための必要条件は

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2\leqq\lambda_0,\quad \lambda_0：\text{定数}\\ \text{あるいは，}\\ \lambda_1 T+\lambda_2 T\leqq\lambda_0 T\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(40)$$

実際上の見地から流入のための最小の車頭間隔

図—8　平均行列台数の変化



を $T=2/\lambda_0+\varepsilon$, ($\varepsilon$：定数) とおき，これを式 (40) の第2式に代入してつぎの関係を得る。

$$\lambda_1 T+\lambda_2 T \leqq 2+\lambda_0\varepsilon \quad \cdots\cdots(41)$$

式 (39) と (41) から，$\lambda_0\varepsilon \leqq 1$ ならば式 (41)，$\lambda_0\varepsilon > 1$ ならば式 (39) がそれぞれ定常解存在の必要条件である。それぞれの場合に $\lambda_2 T \leqq 1$ を定めれば，$\lambda_1 T \leqq 1+\lambda_0\varepsilon$，($\lambda_0\varepsilon \leqq 1$) および $\lambda_1 T < 2$，($\lambda_0\varepsilon > 1$) が必要条件となる。

時刻 t における平均行列台数 $\bar{n}(t)$ を示したものが図—8 である。$\rho \leqq 0.5$ の範囲では $\bar{n}(t)$ はバス停車時間 (10～25秒) 内に一定値に達する。しかも $\bar{n}(t) < 1$ であり，このことはバスの後方に待っている台数が1台か0台かである場合がほとんどであり，したがって交通遅滞はきわめて小さいことを意味する。$\rho \leqq 0.5$ から $\lambda_1 T \leqq 1$ が導かれる。$\rho > 0.9$ になると $t=25$ 秒においてなお過渡状態にある。図—8 で $\rho=0.9575$ なる曲線は $\lambda_1=0.3333$ 台/sec，$\mu=0.3481$ 台/sec ($\lambda_2=0.2500$ 台/sec，$T=4.0$ sec) に対するものである。いま，外側車線の交通容量を 1 200 台/時 ($\lambda_1=0.3333$ 台/sec)，バスの停車時間 $c=25$ sec，停車回数 $m=12$ 回/時，待ち行列車の発車間隔 $\tau=1.5$ sec とすると交通容量の低下率は式 (30) から約 13.3%，1時間当り総損失時間は式 (37) によって約 22 分となる。

ここで同方向2車線当り交通量が一定すなわち $\lambda_1+\lambda_2=\lambda$ (一定) という条件のもとで，バスが停車したため外側車線の車はバスのかなり後方であらかじめできるだけ多く内側車線へ移行して走行すると考えてみよう。この移行現象は内側車線の容量いっぱいになるまでつづき，内側車線に移行できない車だけがバスの後方で待ち行列をつくり，この行列車はもはや内側車線に流入することができない。この状態で外側車線，内側車線の車の到着率をそれぞれ λ_1'，λ_2' (λ_2' は内側車線交通容量に相当する到着率) とすると，バス停車時間内にできる行列台数は $c\lambda_1'$，行列が解消するまでに行列に加わった平均総台数 $\bar{N}'$ は式 (29) の r を $c\lambda_1'$ でおきかえて，$\bar{N}'=c\lambda_1'/(1-\lambda_1'\tau)$ となる。

一般に交通遅滞がとくに問題となるのは交通量（到着率）λ が比較的大きい場合であるから，その場合の $\bar{N}$，$\bar{N}'$ の大小について検討してみる。

図—8 において $\rho=0.9575$ と $\rho=0.7183$ との曲線に注目すると，同じ λ_1 の値 0.3333 台/sec に対し前者は ($\lambda_2=0.2500$ 台/sec，$T=4.0$ sec)，後者は ($\lambda_2=0.3333$ 台/sec，$T=3.0$ sec) であることからわかるように，式 (35) 第2式に示す $\bar{n}(t)$ は T の大小によって左右されるところが大きい。もし後者で $T=4.0$ sec として計算すればその $\bar{n}(t)$ は前者の $\bar{n}(t)$ よりかなり大きくなるはずである。いずれの場合にもさらに大きい T に対して $\bar{n}(t)$，したがって $\bar{N}$ はさらに大きいと推測される。一方，$\bar{N}'$ は外側車線に残されて走行する車の平均到着率 λ_1' だけで定まり T に無関係である。なお，交通量が小さいとき $\lambda_1' \approx 0$，したがって $\bar{N}' \approx 0$ である。また $\bar{N}'$ と $\rho=0.9575$ の場合の $\bar{N}$ とを比較してみると表—3 にみるように，$\bar{N}' \leqq \bar{N}$ かつ $\bar{N}' \approx \bar{N}$ であり，この場合の低下率は $\bar{N}'$ による方が若干小さく算定されるがほとんど大差ない。ただ，バスの停車時間 c を非常に長くすれば，$\bar{n}(c)$ が一定値に収斂するような場合でも $c\lambda_1'$ は c に比例して増大するから $\bar{N}' > \bar{N}$ となることはありうる。

表—3　$\bar{N}$ と $\bar{N}'$ の比較

c	$\lambda_1=0.3333$, $\lambda_2=0.2500$		$\lambda_1'=0.2500$, $\lambda_2'=0.3332$	
(sec)	$\bar{N}$ (台)	低下率 (%)	$\bar{N}'$ (台)	低下率 (%)
10	6	6.3	5	5.8
15	8	9.0	7	8.5
20	10	13.3	8	9.0
25	10	13.3	10	13.3

