

だ円形水中橋脚に働らく地震力とその弾性振動*

(水中構造物の耐震設計に関する研究)

EXTERNAL FORCES ON SUBMERGED BRIDGE PIERS WITH ELLIPTIC CROSS SECTIONS AND THEIR VIBRATION DURING EARTHQUAKES.

(A Study on the Aseismic Design of Underwater Structures.)

小 坪 清 真**

By Seima Kotsubo

1. 緒 言

水中構造物を設計する場合にそれに働らく地震時外力としての動水圧を知ることは重要なことであるが、まだ十分解明されていない。すなわち、水中構造物が振動する場合に構造物のまわりの水の一部が附着質量としてそれに作用することはすでに知られ、円筒のような簡単な横断面を持つ構造物に対しては、動水圧の3次元的な理論解¹⁾が導びかれ、模型実験によっても検証されている。しかし、く形断面を持つ構造物や、板の場合については、3次元的な理論解は得られていないし、2次元論においても理論値と実験値との間にはかなりの相違がある。

すなわち、Riabouchinsky²⁾はく形断面を持つ無限長の棒が横方向に振動する場合に生ずる動水圧を、2次元流れの理論を用いて解析した結果、板がその板面法線方向に振動する場合の附着質量は板の幅と同じ寸法の直径を持つ円筒が排除する流体質量の1.05倍であると述べている。また、T.E. Stelson³⁾は模型実験によってこれを確かめている。しかし、R.W. Clough⁴⁾は模型実験の結果、板への附着質量はその板の幅と同じ寸法を持つ円筒の排除する流体質量の約1.3倍であったと報告している。

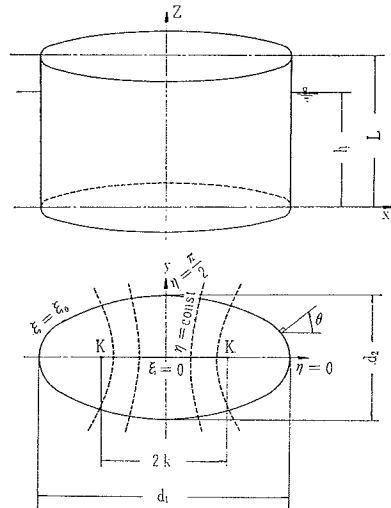
このような実験値の間の相違は実験法や実験条件ならびに模型の寸法などいろいろの要因にもとづくものと思われる。著者はこの問題を解明するために、円形またはだ円形断面を持つ水中橋脚や取水塔に働らく地震時動水圧の3次元的な理論解を求め、かつ、だ円、く形など種々の断面の構造物に対する模型実験を行なって、理論値と実験値との間の相違あるいは実験値相互間の相違の原因について考察を加え、地震時水中構造物に働らく外力としての動水圧ならびに水中構造物が弾性振動をする場合の附着質量を明らかにすることができた。

2. だ円形断面水中橋脚の剛振動による動水圧の理論

(1) 微分方程式

図一に示すように、深さ h の水中に直立する長さ L 、長軸 d_1 、短軸 d_2 のだ円筒を考える。今、直角座標 x, y をだ円座標 ξ, η に変換するために、

図一 だ円筒座標



$$\left. \begin{aligned} x &= k \cosh \xi \cos \eta \\ y &= k \sinh \xi \sin \eta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

とおく。ここに、 $2k$ はだ円の2焦点間距離を表わす。だ円表面の座標 ξ_0 は、

$$\xi_0 = \tan^{-1} \frac{d_2}{d_1} \dots \dots \dots (2)$$

で表わされ、座標 $\xi = 0$ は2焦点間の線分 $2k$ を表わす。

水分子の運動の微分方程式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_0}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p}{l \partial \xi} \\ \frac{w_0}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p}{l \partial \eta} \\ \frac{w_0}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

* 九州大学工学集報第37巻第3号に一部発表
 ** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科

$$p = -E_v \left\{ \frac{\partial u}{l \partial \xi} + \frac{\partial v}{l \partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + w_0(h-z) \dots\dots\dots(4)$$

$$l^2 = \frac{k^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 w_0 は水の単位体積重量、 E_v は水の体積弾性率、 g は重力の加速度、 p は水圧、 t は時間、 u, v および w はそれぞれ座標 ξ, η および z 方向の水分子の変位である。

今、動水圧のみを σ で表わせば、式(3),(4),(5)を用いて、動水圧 σ に関する微分方程式がつぎのようになる。

$$\frac{\partial^2 \sigma}{l^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{l^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - \frac{w_0}{g E_v} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \dots\dots(6)$$

(2) 境界条件

地震動を $(\alpha g/\omega^2) \sin \omega t$ とし、だ円筒が地動とともに剛振動をする場合には、 σ についての境界条件は式(3)の関係を用いてつぎのようになる。

地震動が短軸方向の場合には、

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_{z=0} &= 0 & \text{(ii)} \quad (\sigma)_{z=h} &= 0 \\ \text{(iii)} \quad (\sigma)_{\eta=0} &= 0 & \text{(iv)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right)_{\eta=\pi/2} &= 0 \\ \text{(v)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{l \partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} &= -\frac{w_0}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha w_0 \sin \theta \sin \omega t \\ \text{(vi)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 ξ_1 は池の外側の境界である。

地震が長軸方向の場合には、

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_{z=0} &= 0 & \text{(ii)} \quad (\sigma)_{z=h} &= 0 \\ \text{(iii)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} &= 0 & \text{(iv)} \quad (\sigma)_{\eta=\pi/2} &= 0 \\ \text{(v)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} &= \alpha w_0 \frac{d_2}{2} \cos \mu \sin \omega t \\ \text{(vi)} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

(3) 微分方程式の解

式(6)の解 σ を

$$\sigma = U(\xi) V(\eta) W(z) i e^{i \omega t} \dots\dots\dots(9)$$

と置いて変数分離すれば、 λ および a を分離定数として

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \lambda^2 W = 0 \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2} + \left\{ a - (c^2 - \lambda^2) \frac{k^2}{2} \cos 2\eta \right\} V = 0 \dots\dots(11)$$

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} - \left\{ a - (c^2 - \lambda^2) \frac{k^2}{2} \cosh 2\xi \right\} U = 0 \dots\dots(12)$$

ここに、 $c^2 = w_0 \omega^2 / g E_v$ である。

条件(7)の(i)および(ii)を満足する(10)の特解は、

$$W = A_m' \cos \lambda_m z, \quad \lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2h}, \quad m=0,1,2, \dots\dots\dots(13)$$

a) $c^2 > \lambda_m^2$ の場合

$$\frac{1}{4} (c^2 - \lambda_m^2) k^2 = q_m' > 0$$

とおけば、式(11)の解は Mathieu function を用いてつぎのようになる。

$$V = C' c e_\mu(\eta, q_m') + D' s e_\mu(\eta, q_m')$$

ここに、

$$c e_{2n}(\eta, q_m') = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2r\eta \quad (a_{2n})$$

$$c e_{2n+1}(\eta, q_m') = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)\eta \quad (a_{2n+1})$$

$$s e_{2n+2}(\eta, q_m') = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)\eta \quad (b_{2n+2})$$

$$s e_{2n+1}(\eta, q_m') = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)\eta \quad (b_{2n+1})$$

