

# 箱桁の弾性座屈について

## ON THE ELASTIC BUCKLING OF BOX GIRDERS

米 沢 博\*・三 上 市 蔵\*\*  
By Hiroshi Yonezawa and Ichizo Mikami

### 1. ま え が き

桁橋構造の腹板の座屈については弾性、塑性の両域にわたって非常に多くの研究がなされている。これらの研究はフランジと補剛材でかこまれた部分の腹板のみの局部座屈を扱ったものが大部分である。腹板のみが座屈した場合フランジ、補剛材はなお健在で、桁全体としての耐荷力に重大な影響を与えるとは考えられない。特に箱桁構造においては上フランジを形成する鋼床板、補剛材を有する両側の腹板および下フランジなどが一体となって箱断面を構成している。したがって鋼床板あるいは腹板のみの等厚薄板としての局部座屈より、箱断面全体としての座屈、腹板と鋼床板との連成座屈、あるいは補剛材をふくめた腹板やリブをふくめた鋼床板の単独座屈などが桁の耐荷力に決定的な影響を与えると考えられる。

なお等方性く形板が補剛材で補強された場合の座屈については相当多く研究されているが<sup>1), 2)</sup>、同じ場合を直交異方性く形板として扱ったもの<sup>3), 4), 5)</sup>になるとあまり数がないようである。さらに直交異方性板を組み合わせさせて構成されている箱桁のような構造物の座屈に関する研究<sup>6)</sup>は非常に少ないようである。

ここでは腹板と鋼床板の連成弾性座屈を対象にし、上フランジおよび腹板を直交異方性く形板と見なして解析した。その結果を用いて箱断面、鋼床板、腹板などの縦横比と座屈荷重との関係、鋼床板の縦リブ、横リブ、腹板の鉛直および水平補剛材などの座屈荷重に対する影響について考察してみよう。

### 2. 直交異方性板の方程式の解

箱桁が 図-1 に示すように上フランジ、両側の腹板および下フランジの3種類の直交異方性板で構成され、適当な間隔に隔板あるいはラー

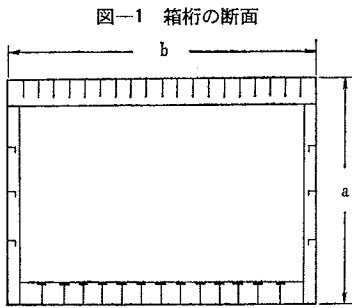


図-1 箱桁の断面

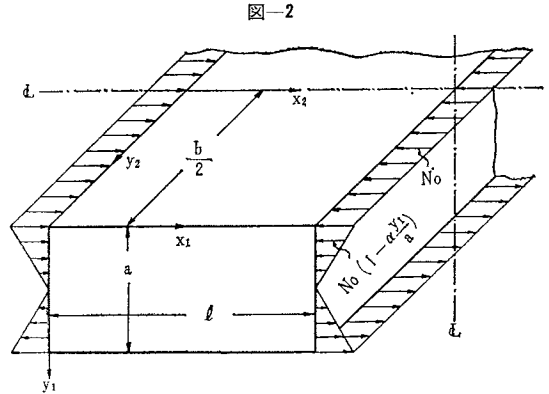


図-2

メン構造がそう入されていて、その間隔  $l$  の間で腹板と鋼床板が連成座屈するものとする。

図-2 に示すように純曲げを受ける場合を考え、腹板および鋼床板の剛度をそれぞれ  $(D_{x1}, H_1, D_{y1})$  および  $(D_{x2}, H_2, D_{y2})$  とする。下フランジは引張力を受けているから座屈せずにそのまま平面を保つものとし、曲げによる腹板自身の面内における彎曲および鋼床板のたわみは無視する。腹板および鋼床板が座屈した場合のたわみ曲面の微分方程式はつぎのようになる。

$$D_{x1} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + 2H_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + D_{y1} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y_1^4} + N_0 \left(1 - \alpha \frac{y_1}{a}\right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$D_{x2} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} + 2H_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^2 \partial y_2^2} + D_{y2} \frac{\partial^4 w_2}{\partial y_2^4} + N_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ただし  $w_1, w_2$  はそれぞれ腹板および鋼床板のたわみ、 $N_0$  は鋼床板の単位長さに作用する座屈荷重、 $\alpha$  は断面の中立軸の位置によって決まる定数である。

