

# トラス橋のねじれに関する研究

## AN INVESTIGATION OF TRUSS BRIDGES UNDER TORSIONAL LOADING

奥村 敏恵\*・渡辺 啓行\*\*

By Toshie Okumura and Hiroyuki Watanabe

### 1. 緒言

幅員の大きな橋梁において、その横構は、座屈変形に対する安全性から、かなり大きな断面を必要とし設計上の一つの難点となる。しかし、この場合、弦材または主桁フランジはその剛度により横構の変形を拘束するので、たとえばトラス橋では、弦材の剛度を考慮することにより、横構断面はある程度軽減される。すなわち、橋梁のねじれ剛度は、従来行なわれているように、部材軸力のみから算定すると低い値をとるので、弦材諸剛度を無視して計算することは合理的ではない。本論文は、このような観点からく形断面をもつ立体トラス柱体のねじれにおける弦材の挙動を究明しようとするものである。

薄肉弾性ばりのねじれに関する研究はすでに多くの研究者により解析され、したがって、文献も非常に多いが、これにくらべてトラス柱体のねじれに関する文献は少ないように思われる。トラス柱体のねじれを解析する方法には、大きくわけて、直接トラスを解析するものと、トラスを理想化して、薄肉弾性ばり理論の応用から解析するものとの2種類がある。つり橋の補剛トラスのねじれを後者により解析した文献に、Bleich, F.<sup>1)</sup>, Nan sze Sih<sup>2)</sup>らがあり、トラス壁板をせん断変形の等しい薄板に換算して薄肉弾性ばり理論から解析した文献には、Wansleben, F.<sup>3)</sup>, Resinger, F.<sup>4)</sup>がある。また、薄肉弾性ばりからトラス壁体構造への中間的段階として、4つのコーナーフランジをもつ Shell 構造のねじれを解析した文献に、Paul Kuhn<sup>5)</sup>がある。

本論文にあっても、トラスをある程度理想化して扱うことにする。

### 2. 理論的考察

#### (1) 計算上の仮定および解析の概略

パネルごとに断面が変化しないトラスが端トルクを受けた時の変形と応力に関して、弦材諸剛度を考慮に入れた解析を行なう。架構形式は、主構ワーレン、横構ダブルワーレンとし、境界条件としては、理論的考察と平行して行なった実験が、そりに対して両端固定としているので、これを対象に解析する。

端に与えたトルクは、各部材に軸力による変形と、弦材にはその諸剛度と各部材諸元にしたがった変形を生ずる。すなわち、外力は以上の2種の変形エネルギーとして各材に分配される。前者に対しては、応力の流れを理想化して変形の適合よりトラス各節点の変形を計算し、後者に対しては、曲げねじれ変形の際節点で弦材のたわみ角が連続する条件と、さらに節点で前者の変形と弦材の変形とが適合する条件とから節点間の弦材の変形を計算する。前者のうち、単純ねじれ変形を未知パラメータに選ぶと、以上の条件から、すべての変形および変形エネルギーはこの未知パラメータで表示され、これと外力のなす仕事とに、Clapeyronの定理を適用すれば、外力と未知パラメータの関係が得られる。

この計算の基礎となる仮定のうち、おもなるものをつぎに示す。

- 変形は微小であり、変形後も柱体の断面はく形を保つものとする。
- 主構斜材による柱体断面のねじれ中心の移動は微小として、平均的に断面図心と一致するものとする。
- 全トラスを構成する各単位トラスの間には面内には剛であるが面外には剛性を示さない隔壁が入っているものとし、外部トルクはこの隔壁にのみ加えられるものとする<sup>6)</sup> (実際には隔壁のわかりに垂直材と対傾構がその働らきをする)。
- 弦材は節点で剛節とするが、腹材は弦材に球形自在継手でとりつけられているものとする<sup>6)</sup>。
- 弦材は二軸以上の対称断面からなるものとし、腹材は弦材のせん断中心を通るものとする。
- 柱体断面の幅と高さおよび単位トラス長は一定とする。

#### (2) 記号

計算に際して、つぎの記号を用いる。この他に必要に応じていくつかの記号を用いるが、これらはそのつど説明する。

$b, d$ : 柱体断面の幅と高さ

$\lambda$ : 単位トラス長

$l_h, l_v$ : 水平系, 垂直系の斜材長

$A$ : 弦材断面積

$A_h, A_v$ : 水平系, 垂直系斜材断面積

$\tau_h, \tau_v$ : 水平系, 垂直系斜材が弦材と交わる角

\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 電力中央研究所技術研究所

- $n$  : トラスの組数
- $r$  : 単位トラスを一端から数えた番号
- $\mu$  :  $\sin^2 r \cos r$
- $\phi$  : 単位トラスのみかけの単純ねじれ角
- $\phi_r^X$  : そり拘束軸力による  $r$  番目単位トラスの付加回転角
- $\theta$  : トラスの任意点の回転角
- $w^T$  : トルクによる単位トラスのそり

$T$  : 端に与えるトルク

$E, G$  : 材料の縦, 横弾性係数

(3) 部材軸力による変形

トラスを節点ごとに切り離した単位トラスのうち,  $r$  番目の単位トラス(図-1(a))の変形を考える。単純ねじれ角を単位トラスにつき,  $\phi$  とすると, これによる各材の変形状態は 図-1 (b), (c) のようになり, 腹材の伸びは

$$\begin{aligned} \epsilon_h^\phi &= -\epsilon_h^{\phi'} = \frac{d L_h}{l_h} \\ &= \frac{d}{2} (\sin r_h \cos r_h) \frac{\phi}{\lambda} \\ \epsilon_v^\phi &= \frac{d L_v}{l_v} = \frac{b}{2} (\sin r_v \cos r_v) \frac{\phi}{\lambda} \end{aligned}$$

したがって, この水平成分, すなわち隔壁に作用するトルクにより腹材に伝えられるせん断力は

$$\mu = \sin^2 r \cos r \dots\dots\dots (1)$$

とおくと

$$S_h^\phi = 2 A_h \mu_h \frac{d}{2} \frac{\phi}{\lambda} E, \quad S_v^\phi = A_v \mu_v \frac{b}{2} \frac{\phi}{\lambda} E$$

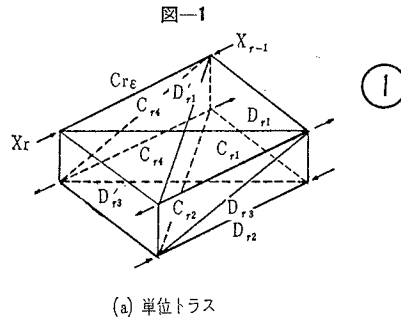
となり, これらは 図-1 (b) のように流れる。単純ねじれ角によって単位トラスには, 図-1 (d) に示すようなそりが生ずる。これによる腹材の伸びを 図-1 (e) に示す。これより, そりに相当するせん断力は全く同様にして,

$$S_h^w = 2 A_h \mu_h \frac{2}{b} w^T E, \quad S_v^w = -A_v \mu_v \frac{2}{d} w^T E$$