で、係数 $A_{2r}^{(2n)}, A_{2r+1}^{(2n+1)}, B_{2r+2}^{(2n+2)}, B_{2r+1}^{(2n+1)}$ は q_m' および n の関数である。

条件(7)の(iii)および(iv)を満足するものは上記のうち、 $s e_{2n+1}(\eta, q_m')$ のみであるから、(11)の特解は、

$$V = D_{mn}' s e_{2n+1}(\eta, q_m'), \quad n=0,1,2, \dots\dots\dots(14)$$

式(12)の解は Modified Mathieu function を用いて、

$$U = E' S e_{2n+1}(\xi, q_m') + F' G e_{2n+1}(\xi, q_m')$$

ここに、

$$S e_{2n+1}(\xi, q_m') = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sinh(2r+1)\xi \quad (b_{2n+1})$$

$$\begin{aligned} G e_{2n+1}(\xi, q_m') &= -S_{2n+1}(q_m') \{ \xi S e_{2n+1}(\xi, q_m') \\ &\quad - \sum_{r=0}^{\infty} g_{2r+1}^{(2n+1)} \cosh(2r+1)\xi \} \quad (b_{2n+1}) \end{aligned}$$

条件(7)の(vi)を用いて、

$$F' = -E' \frac{S e'_{2n+1}(\xi_1, q_m')}{G e'_{2n+1}(\xi_1, q_m')}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} U &= E'_{mn} \left\{ S e_{2n+1}(\xi, q_m') \right. \\ &\quad \left. - \frac{S e'_{2n+1}(\xi_1, q_m')}{G e'_{2n+1}(\xi_1, q_m')} G e_{2n+1}(\xi, q_m') \right\} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

b) $\lambda_m^2 > c^2$ の場合

$$\frac{1}{4} (\lambda_m^2 - c^2) k^2 = q_m > 0$$

とおけば、式(11)の解はつぎのようになる。

$$V = C c e_\mu(\eta, -q_m) + D s e_\mu(\eta, -q_m)$$

ここに、

$$ce_{2n}(\eta, -q_m) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r}^{(2n)} \cos 2r\eta \tag{b_{2n}}$$

$$ce_{2n+1}(\eta, -q_m) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)\eta \tag{b_{2n+1}}$$

$$se_{2n+2}(\eta, -q_m) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)\eta \tag{a_{2n+2}}$$

$$se_{2n+1}(\eta, -q_m) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)\eta \tag{a_{2n+1}}$$

条件(7)の(iii)および(iv)を用いて、(11)の特解は、

$$V = D_{mn} se_{2n+1}(\eta, -q_m), \quad n=0, 1, 2, \dots \tag{16}$$

式(12)の解は、

$$U = E S e_{2n+1}(\xi, -q_m) + F G e_{2n+1}(\xi, -q_m)$$

ここに、

$$S e_{2n+1}(\xi, -q_m) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \sinh(2r+1)\xi \tag{a_{2n+1}}$$

$$G e_{2n+1}(\xi, -q_m) = C_{2n+1}(q_m) \left\{ \xi S e_{2n+1}(\xi, -q_m) + (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r f_{2r+1}^{(2n+1)} \cosh(2r+1)\xi \right\} \tag{a_{2n+1}}$$

$$E_{mn}' = - \frac{\alpha w_0 d_1 \int_0^{\pi/2} \sin \eta \cdot se_{2n+1}(\eta, q_m') d\eta \int_0^h \cos \lambda_m z dz}{2 S'_{2n+1}(\xi_0, q_m') \int_0^{\pi/2} \{se_{2n+1}(\eta, q_m')\}^2 d\eta \int_0^h \cos^2 \lambda_m z dz}$$

$$= - \frac{2\alpha w_0 d_1 (-1)^m B_1^{(1)}}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}}$$

$n=0$ のとき
 $n \neq 0$ のとき

$$E_{mn} = - \frac{\alpha w_0 d_1 \int_0^{\pi/2} \sin \eta \cdot se_{2n+1}(\eta, -q_m) d\eta \int_0^h \cos \lambda_m z dz}{2 S'_{2n+1}(\xi_0, -q_m) \int_0^{\pi/2} \{se_{2n+1}(\eta, -q_m)\}^2 d\eta \int_0^h \cos^2 \lambda_m z dz}$$

$$= - \frac{2\alpha w_0 d_1 (-1)^m A_1^{(1)}}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}}$$

$n=0$ のとき
 $n \neq 0$ のとき

上式で、 $S'_{2n+1}(\xi_0, q_m') = \{dS_{2n+1}(\xi, q_m')/d\xi\}_{\xi=\xi_0}$ である。したがって、解 σ はつぎのようにになる。

$$\sigma = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{2\alpha w_0 d_1 (-1)^m B_1^{(1)} S_1(\xi, q_m') se_1(\eta, q_m') \cos \lambda_m z \cdot \sin \omega t}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} + \sum_{m=s}^{\infty} \frac{2\alpha w_0 d_1 (-1)^m A_1^{(1)} S_1(\xi, -q_m) se_1(\eta, -q_m) \cos \lambda_m z \cdot \sin \omega t}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \tag{21}$$

ゆえに、だ円柱の高さ方向単位長に働らく動水圧 P は次式で表わされる。

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} \sigma \cdot \sin \theta \cdot l d\eta = 4 \int_0^{\pi/2} \sigma k \cosh \xi_0 \cdot \sin \eta d\eta = 2 \int_0^{\pi/2} d_1 \sigma \cdot \sin \eta d\eta = \alpha w_0 \frac{\pi}{4} d_1^2 F \tag{22}$$

$$F = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, q_m') \{B_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m z \sin \omega t}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} + \sum_{m=s}^{\infty} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, -q_m) \{A_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m z \sin \omega t}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \tag{23}$$

F はだ円柱に付着すると考えられる水の重量と、だ円の長軸 d_1 を直径とする円柱の排除する水の重量との比を表

条件(7)の(vi)を用いて、

$$F = -E \frac{S e'_{2n+1}(\xi_1, -q_m)}{G e'_{2n+1}(\xi_1, -q_m)}$$

ゆえに、

$$U = E_{mn} \left\{ S e_{2n+1}(\xi, -q_m) - \frac{S e'_{2n+1}(\xi_1, -q_m)}{G e'_{2n+1}(\xi_1, -q_m)} G e_{2n+1}(\xi, -q_m) \right\} \tag{17}$$

したがって、 σ の解の形はつぎのようにになる。

$$\sigma = \sum_{m=0}^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn}' S_{2n+1}(\xi, q_m') se_{2n+1}(\eta, q_m') \times \cos \lambda_m z \cdot i e^{i\omega t} + \sum_{m=s}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} S_{2n+1}(\xi, -q_m) se_{2n+1}(\eta, -q_m) \times \cos \lambda_m z \cdot i e^{i\omega t} \tag{18}$$