式 (1), (2) を境界条件および連続条件を満足するように解けばよいわけで、それらの条件をつぎのように仮定する。

$$x_1 = x_2 = 0 \quad : \text{単純支持}$$

$$x_1 = x_2 = l \quad : \text{単純支持}$$

$$y_1 = 0 \quad : w_1 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$y_2 = b/2 \quad : w_2 = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$y_1 = 0, y_2 = b/2 : \partial w_1 / \partial y_1 = \partial w_2 / \partial y_2 \dots\dots\dots (5)$$

$$D_{y1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} = D_{y2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} \dots\dots\dots (6)$$

\* 正会員 工博 京都大学教授 工業教員養成所土木工学科  
\*\*正会員 京都大学助手 同 上

$$y_1 = a \quad : w_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\partial w_1 / \partial y_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

ただし、計算を簡単にするため鋼床板、腹板ともにポアソン比  $\nu_x = \nu_y = 0$  とする。

鋼床板部分の一般解はつぎのようになる。

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \{A \sinh k_1 y_2 + B \cosh k_1 y_2 + C \sin k_2 y_2 + D \cos k_2 y_2\} \sin \frac{m \pi x_2}{l} \quad (9)$$

ただし

$$k_{1,2} = \frac{m \pi}{l} \sqrt{(\kappa_2^2 - 1) \frac{D_{x2}}{D_{y2}} + \frac{N_0 l^2}{m^2 \pi^2 D_{y2}} \pm \kappa_2 \sqrt{\frac{D_{x2}}{D_{y2}}}}$$

$$\kappa_2 = H_2 / \sqrt{D_{x2} D_{y2}}$$

である。

腹板部分の解として

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f(y_1) \sin \frac{m \pi x_1}{l}, \quad y_1 = a \eta \quad \dots\dots\dots(10)$$

とおいて式(1)に代入するとつぎのようになる。

$$\frac{d^4 f}{d \eta^4} - 2 \kappa_1 \sqrt{K_m} \frac{d^2 f}{d \eta^2} + \{K_m - \mu_m + \alpha \mu_m \eta\} f = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし

$$\kappa_1 = H_1 / \sqrt{D_{x1} D_{y1}}, \quad K_m = m^4 \pi^4 a^4 D_{x1} / l^4 D_{y1},$$

$$\mu_m = m^2 \pi^2 a^2 N_0 / l^2 D_{y1}$$

である。

式(11)の解はつぎのようになる。

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta^n = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \dots + a_{n+4} \eta^{n+4} + \dots\dots\dots(12)$$

ただし

$$a_4 = -\frac{K_m - \mu_m}{24} a_0 + \frac{\kappa_1 \sqrt{K_m}}{6} a_2$$

$$a_5 = -\frac{\alpha \mu_m}{120} a_0 - \frac{K_m - \mu_m}{120} a_1 + \frac{\kappa_1 \sqrt{K_m}}{10} a_3$$

$$a_6 = -\frac{\kappa_1 \sqrt{K_m} (K_m - \mu_m)}{360} a_0 - \frac{\alpha \mu_m}{360} a_1 + \left( \frac{\kappa_1^2 K_m}{90} - \frac{K_m - \mu_m}{360} \right) a_2$$

.....

$$a_{n+4} = \frac{(n+2)!}{(n+4)!} 2 \kappa_1 \sqrt{K_m} a_{n+2} - \frac{n!}{(n+4)!} (K_m - \mu_m) a_n - \frac{n!}{(n+4)!} \alpha \mu_m a_{n-1}$$

式(9)、(12)を境界条件および連続条件に代入し、積分定数の係数行列式を0とおけば座屈荷重  $N_0$  が決定する。しかし式(12)を用いると種々の断面や板剛比などについて広範囲の計算を行なうには多少手数を要するので、微分方程式(11)の解法として Galerkin 法を適用してみる。すなわち厳密解(12)の代りにつぎの式を採用する。