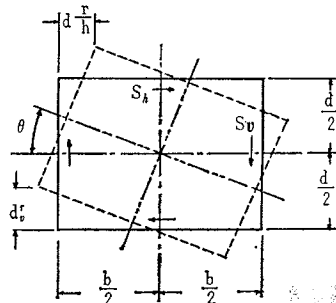
以上により, そり拘束のない場合  $r$  番目単位トラス腹材に作用するせん断力の合計は,

$$\begin{cases} S_h = 2 A_h \mu_h \left( \frac{d}{2} \frac{\phi}{\lambda} + \frac{2}{b} w^T \right) E \\ S_v = A_v \mu_v \left( \frac{b}{2} \frac{\phi}{\lambda} - \frac{2}{d} w^T \right) E \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

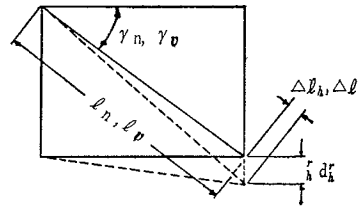
ここで, せん断流理論において単純ねじれについて成り立つせん断流のつりあいから



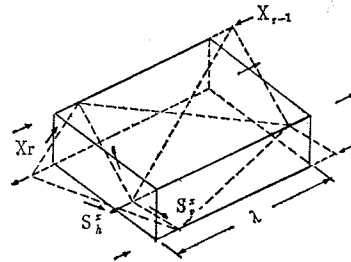
(a) 単位トラス



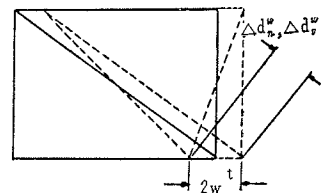
(b) 回転変形



(c) 回転による斜材の伸び



(d) 反り変形



(e) 反りによる斜材の伸び

$$\frac{S_h}{b} = \frac{S_v}{d} \dots\dots\dots (3)$$

これより

$$W = \frac{b d}{4} \frac{A_v \mu_v b^2 - 2 A_h \mu_h d^2}{A_v \mu_v b^2 + 2 A_h \mu_h d^2} \dots\dots\dots (4)$$

とおくと, トルクによるそりは

$$w^T = W \frac{\phi}{\lambda} \dots\dots\dots (5)$$

式(4),(5)を式(2)に代入すれば

$$\begin{cases} S_h = \frac{2 b^2 d A_v A_h \mu_h \mu_v E}{A_v \mu_v b^2 + 2 A_h \mu_h d^2} \frac{\phi}{\lambda} \\ S_v = \frac{2 b d^2 A_v A_h \mu_h \mu_v E}{A_v \mu_v b^2 + 2 A_h \mu_h d^2} \frac{\phi}{\lambda} \end{cases} \dots\dots\dots (3)'$$

これより, 部材軸力のみを考えた場合のトルクと単純ねじれ変形との関係は,

$$T^\phi = b S_v + d S_h = \frac{4 b^2 d^2 A_v A_h \mu_h \mu_v E}{A_v \mu_v b^2 + 2 A_h \mu_h d^2} \frac{\phi}{\lambda} \quad (6)$$

式(3)'で与えられるせん断力によって各腹材に発生する軸力は, 隔壁が面内に剛であるという仮定からつぎのよ

りに計算される。図-1 (a) の記号に従って

$$\begin{cases} D_{r1} = -D_{r1}' = D_{r3} = -D_{r3}' = -\frac{1}{2} \frac{L_h}{b} S_h \\ D_{r2} = -D_{r4} = \frac{L_v}{d} S_v \\ \dots\dots\dots(7) \end{cases}$$

つぎに、初めに切り離れた単位トラスを連続させることを考える。単純ねじれ変形によって各単位トラスに生ずるそりは、変断面の場合など、一般には異なった値をとり、変断面でなくても境界条件によっては、付加的なそり変形を生ずる。これらのそりは節点で連続しなければならないことより、各単位トラスの両端で弦材に図-1 (a), (d) に示すようなそり拘束力を仮定する。これらの力は、トラス断面内で、零合成力、零合成モーメントを構成し、絶対値は等しいが、逆対称に働き、総称して bimoment と呼ばれる<sup>7)</sup>。この bimoment によって単位トラスの腹材に生ずるせん断力は、単位トラス内では両端の隔壁の他に外力を伝えるメンバーがないから長手方向に、したがって、これと直角方向にも一定である<sup>5)</sup>。このせん断力を、 $S_h^X$ 、 $S_v^X$  とすると、これらは 図-1(d) のように働き、この軸力はトルクを生じないことから

$$S_{hr}^X \cdot d - S_{vr}^X \cdot b = 0$$

また、弦材に働く力のつりあいから

$$X_r - X_{r-1} = \frac{S_{hr}^X}{b} \lambda + \frac{S_{vr}^X}{d} \lambda$$

上2式より

$$\begin{cases} S_{hr}^X = \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda} (X_r - X_{r-1}) \\ S_{vr}^X = \frac{1}{2} \frac{d}{\lambda} (X_r - X_{r-1}) \end{cases} \dots\dots\dots(8)$$

このせん断力により腹材に生ずる軸力は、式(7)の場合と全く同様にして求まり

$$\begin{cases} D_{r1}^X = -D_{r1}^{X'} = D_{r3}^X = -D_{r3}^{X'} \\ = \frac{1}{4} \frac{L_h}{\lambda} (X_r - X_{r-1}) \\ D_{r2}^X = -D_{r4}^X = \frac{1}{2} \frac{L_v}{\lambda} (X_r - X_{r-1}) \end{cases} \dots\dots(9)$$

式(8)で与えられるせん断力は、前に述べた理由から単位トラス内で一定であるから、そり拘束力によって弦材に生ずる応力は、長手方向で  $X_r$  と  $X_{r-1}$  とを結ぶ直線分布となる。図-1 (a) の記号を用いると、

$$\begin{aligned} C_{1r} = -C_{2r} = C_{3r} = -C_{4r} = X_{r-1} \\ + (X_r - X_{r-1}) \frac{\xi}{\lambda} \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

( $0 \leq \xi \leq \lambda$ )

以上による全軸力を表にまとめておく。

そりを拘束することによって生ずる拘束軸力  $X_r$  はトラス柱体に付加的な回転変形を生ずる。すなわち、与えられたトルクがすべて式(7)の軸力に変わるのではな

表-1 r 番目単位トラスの軸 ( $0 \leq \xi \leq \lambda$ )