ここに、 s は $\lambda_m^2 > c^2$ を満足する m の最小値で、

$$S_{2n+1}(\xi, q_m') = S e_{2n+1}(\xi, q_m') - \frac{S e'_{2n+1}(\xi_1, q_m')}{G e'_{2n+1}(\xi_1, q_m')} G e_{2n+1}(\xi, q_m')$$

$$S_{2n+1}(\xi, -q_m) = S e_{2n+1}(\xi, -q_m) - \frac{S e'_{2n+1}(\xi_1, -q_m)}{G e'_{2n+1}(\xi_1, -q_m)} G e_{2n+1}(\xi, -q_m)$$

条件(7)の(v)を用いて、式(18)の係数 E_{mn}' および E_{mn} を求めれば、

わし, d_2/d_1 , h/d_1 および z/h の関数である。

以上は短軸方向剛振動の場合の解であるが, 長軸方向剛振動の場合には, U および V の一般解に条件 (8) を適用することによって全く同様に求められる。すなわち,

$$\sigma = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{2\alpha\omega_0 d_2 (-1)^m A_1^{(1)} C_1(\xi, q_m') ce_1(\eta, q_m') \cos \lambda_m z \cdot \sin \omega t}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} + \sum_{m=s}^{\infty} \frac{2\alpha\omega_0 d_2 (-1)^m B_1^{(1)} C_1(\xi, -q_m) ce_1(\eta, -q_m) \cos \lambda_m z \cdot \sin \omega t}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \dots (24)$$

$$P = \alpha\omega_0 \frac{\pi}{4} d_2^2 F \dots (25)$$

$$F = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{4(-1)^m C_1(\xi_0, q_m') \{A_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m z \sin \omega t}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} + \sum_{m=s}^{\infty} \frac{4(-1)^m C_1(\xi_0, -q_m) \{B_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m z \cdot \sin \omega t}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \dots (26)$$

ここに,

$$C_1(\xi, q_m') = Ce_1(\xi, q_m') - \frac{Ce_1'(\xi_1, q_m')}{Fe_1'(\xi_1, q_m')} Fe_1(\xi, q_m')$$

$$C_1(\xi, -q_m) = Ce_1(\xi, -q_m) - \frac{Ce_1'(\xi_1, -q_m)}{Fe_1'(\xi_1, -q_m)} Fe_1(\xi, -q_m)$$

$$Ce_1(\xi, q_m') = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(1)} \cosh(2r+1)\xi \quad (a_1)$$

$$Fe_1(\xi, q_m') = C_1(q_m') \left\{ \xi Ce_1(\xi, q_m') + \sum_{r=0}^{\infty} f_{2r+1}^{(1)} \sinh(2r+1)\xi \right\} \quad (a_1)$$

式 (26) の F はだ円柱に付着すると考えられる水の重量と短軸 d_2 を直径とする円柱の排除する水の重量との比を表わし, d_1/d_2 , h/d_2 および z/h の関数である。

(4) 動水圧の共振周期

式 (23) および式 (26) の第 2 項は水の慣性の影響を表わす項であり, 第 1 項は水の圧縮性の影響を表わす項である。動水圧の共振周期は $q_m=0$ の場合, すなわち,

$$T_m = \frac{4h}{(2m+1)} \sqrt{\frac{\omega_0}{gE_v}}$$

で与えられる。したがって, 地震周期が動水圧の共振周期より短いときには, F の第 1 項が現われることになる。 F の第 2 項は橋脚の慣性力と同一の位相であるが, 第 1 項は池水の領域が無限に広い場合には橋脚の慣性力より 90° おくれ, 池水に境界がある場合には橋脚の慣性力より 180° おくれることになる。本論では, 後者の場合の理論解を示したものである。水深 h と動水圧の共振周期 T_m とは 1 次比例をなし, $h=50\text{m}$ で $T_1=0.14\text{sec}$ 程度であるから, 実際の場合, 水の圧縮性の影響を考慮しなければならぬ場合はほとんどないものと思われる。

3. Characteristic Number a_1, b_1 および係数

$A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ について

分離定数 $a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+2}, b_{2n+1}$ などは Characteristic Number と呼ばれるもので, q_m' または $(-q_m)$ と n との関数である。ここでは a_1 および b_1 のみが必要であるからその式をあげておく。まず, q_m' が小さい場合には,

$$a_1 = 1 + q_m' - \frac{1}{8} q_m'^2 - \frac{1}{64} q_m'^3 - \frac{1}{1536} q_m'^4 + \frac{11}{36864} q_m'^5 + \frac{49}{589824} q_m'^6 + \frac{55}{9437184} q_m'^7 - \frac{265}{113246208} q_m'^8 + R(q_m'^9) \dots (27)$$

$$b_1 = 1 - q_m' - \frac{1}{8} q_m'^2 + \frac{1}{64} q_m'^3 - \frac{1}{1536} q_m'^4 - \frac{11}{36864} q_m'^5 + \frac{49}{589824} q_m'^6 - \frac{55}{9437184} q_m'^7 - \frac{265}{113246208} q_m'^8 + R(q_m'^9) \dots (28)$$

係数 $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(1)} &= 1 \\ A_3^{(1)} &= -\frac{1}{8} q_m' \left\{ 1 + \frac{1}{8} q_m' + \frac{1}{192} q_m'^2 - \frac{11}{4608} q_m'^3 + \dots \right\} \\ A_5^{(1)} &= \frac{1}{192} q_m'^2 \left\{ 1 + \frac{1}{6} q_m' + \frac{1}{128} q_m'^2 + \dots \right\} \\ A_7^{(1)} &= -\frac{1}{9216} q_m'^3 \left\{ 1 + \frac{3}{16} q_m' + \dots \right\} \\ A_9^{(1)} &= \frac{1}{737280} q_m'^4 \{ 1 + \dots \} \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1^{(1)} &= 1 \\ B_3^{(1)} &= -\frac{1}{8} q_m' \left\{ 1 - \frac{1}{8} q_m' + \frac{1}{192} q_m'^2 - \frac{11}{4608} q_m'^3 + \dots \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_5^{(1)} &= \frac{1}{192} q_m'^2 \left\{ 1 - \frac{1}{6} q_m' + \frac{1}{128} q_m'^2 + \dots \right\} \\ B_7^{(1)} &= -\frac{1}{9 \cdot 216} q_m'^3 \left\{ 1 - \frac{3}{16} q_m' + \dots \right\} \\ B_9^{(1)} &= \frac{1}{737 \cdot 280} q_m'^4 \{ 1 + \dots \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

q_m' が大きい場合にはつぎの関係から a_1 および b_1 を求めることができる。

$$a_1 = 1 + q_m' + \frac{q_m'^2}{a_1 - 9} - \frac{q_m'^2}{a_1 - 25} - \frac{q_m'^2}{a_1 - 49} - \dots \dots \dots (31)$$

$$b_1 = 1 - q_m' + \frac{q_m'^2}{b_1 - 9} - \frac{q_m'^2}{b_1 - 25} - \frac{q_m'^2}{b_1 - 49} - \dots \dots \dots (32)$$

また、 $A_3^{(1)}/A_1^{(1)} = v_1$, $A_5^{(1)}/A_3^{(1)} = v_3$, $A_7^{(1)}/A_5^{(1)} = v_5$, \dots とおけば、