図-3 対称変形

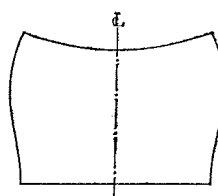
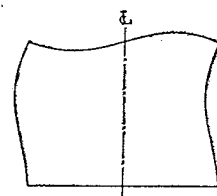


図-4 逆対称変形



$$f = a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + a_4 \mu_m \eta^4 \quad \dots\dots\dots(13)$$

いま図-3に示すような対称座屈を考え、前述の境界条件、連続条件および

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^4 f}{d \eta^4} - 2 \kappa_1 \sqrt{K_m} \frac{d^2 f}{d \eta^2} + (K_m - \mu_m + \alpha \mu_m \eta) f \right\} \eta^4 d \eta = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

などに式(9)の  $w_2$  および式(13)の  $f$  を代入して得られる方程式の  $B, D, a_1, a_2, a_3$  および  $a_4$  の係数行列式を0とおくと座屈荷重を与える方程式を得る。すなわち対称変形であるから  $w_1, w_2$  はつぎのようになる。

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \{a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + a_4 \mu_m \eta^4\} \sin \frac{m \pi x_1}{l} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \{B \cosh k_1 y_2 + D \cos k_2 y_2\} \sin \frac{m \pi x_2}{l} \quad \dots\dots\dots(16)$$

式(15)は境界条件式(3)を満足している。したがって式(15)、(16)を式(4)、(5)、(6)に代入して積分定数  $B, D$  を消去するとつぎの式を得る。

$$a_1 = E a_2 \quad \dots\dots\dots(17)$$

ただし

$$E = \frac{2 \left( k_1 \tanh \frac{b k_1}{2} + k_2 \tan \frac{b k_2}{2} \right) D_{y1}}{a (k_1^2 + k_2^2) D_{y2}}$$

である。さらに式(15)、(17)を式(7)、(8)、(14)に代入して得られる方程式の  $a_2, a_3, a_4$  の係数行列式を0とおいて

$$12096 + 10 K_m - 576 \kappa_1 \sqrt{K_m} + (7 \alpha - 10) \mu_m + (24192 + 35 K_m - 2160 \kappa_1 \sqrt{K_m}) E + (24 \alpha - 35) \mu_m E = 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

が得られる。

図-4に示すように逆対称変形の場合は  $E$  に次式を用いれば式(18)がそのまま適用できる。

$$E = \frac{2 \left( k_1 \coth \frac{b k_1}{2} - k_2 \cot \frac{b k_2}{2} \right) D_{y1}}{a (k_1^2 + k_2^2) D_{y2}}$$

式(18)を満足する  $N_0$  を求めれば座屈荷重の近似値が得られる。著者の一人はさきに直交異方性扇形板の振動に対して同様な近似解法を適用して好結果を得たが<sup>9)</sup>、ここでも念のため式(12)による厳密解と比較してみよう。すなわち、 $m=1, l/a=2, b=l, D_{x2}/D_{y2}=1/3, D_{x1}/D_{y1}=0.5, D_{y2}/D_{y1}=20, \alpha=2$  で  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  の

場合 (A の場合) と  $m=2$ ,  $l/a=l/b=1.4$ ,  $D_{x2}/D_{y2}=1/3$ ,  $D_{x1}/D_{y1}=0.5$ ,  $D_{y2}/D_{y1}=20$ ,  $\alpha=2$  で  $\kappa_1=\kappa_2=0.3$  の場合 (B の場合) について,  $\mu_m$  の計算結果を比較すると表-1 のようになる。  $\kappa_1=\kappa_2=0$  の場合で誤差約 1.5%,  $\kappa_1=\kappa_2=0.3$  の場合で誤差約 2.7% となり, 近似解としては十分その目的を達している。したがって, 座屈荷重の計算にはすべて式(18)を採用することにする。