部材名	単純ねじれによる軸力	$X_r$ による軸力	$X_{r-1}$ による軸力	軸力の総計
$C_{1r}, -C_{2r}$ $C_{3r}, -C_{4r}$	—	$\frac{\xi}{\lambda} X_r$	$(1 - \frac{\xi}{\lambda}) X_{r-1}$	$X_{r-1} + (X_r - X_{r-1}) \frac{\xi}{\lambda}$
$D_{1r}, -D_{1r}'$ $D_{3r}, -D_{3r}'$	$-\frac{1}{2} \frac{L_h}{b} S_{hr}$	$\frac{1}{4} \frac{L_h}{\lambda} X_r$	$-\frac{1}{4} \frac{L_h}{\lambda} X_{r-1}$	$\frac{L_h}{4} \left\{ -\frac{2}{b} S_{hr} + \frac{1}{\lambda} (X_r - X_{r-1}) \right\}$
$D_{2r}, -D_{4r}$	$\frac{L_v}{d} S_{vr}$	$\frac{1}{2} \frac{L_v}{\lambda} X_r$	$-\frac{1}{2} \frac{L_v}{\lambda} X_{r-1}$	$\frac{L_v}{2} \left\{ \frac{2}{d} S_{vr} + \frac{1}{\lambda} (X_r - X_{r-1}) \right\}$

く、そりを拘束することにより、その一部が式(9)の軸力にも変わるのである。したがって、変形も  $\phi$  とは異なってくる。この付加変形をつぎのように求める。トルク  $T^X$  が働き、そり  $w^X$  を生じている系と、外力  $X_r$ 、 $X_{r-1}$  が 図-1 (d) のように働き、回転変形  $\phi_r^X$ 、 $\phi_{r-1}^X$  を生じている系とに相反作用定理を適用すると、

$$4(X_r - X_{r-1})w^X = T^X(\phi_r^X - \phi_{r-1}^X) \dots\dots(11)$$

$T^X$ 、 $w^X$  は  $\phi$  と同種のパラメータ  $\phi^X$  により式(5)、(6)と同様の形で与えることができ、これらを式(11)に代入すると、

$$\phi_r^X - \phi_{r-1}^X = \omega(X_r - X_{r-1}) \dots\dots\dots(12)$$

ただし、

$$\omega = \frac{1}{2Eb d \lambda} \left( \frac{L_h^3}{2A_h} - \frac{L_v^3}{A_v} \right) \dots\dots\dots(13)$$

そり拘束力  $X_r$ 、 $X_{r-1}$  は上記のような付加変形のほかに、単位トラスの両端に極部的なそり変形をも生ずる。図-1 (a) に示される r 番目単位トラスの②面に、 $X_r$  と全く同じ状態で外力  $X$  を作用させた時のこのそり変形を仮想仕事の原理から求めてみる<sup>5)</sup>。外力  $X$  によって各部材には表-1 で与えられているような軸力を生じ、同時に、載荷端では  $w_1^X$ 、これと反対側の端では  $w_2^X$  のそりがともに  $X$  の方向に生じてつりあっているものとする。 $w_1^X$  を求めるには、仮想荷重  $U$  を 図-1 (a) の  $X_r$  と全く同じ状態で②面に加え、 $w_2^X$  を求めるには  $U$  を ①面に 図-1 (a) の  $X_{r-1}$  と全く同じ状態で加える。仮想仕事の原理はつぎのように書ける。

$$\Sigma U w^X = \int \frac{\sigma^X}{E} \sigma^U dV$$

左辺の  $\Sigma$  は仮想荷重の働いている部材の数についての和を表わし、右辺の積分は軸力の働いているすべての材について行なうものである。荷重の方向とそりの方向を考慮し、部材軸力は表-1 を参考して、おのおの場合について上式をとくと、

$$\begin{aligned} w_1^X &= \frac{\lambda}{3EA} \cdot X + \frac{1}{8\lambda E} \left\{ \frac{b^2}{2A_h \mu_h} + \frac{d^2}{A_v \mu_v} \right\} \cdot X \\ w_2^X &= -\frac{\lambda}{6EA} X + \frac{1}{8\lambda E} \left\{ \frac{b^2}{2A_h \mu_h} + \frac{d^2}{A_v \mu_v} \right\} \cdot X \end{aligned}$$

$X=1$  のとき  $w_1^X=p$ 、 $w_2^X=q$  とおくと、

$$\begin{cases} p = \left\{ \frac{\lambda}{3A} + \frac{1}{8\lambda} \left( \frac{b^2}{2A_h \mu_h} + \frac{d^2}{A_v \mu_v} \right) \right\} \frac{1}{E} \\ q = \left\{ -\frac{\lambda}{6A} + \frac{1}{8\lambda} \left( \frac{b^2}{2A_h \mu_h} + \frac{d^2}{A_v \mu_v} \right) \right\} \frac{1}{E} \end{cases} \dots\dots\dots(14)$$

以上より、 $r$  番目単位トラスに作用するそり拘束力  $X_r, X_{r-1}$  によって端面に生ずる極部的なそりは、

- ① 面で  $X_{r-1}$  の方向に  $p \cdot X_{r-1} - q \cdot X_r$
- ② 面で  $X_r$  の方向に  $p \cdot X_r - q \cdot X_{r-1}$

したがって、 $r$  番目単位トラス端に生ずるそりの合計は

$$\begin{cases} w_{r,1} = w^T - (p \cdot X_{r-1} - q \cdot X_r) \\ w_{r,2} = w^T + (p \cdot X_r - q \cdot X_{r-1}) \end{cases} \dots\dots\dots(15)$$

したがって、その連続条件はつぎのように書ける。

$$w_{r,2} = w_{r,1} \dots\dots\dots(16)$$

式 (15) を代入すると、

$$-q \cdot X_{r-1} + 2p \cdot X_r - q \cdot X_{r+1} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

境界はそりに対して両端固定であるから、

$$w_{1,1} = w_{n,2} = 0$$

したがって式 (15) より、

$$\begin{cases} p \cdot X_0 - q \cdot X_1 = W \frac{\phi}{\lambda} \\ -q \cdot X_{n-1} + p \cdot X_n = -W \frac{\phi}{\lambda} \end{cases} \dots\dots\dots(18)$$

階差方程式を境界条件 (18) で解けば拘束力  $X_r$  を決定できるが、計算の便宜上行列で表示しておく。式 (17)、(18) をつぎのようにまとめて書くことができる。

$$F = \begin{bmatrix} p & -q & & & \\ -q & 2p & -q & & 0 \\ & -q & 2p & -q & \\ & & 0 & -q & 2p & -q \\ & & & -q & p \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & \dots & F_{0s} & \dots & F_{0n-1} & F_{0n} \\ F_{10} & F_{11} & \dots & F_{1s} & \dots & F_{1n-1} & F_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{r0} & F_{r1} & \dots & F_{rs} & \dots & F_{rn-1} & F_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{n-10} & F_{n-11} & \dots & F_{n-1s} & \dots & F_{n-1n-1} & F_{n-1n} \\ F_{n0} & F_{n1} & \dots & F_{ns} & \dots & F_{nn-1} & F_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_r \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} F_{00} - F_{0n} \\ F_{10} - F_{1n} \\ \vdots \\ F_{r0} - F_{rn} \\ \vdots \\ F_{n-10} - F_{n-1n} \\ F_{n0} - F_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(19)$$