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1 - 1 - q_m'}{q_m'}, \quad v_3 = \frac{a_1 - 9}{q_m'} - \frac{1}{v_1}, \quad \dots \dots \dots \\ v_{2r+1} &= \frac{a_1 - (2r+1)^2}{q_m'} - \frac{1}{v_{2r-1}} \quad (r \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

より、 v_1, v_3, v_5, \dots が求められ、したがって、 $A_1^{(1)} : A_3^{(1)} : A_5^{(1)} : \dots$ が求められる。全く同様にして、 $B_3^{(1)}/B_1^{(1)} = v_1$, $B_5^{(1)}/B_3^{(1)} = v_3$, $B_7^{(1)}/B_5^{(1)} = v_5, \dots$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{b_1 - 1 + q_m'}{q_m'}, \quad v_3 = \frac{b_1 - 9}{q_m'} - \frac{1}{v_1}, \quad \dots \dots \dots \\ v_{2r+1} &= \frac{b_1 - (2r+1)^2}{q_m'} - \frac{1}{v_{2r-1}} \quad (r \geq 1) \end{aligned} \right\}$$

$$P(x, t) = -\frac{\omega_0 \omega^2 \pi d_1^2}{4gh} \frac{\sum_{m=0}^{s-1} \frac{2 S_1(\xi_0, q_m') \{B_1^{(1)}\}^2 \int_0^h Y \cos \lambda_m x dz \cdot \cos \lambda_m x \cdot \sin \omega t}{S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}}}{-\frac{\omega_0 \omega^2 \pi d_1^2}{4gh} \frac{\sum_{m=s}^{\infty} \frac{2 S_1(\xi_0, -q_m) \{A_1^{(1)}\}^2 \int_0^h Y \cos \lambda_m x dz \cdot \cos \lambda_m x \sin \omega t}{S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}}}} \dots \dots \dots (36)$$

$$P_\omega(x, t) = \alpha \omega A \sin \omega t - \frac{\alpha \omega_0 \pi d_1^2}{4} \frac{\sum_{m=0}^{s-1} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, q_m') \{B_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m x \sin \omega t}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}}}{-\frac{\alpha \omega_0 \pi d_1^2}{4} \frac{\sum_{m=s}^{\infty} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, -q_m) \{A_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m x \sin \omega t}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}}}} \dots \dots \dots (37)$$

式 (35) を解くにあたり、橋脚は基礎に完全に固定されているものとし、かつ、上部構造の重量 W が載荷されているものとする。今、この橋脚の空気中における振動型を $\phi_\mu(k_\mu z)$ とする。水中においては動水圧のために振動数のみならず、振動型も変化するので、水中における振動型は空気中における振動型単独で表わすことはできない。したがって、水中における変形曲線 Y を空気中における振動型を用いてつぎのようにおく。

より、 v_1, v_3, \dots が求められ、したがって、 $B_1^{(1)} : B_3^{(1)} : B_5^{(1)} : \dots$ が計算される。

以上、式 (27)~式 (34) を用いて Mathieu function の値は容易に求められるが、式 (15) および式 (17) の Modified Mathieu function は双曲線関数で与えられるので、その数値を級数和として求めることは不可能に近い。したがって、ここでは常微分方程式 (12) を境界条件 (7) および (8) の (v) と (vi) を用い、電子計算機 (OKITAC-5090) で数値積分により求めた。

4. 橋脚と水との連成振動

橋脚の全高 L より水深 h が小さい一般の場合について論ずることにする。今、橋脚の横方向変位を y 、曲げ剛性を EI 、断面積を A 、単位体積重量を ω 、重力加速度を g とすれば、橋脚の振動の微分方程式はつぎのようになる。

$$\frac{\omega A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + P(x, t) + P_\omega(x, t) \dots (35)$$

ここに、 $P(x, t)$ は橋脚の弾性振動によってその高さ方向単位長に働らく動水圧、 $P_\omega(x, t)$ は橋脚に働らく強制外力で、橋脚の慣性力ならびにその剛振動による動水圧の和である。地震動を $(\alpha g/\omega^2) \sin \omega t$ なる正弦振動と仮定すれば、橋脚の弾性振動は $y = Y(x) \sin \omega t$ で表わされ、したがって、 $P(x, t)$ および $P_\omega(x, t)$ は短軸方向振動の場合、次式で与えられる。

$$Y = \sum_{\mu=1} A_\mu \phi_\mu(k_\mu z) \dots \dots \dots (38)$$

ここに、 A_μ は未定係数、 $k_\mu L$ は固有値で、 $\phi_\mu(k_\mu L) = 1$ となるようにとった。

式 (38) を式 (35) に代入し、空気中における固有振動数 $n_{0\mu}/2\pi$ を用いて、つぎの関係

$$EI \frac{\partial^4}{\partial z^4} \phi_\mu(k_\mu z) = \frac{\omega A n_{0\mu}^2}{g} \phi_\mu(k_\mu z)$$

を使用すると、式 (35) はつぎのように変形される。

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\mu=1}^s \frac{\omega A}{g} (\omega^2 - n_{0\mu}^2) A_{\mu} \phi_{\mu}(k_{\mu} z) \\
 & + \frac{\omega_0 \omega^2 \pi d_1^2}{4gh} \sum_{\mu=1}^s A_{\mu} \sum_{m=0}^{s-1} \frac{2 S_1(\xi_0, q_m') \{B_1^{(1)}\}^2 \int_0^h \phi_{\mu}(k_{\mu} z) \cos \lambda_m z dz \cdot \cos \lambda_m z}{S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \\
 & + \frac{\omega_0 \omega^2 \pi d_1^2}{4gh} \sum_{\mu=1}^s A_{\mu} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{2 S_1(\xi_0, -q_m) \{A_1^{(1)}\}^2 \int_0^h \phi_{\mu}(k_{\mu} z) \cos \lambda_m z dz \cos \lambda_m z}{S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \\
 = & \alpha \omega A - \frac{\alpha \omega_0 \pi d_1^2}{4} \sum_{m=0}^{s-1} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, q_m') \{B_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m z}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \\
 & - \frac{\alpha \omega_0 \pi d_1^2}{4} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, -q_m) \{A_1^{(1)}\}^2 \cos \lambda_m z}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \dots\dots\dots (39)
 \end{aligned}$$

両辺に $\phi_{\nu}(k_{\nu} z)$ をかけ、 z について $0 \sim L$ に積分し、固有関数の直交性を利用すると次式が得られる。

$$\left(1 - \frac{n_{0\nu}^2}{\omega^2}\right) A_{\nu} \Phi_{\nu} + \frac{\omega_0 \pi d_1^2}{4 \omega A} \sum_{\mu=1}^s A_{\mu} S_{\nu\mu}' + \frac{\omega_0 \pi d_1^2}{4 \omega A} \sum_{\mu=1}^s A_{\mu} S_{\nu\mu} = \frac{-\alpha g}{\omega^2} \left\{ F_{\nu} + \frac{\omega_0 \pi d_1^2}{4 \omega A} (D_{\nu}' + D_{\nu}) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

($\nu=1, 2, \dots$)