表-1

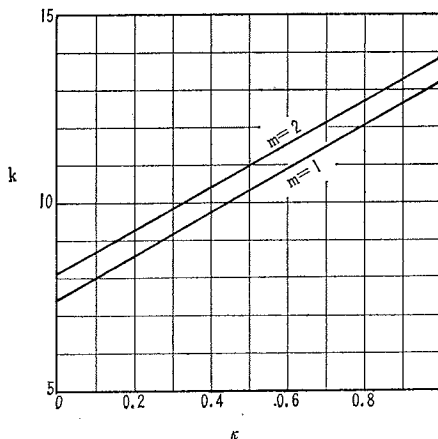
	厳密解	Galerkin 法
A の場合	179.4	182.0
B の場合	6 420.0	6 247.0

### 3. 座屈荷重に関する諸考察

2. で述べた近似解法を適用して種々の場合について座屈荷重を計算し, 腹板の鉛直および水平補剛材, 鋼床板の縦リブおよび横リブ, それぞれの  $\kappa$  の値, 箱断面の高さと幅の比, 腹板や鋼床板部分の縦横比などが座屈荷重にどのように影響するかを考察してみよう。なお  $\mu_m$  の値は対称変形の場合が逆対称変形の場合よりはるかに小さくなるのですべて対称変形の場合を扱うことにする。また  $\alpha=2$  すなわち中立軸が上下対称の位置  $y_1=a/2$  にある場合を対象にする。

#### (1) $\kappa$ の値の影響

腹板および鋼床板のねじり剛さを表わす  $\kappa$  の値と座屈荷重  $N_0=k\frac{\pi^2 D_{y1}}{a^2}$  の関係を,  $l=2a=b$ ,  $D_{y1}=2D_{x1}$ ,  $D_{y2}=3D_{x2}$ ,  $D_{y2}=20D_{y1}$  で  $m=1$  あるいは  $m=2$  の場合について図-5 に示す。ここに用いた板剛度は城ヶ島大橋<sup>7)</sup>のそれに近いものである。図から  $\kappa$  の値と座屈荷重はほぼ直線的に変化し, かつ  $\kappa$  が座屈荷重に相当影響することがわかる。曲げによるたわみや応力の場合より影響が顕著である。

図-5  $\kappa$  と座屈荷重の関係

#### (2) 箱断面, 腹板および鋼床板の縦横比の影響

箱断面の高さと幅の比および腹板や鋼床板の縦横比と  $k$  の関係を  $\kappa_1=\kappa_2=0.3$ ,  $D_{y1}=2D_{x1}$ ,  $D_{y2}=3D_{x2}$ ,  $D_{y2}=20D_{y1}$  の場合について計算した結果を図-6 (a), (b), (c), (d), (e) に示す。図-6 には鋼床板を単独の矩形板とみなし, それを  $y_2=\pm b$  で単純支持あるいは固定された場合<sup>4)</sup>, および腹板を単独の矩形板とみなしそれが  $y_1=0$  と  $y_1=a$  で単純支持された場合<sup>5)</sup>の  $k$  の値を比較のため記入しておいた。(a)~(e) のすべての図において腹板と鋼床板が同時に座屈するときの  $k$  の値は鋼床板が単独の単純支持矩形板として座屈するときの  $k$  とほぼ等しく, その差は 4~9% 程度である。一方鋼床板が,  $y_2=\pm b/2$  で固定された単独矩形板として座屈したときの  $k$  の値は箱断面全体としての  $k$  の値の 2 倍前後になっている。鋼床板の  $D_{y2}$  が腹板の  $D_{y1}$  の 20 倍の場合について計算した結果であるから, 腹板による弾性固定度がきわめて低いわけで当然の結果であろう。したがって  $D_{y2}/D_{y1}$  が小さくなるにしたがって腹板と鋼床板が同時に座屈する場合の  $k$  は次第に単独固定矩形板の  $k$  の値に近づくであろう。