とおくと、

$$x = W \frac{\phi}{\lambda} f \dots\dots\dots(20)$$

上式により拘束力も、単純ねじれ角をパラメータとして表示できる。したがって、付加変形もパラメータ  $\phi$  で表示できて、つぎようになる。

$$\phi^X = \omega W \frac{\phi}{\lambda} \begin{bmatrix} f_1 - f_0 \\ f_2 - f_0 \\ \vdots \\ f_r - f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} - f_0 \\ f_n - f_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

これより各節点の曲げねじれ変形は、

$$\phi_r = r \phi + \phi_r^X = \left\{ r + \frac{\omega W}{\lambda} (f_r - f_0) \right\} \phi = k_r \phi \dots\dots\dots(22)$$

これをまた、行列で表示しておく、

$$\Phi = [\phi_r], \quad k = [k_r] \quad (r=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots(23)$$

とおくと、

$$\Phi = k \phi \dots\dots\dots(24)$$

以上による全変形エネルギーは、最後につぎの形となる。

$$V \alpha X = \frac{1}{2} k_n \frac{4 b^2 d^2 A_v A_h \mu_v \mu_h E}{A_v \mu_v b^2 + 2 A_h \mu_h d^2} \frac{\phi^2}{\lambda} \dots\dots\dots(25)$$

(4) 弦材諸剛度の導入

トラスが回転する時、弦材の変形は図-2 (b) のように自身のせん断中心まわりの回転と、柱体断面の回転にともなう平行移動的な変形との2つにわけて考えられる。後者の変形が弦材のたわみ変形で、これは単一材としての弦材が節点でトラスより横方向のせん断力を受けて生ずる。

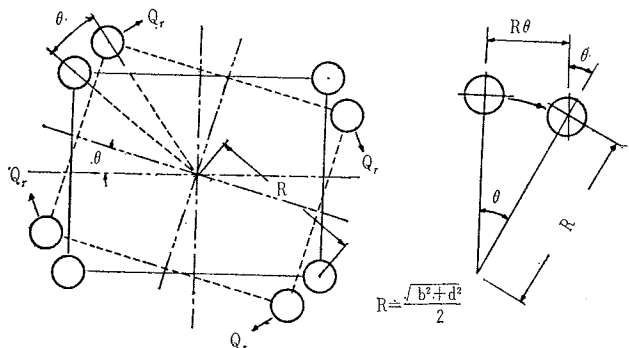
現在扱っているトラスはそりに対して両端固定であるから、弦材はたわみ角に対して両端固定である。すなわち図-2 (c) において、左端から任意点  $z$  における弦材の回転変形を  $\theta(z)$  とし、たわみを  $\eta(z)$  とすると、

$$\eta = R \theta, \quad R = \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{2} \dots\dots\dots(26)$$

したがって、たわみ角  $d\eta/dz$  を両端で固定とすればよい。トラス節点で弦材が受けるせん断力を、 $Q_r$  ( $r=1, 2, \dots, n-1$ ) とし、固定端モーメントを、 $M_0, M_n$  とすると、弦材のたわみ方程式は、

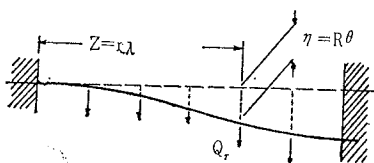
$$M = -EI_0 \frac{d^2 \eta}{dz^2} = M_0 - \frac{M_0 + M_n}{n \lambda} z + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} Q_r (n-r) z - \left\{ \sum_{s=1}^{n-1} Q_s (z-s \lambda) \right\} \dots\dots\dots(27)$$

図-2



(a) トラスの回転

(b) 弦材の変形



(c) 弦材のたわみ

ただし、 $I_0$  は柱体断面せん断中心と、弦材せん断中心とを結ぶ軸のまわりの弦材断面の断面 2 次モーメントである。

これを境界条件,

$$z=0, n \lambda \cdots \cdots d\eta/dz=0$$

$$z=0 \cdots \eta=0; \eta=n \lambda \cdots \cdots \eta=R \phi_n$$

のもとに解き、節点での変形の適合から、

$$\theta(r \lambda)=\phi_r \cdots \cdots \cdots (28)$$

とおくと、

$$\begin{cases} M_0 = -\frac{6EI_0R}{n^2\lambda^2}\phi_n - \frac{\lambda}{n^2}\sum_{s=1}^{n-1} Q_s(n-s)^2s \\ M_n = -\frac{6EI_0R}{n^2\lambda^2}\phi_n + \frac{\lambda}{n^2}\sum_{s=1}^{n-1} Q_s(n-s)^2s \end{cases} \cdots (29)$$

$$\begin{aligned} EI_0R \phi_r = EI_0R \phi_n & \left( \frac{3r^2}{n^2} - \frac{2r^3}{n^3} \right) + \frac{\lambda^3}{2} \frac{r^2}{n^2} \sum_{s=1}^{n-1} Q_s(n-s)^2s \\ & - \frac{\lambda^3}{6} \frac{r^3}{n^3} \sum_{s=1}^{n-1} Q_s(n-s)^2(n+2s) \\ & + \frac{\lambda^3}{6} \sum_{s=1}^{r-1} Q_s(r-s)^3 \cdots \cdots \cdots (30) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{cases} M_{rs} = \frac{1}{2} \frac{r^2}{n^2} (n-s)^2s - \frac{1}{6} \frac{r^3}{n^3} (n-s)^2(n+2s) \\ N_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{6} (r-s)^3 & (s < r) \\ 0 & (s \geq r) \end{cases} \\ (r, s=1, 2, \dots, n-1) \end{cases} \cdots \cdots \cdots (31)$$

とおき、これらを要素として、

$$\begin{cases} M = [M_{rs} + N_{rs}]^{-1} \\ Q = [Q_r] \\ N = \left[ k_r - k_n \left( \frac{3r^2}{n^2} - \frac{2r^3}{n^3} \right) \right] \cdots \cdots \cdots (32) \\ \Psi = M \cdot N = [\Psi_r] \\ (r, s=1, 2, \dots, n-1) \end{cases}$$