ここに、 $n_{0\nu}/2\pi$ は橋脚の空气中における固有振動数で、 Φ_{ν} 、 $S_{\nu\mu}'$ 、 $S_{\nu\mu}$ 、 F_{ν} 、 D_{ν}' および D_{ν} は次式で定義される。

$$\Phi_{\nu} = \frac{1}{L} \int_0^L \{ \phi_{\nu}(k_{\nu} z) \}^2 dz + \frac{W}{\omega AL} \{ \phi_{\nu}(k_{\nu} L) \}^2 \dots\dots\dots (41)$$

$$S_{\nu\mu}' = - \frac{1}{Lh} \sum_{m=0}^{s-1} \frac{2 S_1(\xi_0, q_m') \{B_1^{(1)}\}^2 \int_0^h \phi_{\nu}(k_{\nu} z) \cos \lambda_m z dz \int_0^h \phi_{\mu}(k_{\mu} z) \cos \lambda_m z dz}{S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \dots\dots\dots (42)$$

$$S_{\nu\mu} = - \frac{1}{Lh} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{2 S_1(\xi_0, -q_m) \{A_1^{(1)}\}^2 \int_0^h \phi_{\nu}(k_{\nu} z) \cos \lambda_m z dz \int_0^h \phi_{\mu}(k_{\mu} z) \cos \lambda_m z dz}{S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \dots\dots\dots (43)$$

$$F_{\nu} = \frac{1}{L} \int_0^L \phi_{\nu}(k_{\nu} z) dz + \frac{W}{\omega AL} \phi_{\nu}(k_{\nu} L) \dots\dots\dots (44)$$

$$D_{\nu}' = - \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{s-1} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, q_m') \{B_1^{(1)}\}^2 \int_0^h \phi_{\nu}(k_{\nu} z) \cos \lambda_m z dz}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, q_m') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \dots\dots\dots (45)$$

$$D_{\nu} = - \frac{1}{L} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{4(-1)^m S_1(\xi_0, -q_m) \{A_1^{(1)}\}^2 \int_0^h \phi_{\nu}(k_{\nu} z) \cos \lambda_m z dz}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0, -q_m) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \dots\dots\dots (46)$$

長軸方向振動の場合には、式(42)~(46)において、 $S_1(\xi_0, q_m')$ を $C_1(\xi_0, q_m')$ に、 $S_1(\xi_0, -q_m)$ を $C_1(\xi_0, -q_m)$ に、 d_1 を d_2 に置き換えればよい。

式(40)の $\omega_0 \pi d_1^2 / 4 \omega A$ は橋脚の運動方向に直角方向の幅 d_1 を直径とする円柱の単位長さが排除した水の重量と、橋脚の単位長さ当りの重量との比を表わす。式(41)の $W/\omega AL$ は載荷重量と橋脚重量との比を表わす。

式(40)は $A_{\nu} (\nu=1, 2, \dots)$ に関する連立方程式であるから、これより係数 A_{ν} を決定すれば、地震時における弾性変形は式(38)より計算することができる。

自由振動の場合には、式(40)の ω を n に置換し、右辺を0とおいた同次方程式の A_{ν} の係数の行列式を0に

等置した式は振動数方程式となり、この式より水中橋脚の固有振動数 $n/2\pi$ を求めることができる。 n が求められると、この値を式(40)に代入し、 A_{ν} に関する連立方程式から、 $A_{\nu} (\nu=1, 2, \dots)$ の大きさの比を計算することができる。したがって、式(38)より橋脚の水中における振動型を求めることができる。

式(40)を使って地震時における弾性変形を計算する場合、地震周期が橋脚の第1次共振周期程度かまたはそれより長い場合には、空气中における振動型として、 $\nu=1, 2, 3$ 程度をとればよい。また、固有振動数 $n/2\pi$ を求める場合にも、第1次振動数に対しては $\nu=1, 2$ をとればよく、第2次振動数に対しても $\nu=1, 2, 3$ 程度をとれば十分である。

式(40)の $S_{v\mu}$ および D_v は水の慣性の影響を表わす項で、 $S_{v\mu}'$ および D_v' は地震周期が動水圧の共振周期より短い場合に現われ、水の圧縮性の影響を表わす項である。われわれが実際取り扱う橋脚では水の圧縮性を考慮しなければならないような場合はほとんどない。

5. 数値計算

(1) 剛振動による動水圧

式(23)および式(26)から明らかなように、橋脚に働らく動水圧は橋脚の断面形と橋脚の幅と水深との関数であるから、橋脚の振動方向の幅 d_2 とそれに直角方向の幅 d_1 との比 d_2/d_1 および水深 h と d_1 との比 h/d_1 をいろいろ変えて F の値を計算した。なお、ここでは、地震周期は動水圧の共振周期に比し十分長いものとして、式(23)および式(26)の第2項のみを用いて動水圧を計算した。

図-2は数値計算結果を示したものであるが、図からつぎの事項がわかる。

a) h/d_1 が小さい場合には、 d_2/d_1 が小さいほど、すなわち、だ円の断面が扁平なほど F の値は大きいが、 h/d_1 が大きい場合すなわち橋脚が細長い場合には、 d_2/d_1 の大小に関係なく、 F の値は1に近づく。この現象はCloughの実験結果や、Riabouchinskyの解析結果と大いに異なるところである。

b) 動水圧の鉛直分布はダムに働らく動水圧のような放物線分布ではなく、 h/d_1 および d_2/d_1 の値によって異なり、 h/d_1 が大きいほど等分布に近づく。そして、 $h/d_1 \rightarrow 0$ の極限(ダムの場合)において放物線分布に近似してくる。

c) したがって、水中橋脚に働らく動水圧は、その大きさのみでなく、鉛直方向分布も橋脚の形状によって異なることがわかる。

(2) 橋脚の固有振動周期の変化

図-3は、水中橋脚の固有振動周期 T_w と空気中における固有振動周期 T_a との比 T_w/T_a の値を、 $d_2/d_1=0.5$ 、 $W=0$ の場合について、 $w_0\pi d_1^2/4wA$ 、 L/d_1 および h/L のいろいろの値に対して計算した結果を示したものである。また、図-4は、 $d_2/d_1=0.5$ 、 $w_0\pi d_1^2/4wA=1.0$ の場合について、 W/wAL 、 L/d_1 および h/L のいろいろの値に対する T_w/T_a の計算値を示したものである。これらの計算結果からつぎの事項がわかる。

a) L/d_1 の値が小さくなるにしたがっ

図-2 Fの値

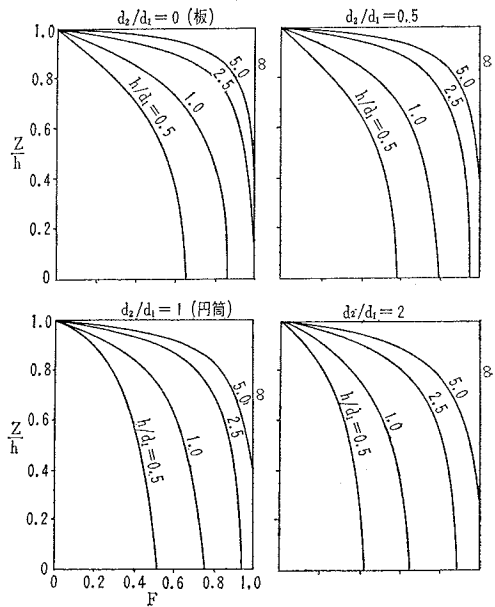


図-3 固有周期の伸び ($d_2/d_1=0.5$, $W=0$)