つぎに腹板が単純支持の単独矩形板として座屈する場合の  $k$  の値は, 鋼床板と腹板の幅の比  $b/a$  の値によって箱断面としての  $k$  といちじるしい相違を示している。 $D_{y2}/D_{y1}=20$  であるから, 腹板は  $y_1=0$  で固定の状態に近く, したがって腹板を単独固定矩形板とみなしたときの  $k$  の値は単純支持の場合の 2 倍前後の値になるであろう。このように考えると, 図-6 (a), (b) の場合すなわち  $b/a=2, 1.5$  のように鋼床板の幅  $b$  が腹板の高さ  $a$  より大きいときは腹板と鋼床板が同時に座屈し, 逆に  $b=a$  を境として, 図-6 (d), (e) のように  $b$  が  $a$  より小さいときは腹板のみ単独に座屈すると判断される。

つぎに箱断面の縦横比と  $k$  の関係を調べてみよう。半波長数  $m$  の値によって  $k$  が変化するが, 各場合の  $k$  の最小値と箱断面の縦横比  $a/b$  の関係を示すと図-7 のようになる。

これらの図から桁高一定とすると, 幅  $b$  が大になるにしたがって座屈荷重がいちじるしく低下することがわかる。

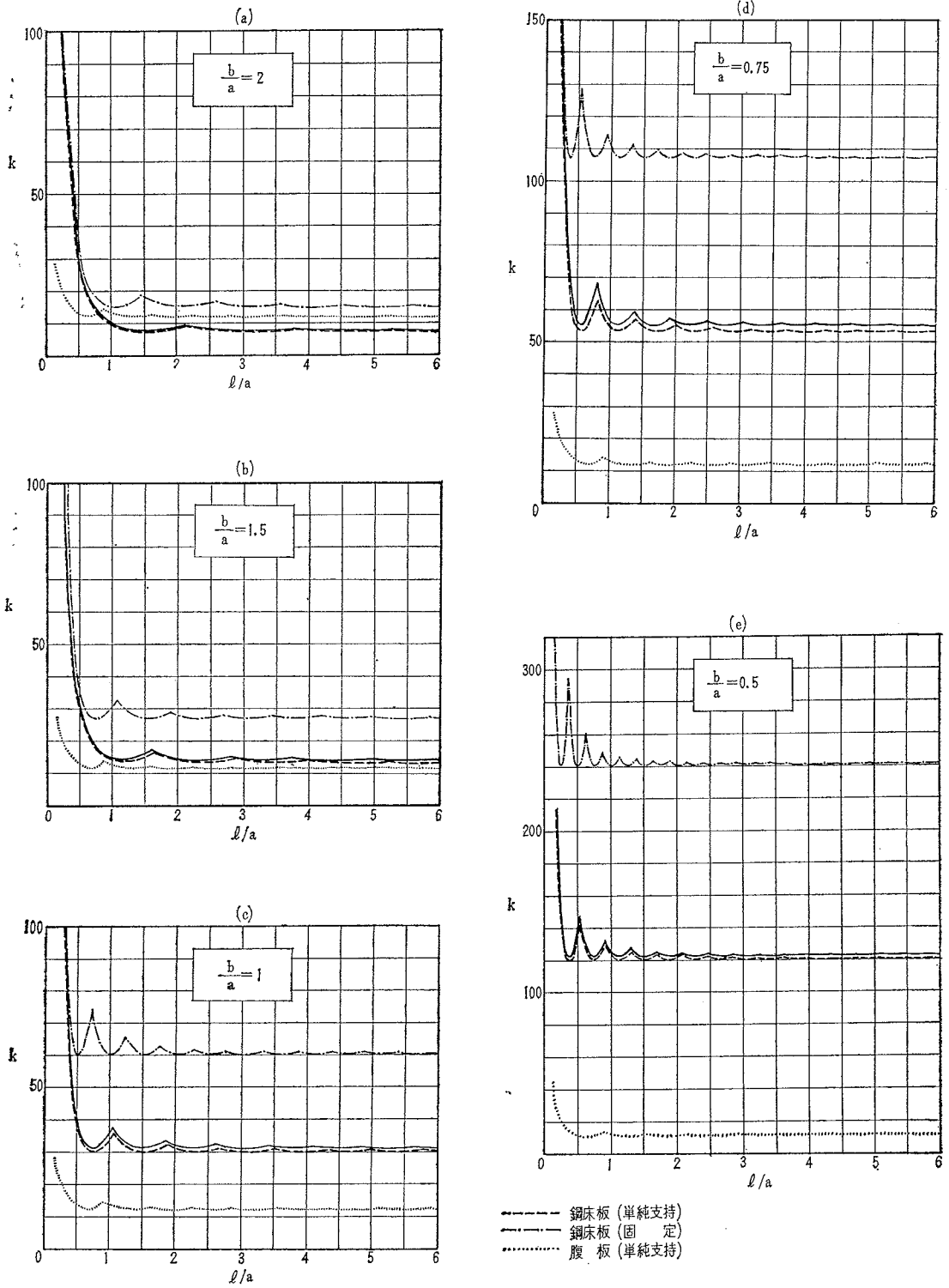