とおくと、式 (30) より、弦材に作用するせん断力は、

$$Q = \frac{EI_0R}{\lambda^3} \phi \Psi \cdots \cdots \cdots (33)$$

以上により決定される  $\theta(z)$  より弦材の全変形エネルギーを計算できる。 $J_0, C_{BT0}$  を弦材固有のねじれ剛度とすると  $r$  番目トラスの弦材の変形エネルギーは、

$$\begin{aligned} V_r = & 4 \int_{(r-1)\lambda}^{r\lambda} \frac{EI_0}{2} \left\{ \frac{d^2(R\theta)}{dz^2} \right\}^2 dz \\ & + 4 \int_{(r-1)\lambda}^{r\lambda} \frac{GJ_0}{2} \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz \\ & + 4 \int_{(r-1)\lambda}^{r\lambda} \frac{EC_{BT0}}{2} \left( \frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz \cdots \cdots \cdots (34) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{cases} a_r^{(1)} = r^2 - (r-1)^2 \\ a_r^{(2)} = r^3 - (r-1)^3 \\ a_r^{(3)} = r^4 - (r-1)^4 \\ a_r^{(4)} = r^5 - (r-1)^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_r = \frac{6}{n^2} k_n + \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^{n-1} \psi_s (n-s)^2s - \frac{r-1}{n^2} \sum_{s=1}^{r-1} \psi_s s \\ \beta_r = \frac{12}{n^3} k_n + \frac{1}{n^3} \sum_{s=1}^{n-1} \psi_s (n-s)^2(n+2s) - \sum_{s=1}^{r-1} \psi_s \\ \gamma_r = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{r-1} \psi_s s^2, \delta_r = \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{r-1} \psi_s s^3 \\ (r=1, 2, \dots, n) \end{cases} \cdots \cdots \cdots (35)$$

とおくと、弦材の全変形エネルギーは

$$\begin{aligned} V^{ch} = & 4 \left[ \frac{E}{6\lambda^3} (I_0R^2 + C_{BT0}) \right. \\ & \left. \sum_{r=1}^n \{ 3\alpha_r^2 - 3a_r^{(1)}\alpha_r\beta_r + a_r^{(2)}\beta_r^2 \} \right. \\ & \left. + \frac{GJ_0}{2\lambda} \sum_{r=1}^n \left\{ \gamma_r^2 + a_r^{(1)}\alpha_r\gamma_r + \frac{1}{3}a_r^{(2)}(\alpha_r^2 - \beta_r\gamma_r) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4}a_r^{(3)}\alpha_r\beta_r + \frac{1}{20}a_r^{(3)}\beta_r^2 \right\} \right] \phi^2 \cdots \cdots \cdots (36) \end{aligned}$$

表示を簡単にし、計算も便宜にするため式 (35), (36) を行列で表わしておく。

$$a^{(i)} = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & a_r^{(i)} \\ 0 & & & a_n^{(i)} \end{pmatrix}, \begin{cases} \alpha = [\alpha_r] \\ \beta = [\beta_r] \\ \gamma = [\gamma_r] \\ \delta = [\delta_r] \end{cases} \cdots \cdots (37)$$

とおくと、

$$\begin{cases} C_1 = \gamma \cdot \gamma^* + (\alpha \cdot \gamma^*) a^{(1)} + \frac{1}{3} (\alpha \cdot \alpha^* - \beta \cdot \gamma^*) a^{(2)} \\ \quad - \frac{1}{4} (\alpha \cdot \beta^*) a^{(3)} + \frac{1}{20} (\beta \cdot \beta^*) a^{(4)} \\ C_2 = \frac{1}{3} \{ 3\alpha \cdot \alpha^* - 3(\alpha \cdot \beta^*) a^{(1)} + (\beta \cdot \beta^*) a^{(2)} \} \end{cases} \cdots \cdots \cdots (38)$$

とおくと、弦材の全変形エネルギーは式 (36) のかわりに、

$$\begin{aligned} V^{ch} = & 4 \left\{ \frac{1}{2} GJ_0 \text{tr}(C_2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \frac{E(I_0R^2 + C_{BT0})}{\lambda^2} \text{tr}(C_1) \right\} \phi^2 \cdots \cdots \cdots (39) \end{aligned}$$

以上によりすべての変形と変形エネルギーとはパラメータ  $\phi$  で表示できる。 $\phi$  を決定するには、式 (25), (39) で表示される全変形エネルギーと外力のなす仕事とに Clapeyron の定理を適用する。外力のなす仕事は

$$V_{ex} = \frac{1}{2} T \phi_n = \frac{1}{2} T k_n \phi \cdots \cdots \cdots (40)$$

Clapeyron の定理はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} V_{ex} = & V_{ax} + V_{ch} \\ \text{上式に式 (25), (39), (40) を代入すると、} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} T = \left[ \frac{4b^2 d^2 A_v A_h \mu_v \mu_h}{A_v \mu_v b^2 + 2A_h \mu_h d^2} E \right. \\ \quad \left. + 4 \left\{ C_1 GJ_0 + \frac{C_2 E(I_0R^2 + C_{BT0})}{\lambda^2} \right\} \right] \frac{\phi}{\lambda} \\ \cdots \cdots \cdots (41) \end{cases}$$

ただし、 $C_1 = \text{tr}(C_1)$ ,  $C_2 = \text{tr}(C_2)$

最後に、式(35)の定数を用いて、式(27)で与えられる曲げモーメントおよび、式(26)で与えられる弦材の変形 $\theta$ は、式(42)のように書ける。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{M(z)}{\phi} &= \frac{EI_0 R}{\lambda^3} \{\beta_r z - \alpha_r \lambda\} \\ \frac{\theta(z)}{\phi} &= \frac{1}{2} \alpha_r \frac{z^2}{\lambda^2} = \frac{1}{6} \beta_r \frac{z^3}{\lambda^3} + \gamma_r \frac{z}{\lambda} - \delta_r \\ &\dots\dots\dots(42) \end{aligned} \right.$$

ただし、  
( $r-1$ ) $\lambda \leq z \leq r\lambda$  ( $r=1, 2, \dots, n$ )

以上により、すべての変形はパラメーター $\phi$ が式(41)により決定されれば計算される。

3. 計算と実験

必要な変数はすべて行列で表わしてあるから計算は電子計算機で行なうと便利である。式の流れを整理するために計算の流れ図を図-3に示しておく。

実際の数値として実験を行なった試験体の値をとり、これによる計算を行なう。試験体の概略は図-4に示す。

斜材に用いた断面に関して、フランジと底との接合をハンダで行なったため、接合部の剛性に十分信頼がおけなかった。このため、斜材の有効断面として、トラスの変形の際に受けると考えられるものと同じ状態の荷重のもとで引張試験を行なって決定した。材料の弾性係数は試験片を別に製作して、これについて実験により定めた。以上による断面諸元を表-2に示す。