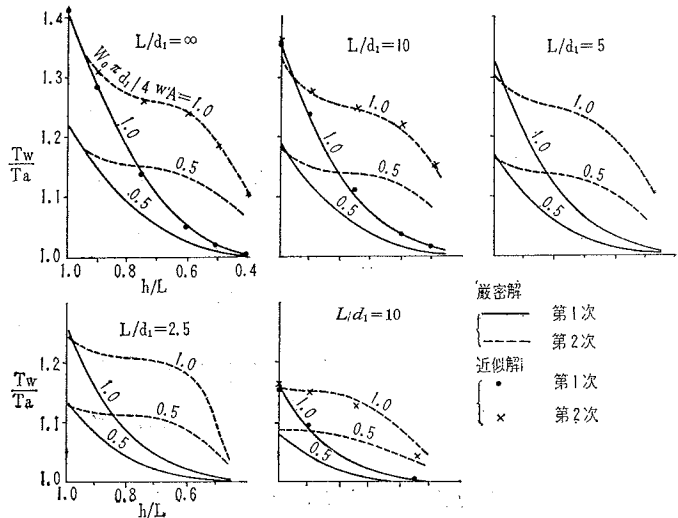
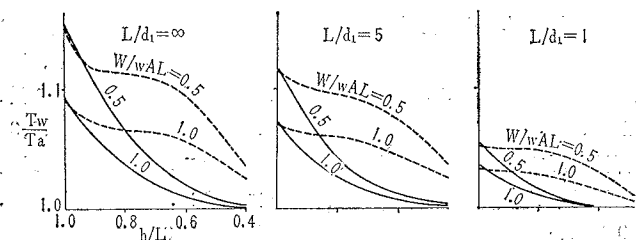


図-4 固有周期の伸び ($d_2/d_1=0.5$, $w_0\pi d_1^2/4wA=1$)



て、水による固有振動周期の伸びは減少する。

b) 第1次振動においては、固有振動周期の伸びは水位の低下とともに急速に減少するが、第2次振動においては、 $h/L=0.6\sim 0.8$ では固有振動周期の変化が少なく、 $h/L < 0.5$ で固有振動周期の伸びは急速は減少する。

c) $h/L=1.0$ の近傍では、固有振動周期の伸びは第1次振動および第2次振動ともにほとんど等しいが、 h/L の小さいところでは、固有振動周期の伸びは第1次振動より第2次振動の方が大きい。

d) 水中構造物が振動する場合には、従来のように、一定量の水が構造物に付着するという考え方は、上述の現象を説明することはできない。すなわち、固有振動周期の伸びを付着質量で説明するには、付着質量の大きさのみならず、その橋脚の高さ方向の分布をも考慮しなければならない。

(3) 水中における振動型

橋脚の振動型が空気中と水中とで異なるであろうことは容易に推察されることである。今、水中における振動型の変化を調べるため、式(40)から求められた固有振動数の値を式(40)に入れ、 A_1, A_2, \dots に関する同次方程式から、 A_1, A_2, \dots の大きさの比を計算した。第1次振動型の変化を知るには、 $A_2/A_1, A_3/A_1, \dots$ の大きさを求めればよく、第2次振動型の変化を知るには $A_1/A_2, A_3/A_2, \dots$ の大きさを求めればよい。ここでは一例として、 $d_2/d_1=0.5, L/d_1=10, h/L=1.0, \omega_0\pi d_1^2/4wA=1.0$ および $W=0$ の場合について、係数 A_1, A_2, \dots の比を求めたが、第1次振動に対しては式(40)で $\nu=1, 2$ まで取った場合、 $A_2/A_1=-0.012$ となり、第2次振動に対しては $\nu=1, 2, 3$ まで取った場合、 $A_1/A_2=0.057, A_3/A_2=0.096$ となった。

この計算結果からみると、第1次振動より第2次振動の方が振動型の変化が大きい、変化そのものは微小なものであることがわかる。この変化は W/wAL の値が大きいほど、また、 $\omega_0\pi d_1^2/4wA$ の値が小さいほど小さくなることは容易に推察されることであるから、実在の橋脚では本計算例の場合より、振動型の変化はさらに微小となる。したがって、水中橋脚の振動を論ずる場合、その振動型として空気中における振動型をそのまま採用しても大きな誤差を生ずることはないと考えられる。

(4) 地震による強制振動振幅

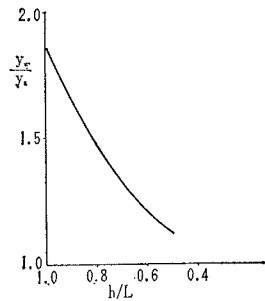
図-5 は、水中橋脚の第1次の振動が地動 ($\alpha g/\omega^2$) $\sin \omega t$ に共振した場合、振動型および振動倍率を、空気中および水中いずれにおいても等しいものと仮定して、橋脚の水中における強制振動変位 y_w と空気中における強制振動変位 y_a との比を、式(40)を用いているの水位に対して計算し、強制振動変位におよぼす動

水圧の影響を示したものである。図には、 $d_2/d_1=0.5, L/d_1=10, \omega_0\pi d_1^2/4wA=1.0$ および $W=0$ の場合について示してある。

図から明らかなように、水位が高い場合には水の慣性が橋脚の強制振動変位におよぼす影響は相当大きい、水位が低下するとその影響は急速に減少することがわかる。

一般に、 $\omega_0\pi d_1^2/4wA$ の値が小さいほど、また、 W/wAL の値が大きいほど動水圧の影響が小さくなることは式(40)より明らかであるから、本計算例よりも $\omega_0\pi d_1^2/4wA$ の値が小さく、かつ、 W/wAL の値が大きい実在の橋脚では、強制振動変位におよぼす動水圧の影響は図-5の値よりも相当小さくなるであろう。

図-5 y_w/y_a の値
($d_2/d_1=0.5, L/d_1=10$
 $W=0, \omega_0\pi d_1^2/4wA=1$)



6. 動水圧の近似式

水中橋脚が剛振動または弾性振動を行なう場合の動水圧の理論式は上述のように複雑であるから、橋脚の振動を厳密に取り扱うことは多くの時間と労力を必要とする。

したがって、実用上には、厳密な動水圧の理論式よりも、多少の誤差はあっても、簡単な形の動水圧式が望ましい。ここには、上述の計算から得られた結果をまとめたつぎのような近似式を得た。

(1) 橋脚の剛振動による動水圧

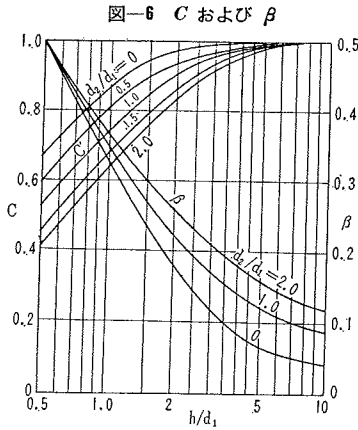
橋脚の高さ方向単位長さ当りに働く動水圧を P とすれば、 P は次式で与えられる。

$$P = \alpha \omega_0 \frac{\pi}{4} d_1^2 F \dots \dots \dots (47)$$

$$F = C \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\beta \dots \dots \dots (48)$$