λ_1，λ_2 および T の種々の組み合せについての計算が未完了の段階でやや焦急な判断かもしれないが，ある T の値に対して，交通量が大きく $\lambda_2 T > 1$ である場合は $\bar{N}'$ による簡便式が有効であると思われる。この簡便式によって算定した低下率は $\bar{N}$ によるものよりやや小さいが大差はなく実用的には十分である。$\bar{N}$ と $\bar{N}'$ との方式をつかいわける際その境界となる交通量は，適当な T に対して $\lambda_2 < 1/T$ ならば $\bar{N}$，そうでなければ $\bar{N}'$ とすればよい。

5. 結　　論

本研究では，路側の停留所にバスが停車するためにおこる当該車線の交通疎通能力の低下率および平均損失時間を待ち合せモデルによって確率論的に算定することを試み，あわせてそれらの簡便計算法についても考察した。本研究のこれまでの段階でえた結論をとりまとめるとつぎのとおりである。

(1) バスが路側の停留所に停車して1車線を閉塞するために，自由走行している車に停滞現象が生じるが，

この停滞現象は待ち合せ問題として解くことができる。

（2） 停車したバスの直後の車が待っているという現象を「サービスをうけている」と考え，内側車線（片側1車線の道路ならば対向車線）上の車は平均到着率 λ_2 の任意到着，内側車線上に T 以上の車頭間隔があればサービス中の車がサービスを完了する（その間隔内に内側車線へ流入する）」と考えれば，$\lambda_2 T \leqq 1$ のときこの待ち合せ系は近似的に「ポアソン到着，窓口1個の先着順指数サービス」として解くことができる。$\lambda_2 T > 1$ の場合には，式 (29) の r を $c\lambda_1'$ で，λ_1 を λ_1' でおきかえることによってえられる値を式 (30) の $\bar{N}$ として用いる簡便計算法が有効である。この簡便方式は，同方向2車線当り合計交通量が内側車線交通容量をこえる場合，そのこえる部分だけが外側車線上を走行してバスの後ろに到着し（この平均到着率が λ_1' である）待ち行列を形成するという考え方にもとづく。

（3） バスの停車時間が比較的短いために，この待ち合せ系の解は過渡状態における解でなければならない。この過渡解の数値計算は少し手間を要するので電子計算機による必要がある。

（4） この過渡解から交通遅滞による損失時間を直接求めることは困難であるが式 (36) によって十分な精度で平均損失時間を求めることができる。

（5） 外側車線平均到着率を λ_1，平均サービス率を μ として $\rho=\lambda_1/\mu$ とおけば，$\rho \leqq 0.5$ 程度ならばバスの後方にたまる車の台数は平均1台以下であるから，交通遅滞は実際上ほとんど無視できる。

（6） ρ が大きくなるにしたがって交通遅滞も大きくなり，$\rho > 0.5$ に対しては約30秒後になお過渡状態にある。ρ が1に近いか1より大きい場合交通遅滞量はきわめて大きくなるので適切な停留所対策が望まれる。

（7） $\rho \leqq 0.5$ ならば交通遅滞は小さい。このための必要条件は $\lambda_1 T < 1$ である。$\rho \geqq 0.9$ ならば交通遅滞が大きいがこのためには $\lambda_1 T \geqq 1.8$ でなければならない。

（8） $t \to \infty$ のとき $p_n(t)$ が定常状態に達するための必要条件は，$\lambda_2 T \leqq 1$ の仮定のもとで

$$\lambda_1 T \leqq 1+\lambda_0\varepsilon, \quad \text{ただし } \lambda_0\varepsilon < 1$$

$$\lambda_1 T < 2 \qquad \text{ただし } \lambda_0\varepsilon \geqq 1$$

ここに λ_0 は内側車線の交通容量に相当する平均到着率，ε は定数である。

（9） 外側車線の交通量を 1200台/時，内側車線交通量 900台/時，$T=4.0$ sec，待ち行列車の発車間隔 $\tau=1.5$ sec，バス停止回数 $m=12$ 回/時，停車時間 $c=25$ sec のとき外側車線の交通疎通能力低下率は約13%，平均1時間当り総損失時間は約22分である。簡便方式によると（$\lambda_2'=\lambda_0=1200/3600$ 台/秒と仮定） 同じく低下率約13% である。

6. む す び

本研究はさらに検討すべき問題を残している。おもな問題点を列挙すれば

（1） λ_1 と μ の多くの組み合せについて計算を行なってえられる交通疎通能力低下率と簡便計算式による低下率とを比較し近似の程度をしること。

（2） 内側車線に流入しようとして待っている車はそこに T 時間以上の車頭間隔があれば必らず流入すると考えたが，実状は必らずしもそうでなく，流入するか否かは運転者の性格，車の性能等により左右される。運転者の判断に別の分布形（たとえば指数曲線）を仮定したとき交通遅滞はどうなるか。

（3） バスのような大型車でなく小型車が路側に駐停車した場合，一つの車線が完全に閉塞されるとみなすことは不合理である。このような場合の交通遅滞を論ずるには確率論的な接近方法でなく流体力学的な接近が有効であると思われる。

本研究に当っては，京都大学工学部交通土木工学教室米谷栄二教授，同佐佐木　綱助教授より懇切なるご指導をたまわったことを記しここに感謝の意を表します。

参 考 文 献

1) T.L. Saaty : "Elements of Queueing Theory", McGraw-Hill, 1961.
2) F.A. Haight : "Mathematical Theory of Traffic Flow", Academic Press, 1963.
3) 2) に同じ
4) 1) に同じ

（1965. 6. 22・受付）