表-2 試験体断面諸元

	chord	diagonal	lateral	dimension
A	0.8256	$1.94 \times 10^{-3}$	$1.94 \times 10^{-3}$	cm <sup>2</sup>
l	24.0	26.88	33.94	cm
$\gamma$	—	0.4628	0.7854	radian
I <sub>0</sub>	1.3570	—	—	cm <sup>4</sup>
J <sub>0</sub>	$3.9629 \times 10^{-3}$	—	—	cm <sup>4</sup>
C <sub>BT0</sub>	$3.9080 \times 10^{-3}$	—	—	cm <sup>6</sup>

$n=6, b=24 \text{ cm}, d=12 \text{ cm}, E=1.03 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}, G=3.87 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}$

さらに、これによる計算結果を表-3、表-4に示す。

表-3 変形諸定数

r	k	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	X/ $\phi$	$\Phi^X/\phi (\times 10^{-5})$
0	0	—	—	—	79.2334	0
1	0.999982	3.4615	4.3845	0	50.0263	-1.8286
2	1.999965	-2.0769	-1.1538	2.7692	24.1964	-3.4458
3	2.999950	0.6923	0.2307	0	0	-4.9607
4	3.999935	0.6923	0.2307	0	-24.1964	-6.4756
5	4.999919	-4.8460	-1.1538	11.0770	24.5023	-8.0928
6	5.999901	22.8457	4.3845	-58.1530	-79.2334	-9.9216

図-3 計算の流れ図

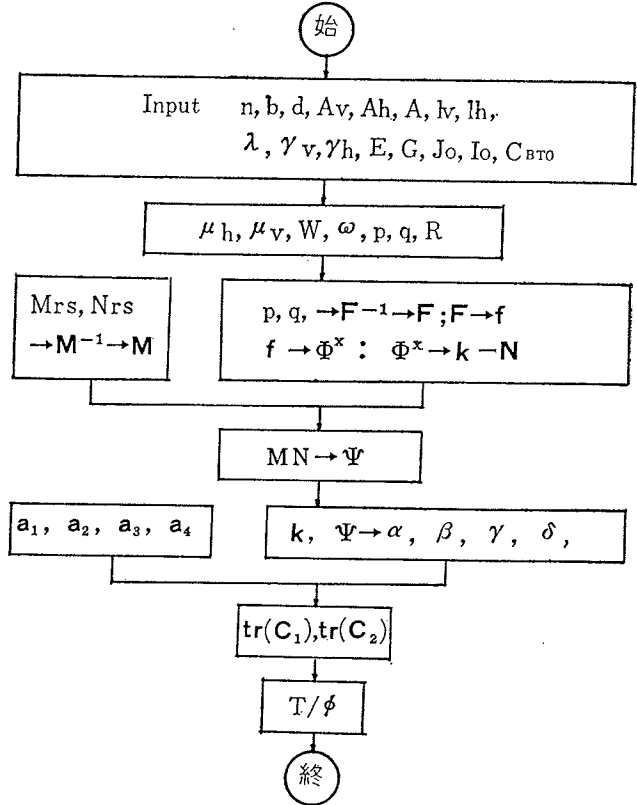
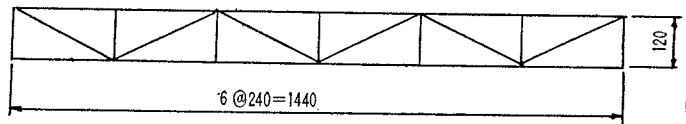
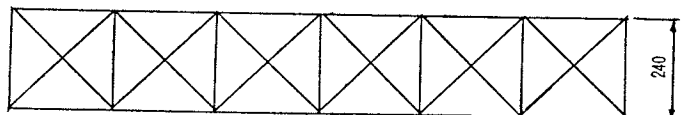


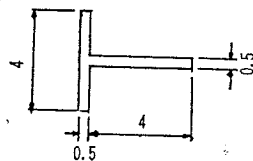
図-4



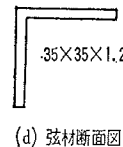
(a) 主構骨組図



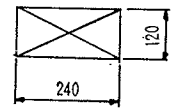
(b) 横構骨組図



(c) 斜材断面図



(d) 弦材断面図



(e) 対傾構骨組図

表-4 弦材モーメントおよび格間回転変形

z	M(z)/phi (kg·cm/rad)	theta(z)/phi	z	M(z)/phi (kg·cm/rad)	theta(z)/phi
0	-1.1264 x 10 <sup>5</sup>	0	7 lambda/4	1.9101 x 10 <sup>5</sup>	1.7720
lambda/4	-7.6970 x 10 <sup>4</sup>	0.0968	2 lambda	-7.5069 x 10 <sup>5</sup>	1.9999
2 lambda/4	-4.1303 x 10 <sup>4</sup>	0.3413	9 lambda/4	-5.6359 x 10 <sup>5</sup>	2.2356
3 lambda/4	-5.6359 x 10 <sup>3</sup>	0.6657	10 lambda/4	-3.7586 x 10 <sup>5</sup>	2.4827
lambda	3.0034 x 10 <sup>4</sup>	0.9999	11 lambda/4	-1.8808 x 10 <sup>5</sup>	2.7384
5 lambda/4	2.0649 x 10 <sup>4</sup>	1.2910	3 lambda	0	2.9999
6 lambda/4	1.1265 x 10 <sup>4</sup>	1.5423			

このほか、中間的な計算結果はつぎのようになる。

$$W = 0.3199, \omega = -6.2609 \times 10^{-7}$$

$$p = 4.3217 \times 10^{-4}, q = 4.1806 \times 10^{-4}$$

$$C_1 = 6.3476, C_2 = 6.9226$$

表-3、表-4 を図示したものが 図-5、6、7 となる。

図-5 は、そり拘束力により節点で単純ねじれ変形に付加されるべき回転変形で、今回の実験では弦材剛度の影響を特出させるため弦材断面を特に大きくしたほかに、この付加変形が計算上小さくなるよう断面を選んだ。このため 図-5 にみられるように、この付加変形は直線に近い変移をなし、したがって、節点での合計の変形も単純ねじれ変形にきわめて近接した値をとるものである。このことから、弦材の変形は 図-7 に示されているように、トラス節点で節をもつ波形を画くことになる。すなわち、一定のトルクのもとでは、弦材がトラス節点間でこのような変形を生ずるに必要なエネルギーに相当する量だけ全体の変形が、弦材剛度を考慮しない場合の値より低い値をとることになる。そり拘束による付加変形が大きくなるような断面をもつトラスでは、付加変形の節点間の変化率が大きくなり、弦材の変形は 図-2 に示すように、変曲点を中央節点で一つしかもたないような波形に近くなる。