ここに、 C および β はだ円の運動方向の厚さ d_2 とそれに直角方向の幅 d_1 との比 d_2/d_1 、水深 h と d_1 との比 h/d_1 の関数で、図-6 に示されている。式(47)~(48)を用いると、任意の断面形状をもつだ円柱に働く地震時動水圧を容易に求めることができる。また、この式を用いて、橋脚の基礎から任意の高さ z_0 におけるせん断力 Q および曲げモーメント M を求めるとつぎのようになる。

$$Q = \int_{z_0}^h P dz = \alpha \omega_0 \frac{\pi}{4} d_1^2 h \frac{\left(1 - \frac{z_0}{h}\right)^{1+\beta}}{1+\beta} C \dots \dots \dots (49)$$



$$M = \int_{z_0}^h P(x-z_0) dx$$

$$= \alpha \omega_0 \frac{\pi}{4} d_1^2 h^2 \frac{\left(1 - \frac{z_0}{h}\right)^{2+\beta}}{(1+\beta)(2+\beta)} C \dots\dots\dots(50)$$

基礎においては上式で $z_0=0$ とおけばよい。

(2) 弾性振動における付加質量

橋脚の弾性振動を取り扱う場合、その弾性振動によって生ずる動水圧の大きさおよび高さ方向分布は、橋脚の変形曲線によっていろいろ異なる。したがって、この場合、動水圧の近似式を与えるよりも、付加質量の形で与えた方が便利である。

著者は種々な断面形状の橋脚が1次型および2次型の弾性変形を行なう場合の動水圧を計算した結果、動水圧は橋脚各部の加速度に比例し、したがって付加重量 W_a は次式で与えられることがわかった。

$$W_a = \omega_0 \frac{\pi}{4} d_1^2 F \dots\dots\dots(51)$$

ここに、 F は橋脚の単位長さ当りの付加質量と、橋脚の運動方向に直角方向の幅 d_1 を直径とする円柱の単位長さ当りの排除質量との比を表わし、近似的に次式で与えられる。

$$F = C \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\beta \dots\dots\dots(52)$$

C および β は d_2/d_1 , h/d_1 および橋脚の振動型によって変わるが、近似的には 図-6 より求められる。

式 (51)~式 (52) より動水圧を求めると、基礎の近傍で誤差が大きくなるが、この部分の誤差が橋脚の固有振動周期および強制振動変位におよぼす影響は無視できる程度のものである。このことは、図-3~4 において、 $h/L < 0.4$ に対しては固有振動周期の伸びがきわめて小さいことから容易に知ることができる。

図-6 から C および β を求める場合、第1次振動に対しては因数 h/d_1 における水深 h として全水深をとればよいが、第2次振動に対しては h/d_1 の取り方を変えねばならない。すなわち、第2次振動型の節の位置を $z =$

h_0 とすれば、 $h > h_0$ のときには因数 h/d_1 として、 $z > h_0$ の部分に対しては $(h-h_0)/d_1$ の値をとり、 $z < h_0$ の部分に対しては h_0/d_1 の値をとって C および β を求めねばならない。 $h < h_0$ のときには因数 h/d_1 は全水深 h をそのままとればよい。

上述のような近似公式を用いると、水中橋脚の固有振動周期および地震による強制振動振幅を、空气中におけると全く同様に容易に求めることができる。図-3 の●印および×印は、上述の付加質量を用いてエネルギー法により水中橋脚の固有振動周期の伸びを計算したものであるが、このような近似計算によっても、厳密な計算値によく一致する結果が得られることがわかる。

7. 剛振動による動水圧または付加質量に関する模型実験

ここに述べる実験は橋脚が剛振動をなす場合に動らく動水圧について著者の理論値を検証したものである。まず、 h/d_1 が ∞ の場合(2次元)には、動水圧は d_2/d_1 の値には無関係に $F=1$ であることを検証するために、図-7 (I) に示すような長さ $L=250$ mm、長軸 $d_1=50$ mm のだ円筒の短軸 d_2 をいろいろ変え、これをバネで 図-8 に示すように水槽中につらし、上下方向自由振動を与え、水中および空气中における固有振動数の変化と減衰定数とを測定し、つぎの関係式から付加重量 W_a の値を求めた。

図-7 2次元模型

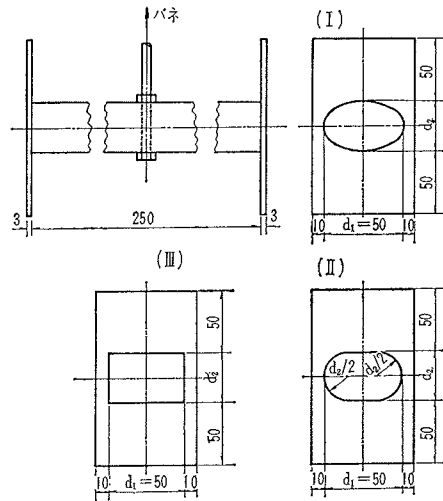


図-8 水槽

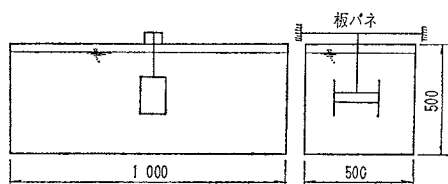


図-9 F の実験値
(2次元の場合)

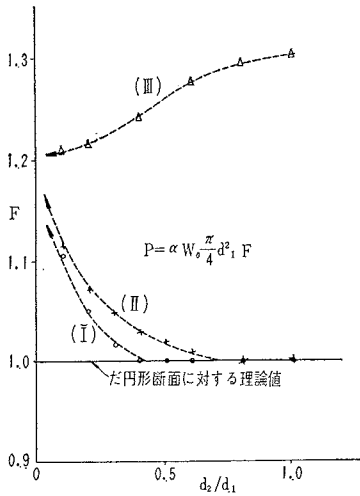
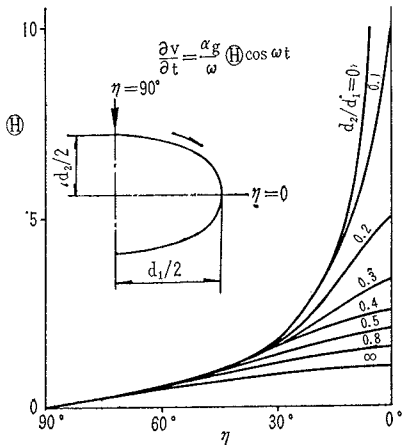


図-10 だ円筒表面の速度分布



$$\frac{W_0 + W_a}{W_0} = \frac{n_0^2}{n_w^2} = \frac{T_w^2(1 - \epsilon_w^2/n_w^2)}{T_0^2(1 - \epsilon_0^2/n_0^2)} \dots (53)$$