弦材の固有のねじれ剛度を考えない場合の単純ねじれ変形とトルクとの関係は、式 (6) より計算される。

$$T = 8.5153 \times 10^4 \cdot \phi \dots \dots \dots (6)'$$

現在対象としているトラスでは、弦材固有のねじれ剛度の影響は大きくないから、式 (6) を、単純ねじれとする。式 (6)' より、載荷端の単純ねじれ変形は、

$$T = 1.4192 \times 10^4 \cdot \phi_0 \dots \dots \dots (43)$$

弦材剛度を考慮に入れた場合、式 (41) で与えられる  $\phi$  は単純ねじれ変形ではなく、弦材諸剛度の影響を全変形に伝えるパラメーターである。今扱っているトラスに対して式 (41) はつぎのような値をとる。

$$T = 1.6942 \times 10^5 \cdot \phi \dots \dots \dots (41)'$$

このパラメータを式 (24) に代入すると、載荷端での変形が得られ、つぎのようになる。

$$T = 2.8236 \times 10^4 \cdot \phi_0 \dots \dots \dots (44)$$

載荷端の回転変形とトルクの関係について、実験

図-5 曲げねじれによる付加回転角

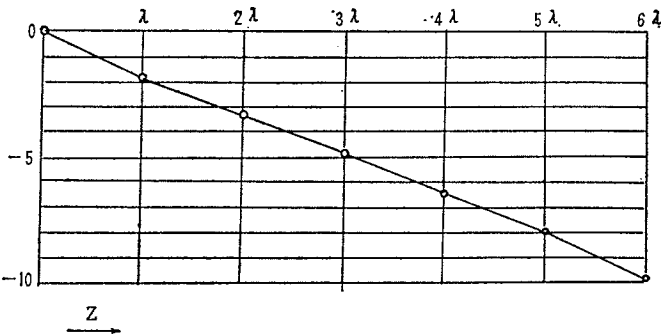


図-6 弦材曲げモーメント

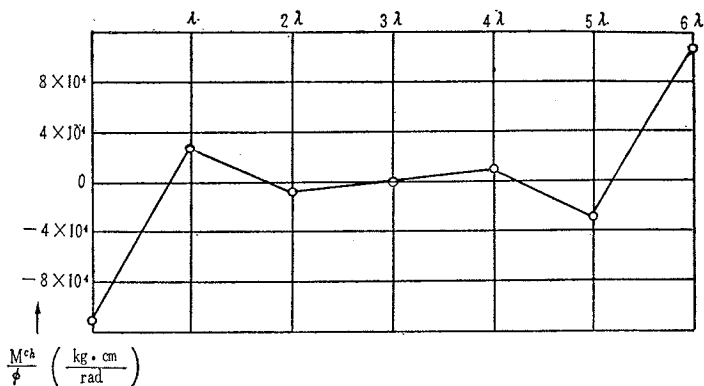


図-7 弦材回転変形

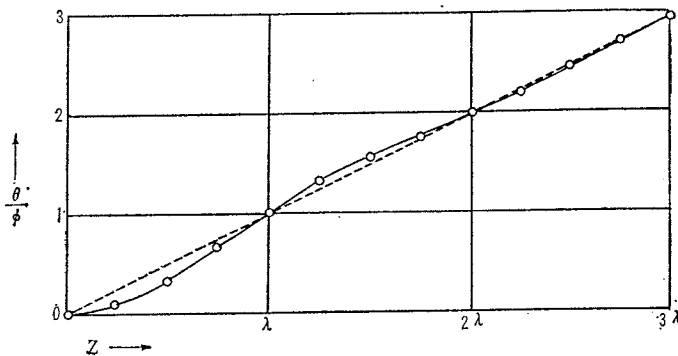


図-8 載荷端回転変形

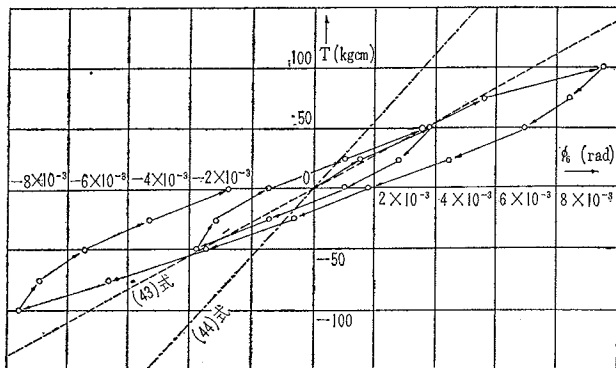
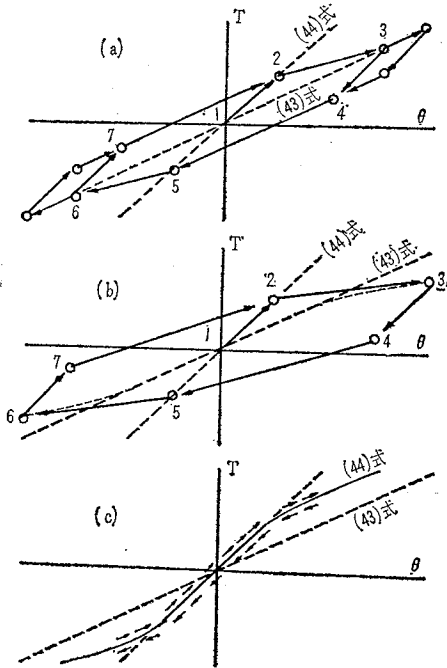


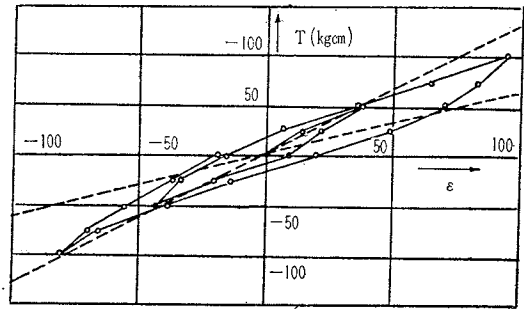
図-9 模型化した  $T-\phi$  曲線



値と理論値を比較した結果を図-8 に示す。

図-8 において、荷重は矢印の順序で行なった。図が一種のヒステリシスを画いている理由は、固定端の条件を考えることによって説明できる。本実験では、トラスを端板にとりつけるのに、L型のとりつけ板をトラス弦材にビスで固定し、このL型の板により端板をとりつけるという方法をとった。このため、ある大きさの荷重変化に対しては、ビスがすべりあるいはとりつけ板が変形を生じて固定がゆるんでしまい、変形は単純ねじれに近づいて行くものと思われる。このことを模型的に考えたのが図-9 であり、(a) 図では、1→2 の荷重変化までは固定条件が保たれるが、2 を越えると固定がゆるみ徐々に単純ねじれ変形に近づいて行く(2→3)。3 で荷重をおろし始めたとする、3→4 の荷重変化に対しては、端部は3 までの変形が保たれたまま再び固定されるから、3→4 は1→2 と平行である。4 を越えるとまた固定がゆるむ。3→4 の変形は同じ荷重変化に相当する単純ねじれ変形より小さいが、荷重減少時には、この差を消すための十分なエネルギーが不足し、すべて単純ねじれ変形に消費されるため、この差に相当する変形だけ残ってしまう。したがって、4→5 の変形は単純ねじれ直線と平行となる。5 に至ると、1→2 のかわりに負の荷重 1→5 を与えた変形と一致する。そして5 を越えると、2→3 と同様の現象を生ずると同時に、これはまた、4→5 の荷重減少時に消すことのできなかつた残留変形を、負の荷重を増加することにより消し去る過程とも考えることができる。6→7→2 は3→4→5 と全く同じ現象である。

図-10 斜材応力のトルクによる変形図



象である。(b) 図は、変形が非線型になった場合に対する同様な模型である。もし両端が完全に固定されるなら、変形とトルクは(c) 図のようになるはずである。回転変形が以上ようになるためこれによる各部材応力も類似の変移をなす。一例として主構斜材に対して測定した結果を図-10 に示す。

弦材に関しては、荷重が小さい間は、以上の変移図と類似の結果を得るが、大きな荷重に対しては、固定がゆるむたびに、図-7 に示される波形が変化し応力変移は複雑な状態を呈している。

一定トルクのもとで、各部材応力の長手方向の変移を理論値と比較したものが表-5、図-11 である。ここで  $\sigma_u^{ch}$  は弦材上面応力、 $\sigma_s^{ch}$  同側面応力、 $\sigma_1^{di}$  は横構(1 方向について測定)、 $\sigma_2^{di}$  は主構斜材応力でありおののすべて部材中央での値である。弦材応力は曲げ応力が主である。

表-5 部材中央点応力 ( $T=50 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ )

$\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2} z$	理論値		
	$\lambda/2$	$3\lambda/2$	$5\lambda/2$
$\sigma_u^{ch}$	-9.4368	2.5544	-0.9120
$\sigma_s^{ch}$	0.2240	-0.0860	0.0180
$\sigma_1^{di}$	38.3160	38.2980	38.2880
$\sigma_2^{di}$	60.2000	-60.2280	60.2440

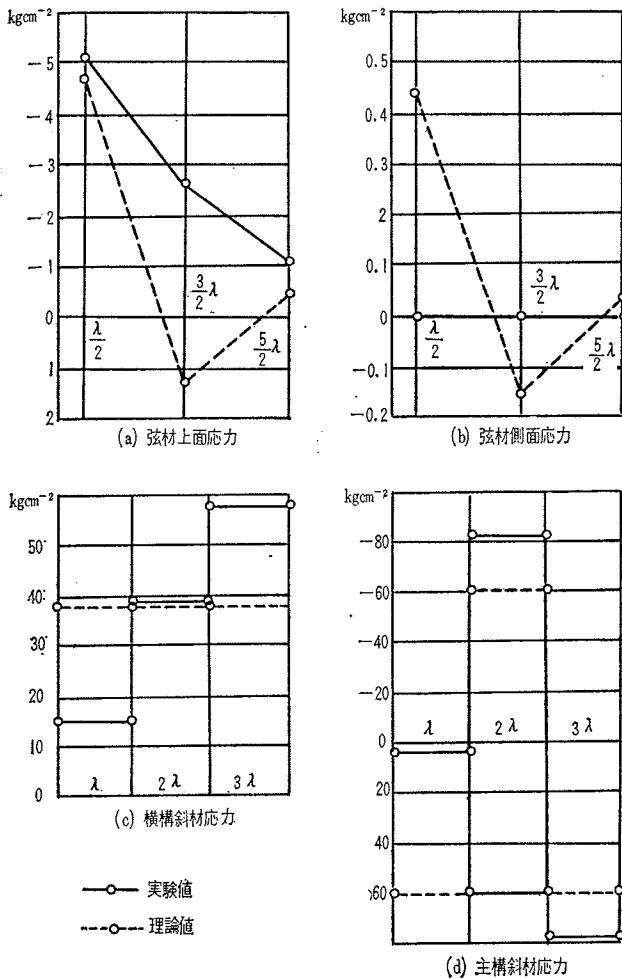
  

$\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2} z$	実験値		
	$\lambda/2$	$3\lambda/2$	$5\lambda/2$
$\sigma_u^{ch}$	-10.500	-5.250	-2.100
$\sigma_s^{ch}$	0	0	0
$\sigma_1^{di}$	14.700	38.900	57.750
$\sigma_2^{di}$	4.200	-82.450	69.850

図-11 (a) において、第2パネルにおける弦材応力が異なっているのは、隔壁に関する仮定が満足されないことによっている。面内には剛と仮定しても実際の構造物にあっては、かなりの変形を生じ、今回行なった実験でも相当の変形がみられた。断面が変形する問題は Resinger<sup>4)</sup> が扱っているが、これはつぎの機会に解析する予定である。(c),(d) において、第1パネルにおける斜材応力が極端に小さい値をとるのは、トラスを端板にとりつけるL型のとりつけ板が変形を受けもってしまったのである。また、このほか試験体製作上斜材を弦材にと



図-11 50 kg·cm における部材応力



りつける位置を完全に節点と一致できなかったため、節点間の弦材のたわみ変形が、斜材に多少影響を与えたものと考えられる。

#### 4. 結 語

本論文は、初めに述べたように、幅員の大きい橋梁の横構に関する設計上の問題点を解決するための一連の研究のうち初めの一部をまとめたものである。弦材の剛度の影響を導入することを主眼としたため、トラスの扱いはできるだけ単純にしたが、目下、任意分布トルクに対する計算を行なっている。さらに、格間ごとに断面の変化するトラスにまで拡張する予定である。本論文の実験において弦材に関する初めの仮定にもかかわらず、アングルを使用したか、弦材の固有のねじれ剛度が大きい場合には、当然この影響も調べなければならない。このほか、隔壁の変形の影響は必ず調べなければならない問題であるが、つぎの機会にゆずることとする。

#### 参 考 文 献

- 1) F. Bleich, C.B. McCullough, R. Rosecrans and G.S. Vincet: The mathematical theory of vibration in suspension bridges.
- 2) Nan sze Sih: Torsion Analysis for Suspension Bridges, Proc. A.S.C.E. Vol. 83, 1957 Structural Div. Paper 1431
- 3) F. Wansleben: Die Theorie der Drehfestigkeit von Stahlbauteilen. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues. Heft 11, Stahlbau-Verlag GMBH KÖLN 1954
- 4) F. Resinger: Der dünnwandige Kastenträger mit einfachsymmetrischem, verformbarem Rechteckquerschnitt unter Biege- und Torsionsbelastung. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbau-Verlag, GMBH KÖLN 1959
- 5) Paul Kuhn: Stresses in Aircraft and Shell Structures McGraw-Hill 1956
- 6) Ratzerdorfer, J.: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. Springer, Wien
- 7) V.Z. Vlasov: Thin walled elastic beams

(1965. 4. 8・受付)