ここに、 W_0 は空気中における振動重量、 $n_0/2\pi$ および $n_w/2\pi$ は空気中および水中における減衰のない場合の固有振動数、 ϵ_0/n_0 および ϵ_w/n_w はそれぞれの場合における減衰定数である。実験は周期 0.2~0.3 sec、振幅 0.2~3 mm の範囲で行なわれた。減衰定数は水中においても 0.2~0.3% の小さいものであったから、式 (53) において $n_0/n_w \doteq T_w/T_0$ とおくことができる。

図-9 の○印は式 (53) より W_a を求め、さらに式 (51) の関係を用いて F の値を求めたものである。著者の理論によれば、 d_2/d_1 の値いかに関係せず $F=1$ であるから、扁平なだ円断面または板の場合には実験値は理論値よりも相当大きくなるのがわかる。

このような実験値と理論値との相違の原因は、理論では水の粘性の影響を無視しているためと考えられる。図-10 はだ円筒の短軸方向振動速度を 1 とした場合の

だ円筒表面の切線方向流速の分布の理論値を示したものである。図から明らかのように、 d_2/d_1 が小さいだ円筒の場合にはだ円筒表面における切線方向流速が非常に大きくなるので、実際には粘性抵抗が大きく、だ円筒周囲の水は粘性を無視した理論通りの流速を生ずることができず、したがって、理論で得られる付着水量より多くの水がだ円筒に付着することになるのであろう。

図-9 の (II) は図-7 (II) に示すような小判型の断面に対する実験値で、図-9 の (III) は図-7 (III) に示すく形断面に対する実験値である。小判型断面ではだ円形断面に対する値とほとんど等しい値となっているが、く形断面ではかなり大きな値となっている。く形断面で F の値が大きいののは隅角部における流速が理論と実験で相当異なるからであろう。 $d_2/d_1 \rightarrow 0$ の極限の場合には、(I)、(II) および (III) はいずれも同じ断面形 (厚さ 0 の板) となるから、それらに対する実験値はともに一点に会し、かつ、水に粘性がなければ、それらに対する理論値はともに $F=1$ とならなければならない。これらのことを考えると、 d_2/d_1 が小さい断面では断面形状のいかに関係せず、実験値は粘性を無視した理論値よりかなり大きくなることが認められる。

これらの理論値と実験値との相違の原因は水の粘性を無視したことにあることはすでに述べたところであるが、この相違は振動方向にうすい断面ほど大きく、実験結果から判断して、相違の程度は断面の形に関係するばかりでなく、振動の振幅および橋脚表面の粗さにも関係するようである。すなわち、著者が行なった実験の範囲では振幅の小さいほど付加質量は少なく、理論値に近づくようであるが、定量的に数値を出すほどの結果は得られなかった。

8. 実物橋脚に対する考察

(1) 剛振動または弾性振動による動水圧について

橋脚に働く地震時動水圧の理論値と実験値とが上述のように異なるので、橋脚の設計に際し、 F の値をどのように採るべきかが問題になる。この問題を解決するには、水の粘性を考慮した理論解を導びくか、実験に際し相似率を完全に満足させるか、または、実物橋脚に対する試験を行なわねばならない。模型実験に対して相似率を完全に満足させることは非常に困難であるが、著者の実験の範囲では、断面の幅 d_1 に比し振動振幅が小さいほど F の値は理論値に近づくようであった。したがって橋脚の幅に比し振動振幅の小さい実物橋脚では、 d_2/d_1 が小さい場合にも水の粘性を無視して得られた理論値を使用することができるものと考えられる。

(2) 水の粘性または表面波による減衰効果

本論では、表面波の影響については取り扱わなかったが、橋脚の振動減衰におよぼす水の粘性および表面波の

影響については、円柱に対して詳細な研究を行なった後藤氏¹⁾または桜井氏²⁾の研究結果を準用することができよう。すなわち、同氏は橋脚の振動減衰におよぼす水の粘性および表面波の影響は、模型ではかなり大きいが実物の橋脚ではきわめて小さいものであると報告している。

だ円形水中橋脚に対しても、著者の前記模型実験においては、減衰定数は0.2~0.3%の微小なものであったから、実物橋脚においてはさらに微小なものであることが推察される。

9. 結 論

上述の結果からつぎの事項を結論することができる。

(1) 水中橋脚または取水塔に働らく地震時動水圧は、それら構造物の形状によって異なり、断面の厚さ d_2 と幅 d_1 との比 d_2/d_1 、構造物の水中部の長さ h と幅 d_1 との比 h/d_1 などの関数である。

(2) だ円形橋脚の場合には、 h/d_1 が小さいと、 d_2/d_1 の値が小さい(扁平な)ほど動水圧は大きい、 h/d_1 が大きいと、動水圧は d_2/d_1 の値には無関係になり、 $F=1$ となる。

(3) だ円形または小判形断面で d_2/d_1 の値が小さい場合、あるいは小判形断面の場合には、動水圧の実験値は理論値よりかなり大きい。これは水の粘性によるものと考えられるが、実験値と一致する理論値を得るには粘性を考慮した動水圧の理論式を求めなければならない。

(4) しかし、橋脚断面の大きさに比し振動振幅の小さい実物橋脚では、水の粘性の影響は比較的小さいと考えられるから、橋脚の設計に際しては、粘性を無視した理論値を採用しても大きな誤差を生ずることはないと思察される。

(5) 水中構造物の固有周期は空気中におけるそれより伸びるが、伸びる割合は振動次数によって異なり、従来のように一定量の水が構造物に付着するという考え方

ではこの現象を十分表現することはできない。任意の振動型に対して固有周期の伸びを付加質量で説明するには、付加質量の大きさと構造物の長さ方向の分布とを、 d_2/d_1 および h/d_1 の関数として求めなければならない。

(6) 水中構造物の振動型におよぼす水の影響ははなはだ小さい。したがって、水中構造物の地震に対する応答を求める場合、その振動型は空気中における振動型をそのまま採用することができる。

(7) 水の粘性が水中構造物の振動減衰に与える影響は非常に小さい。

(8) 水中構造物は空気中においてよりも大きな地震力を受けるから、それだけ応力も大きくなり、耐震上不利な構造物である。

以上は水の粘性を無視しただ円形断面の橋脚に対する定常理論解ならびに模型実験から得られた結論であるが、水中橋脚の地震に対する応答を求め、その耐震設計法を確立するには、なお、動水圧の過渡現象、く形断面水中橋脚に対する理論解などについて解明しなければならない。これらの点については今後引き続き研究を進めて行く考えである。

終りに、Mathieu function についてご教示をいただいた九州大学応用理学教室 渡部信夫教授に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 後藤尚男・土岐憲三：水中橋脚の振動と耐震設計に関する基礎的研究，土木学会論文集 No. 100, 昭.38.12.
- 2) Riabouchinsky: "Congrès International des Mathématiciens", Strasbourg, 1920, p. 568.
- 3) T.E. Stelson & F.T. Mavis: "Virtual Mass and Acceleration in Fluid", Trans. ASCE, Vol. 122, 1957.
- 4) R.W. Clough: "Effects of Earthquakes on Underwater Structure," 2nd. WCEE, 1960.
- 5) 桜井彰雄：水中構造物の振動，電力中央研究所報告，昭.38.8.

(1965.1.5・受付)