#### (3) 鉛直および水平補剛材の影響

腹板の鉛直補剛材 ( $D_{y1}$ ) と座屈荷重  $N_0=k'\frac{\pi^2 D_{y2}}{b^2}$  との関係を  $m=1$ ,  $\kappa_1=\kappa_2=0.3$ ,  $b=1.5a$ ,  $l=a$ ,  $D_{y2}=3D_{x2}$ ,  $D_{x2}=10D_{x1}$  の場合について計算した結果を図-8 に示す。

腹板の水平補剛材 ( $D_{x1}$ ) と  $k'$  の関係を  $\kappa_1=\kappa_2=0.3$ ,  $b=1.5a$ ,  $l=a$ ,  $D_{y2}=3D_{x2}$ ,  $D_{y2}=20D_{y1}$  の場合について示すと図-9 のようになる。

いずれの場合もほぼ直線的に変化しているが, 水平補剛材による変化がほとんどないことは注目すべきことであろう。図-8, 9 に腹板を単純支持単独矩形板とみなした場合の  $k'$  を併記しておいた。単独矩形板として座屈

図-6 箱断面、腹板、鋼床板の縦横比と座屈荷重



- 鋼床板 (単純支持)
- - 鋼床板 (固定)
- ... 腹板 (単純支持)

図-7 箱断面の縦横比と座屈荷重

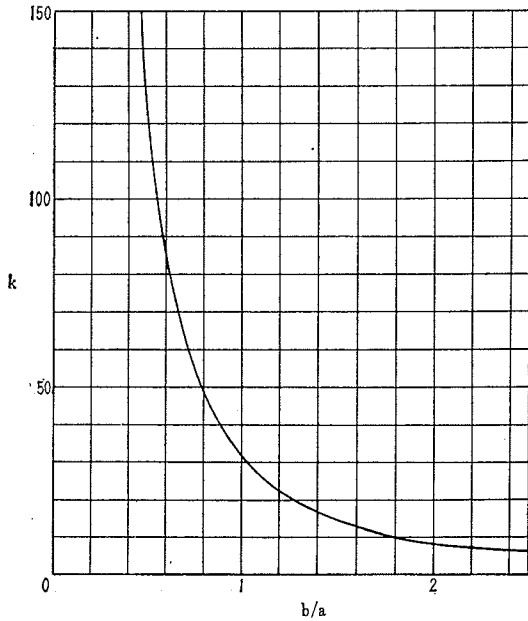


図-8 鉛直補剛材と座屈荷重

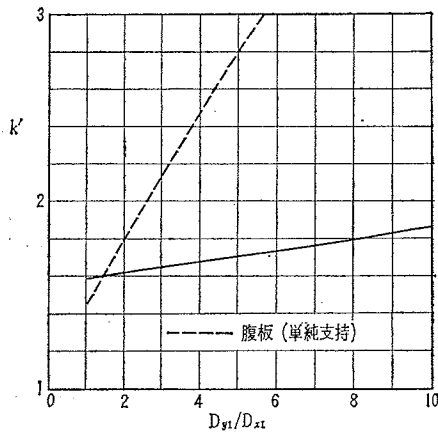
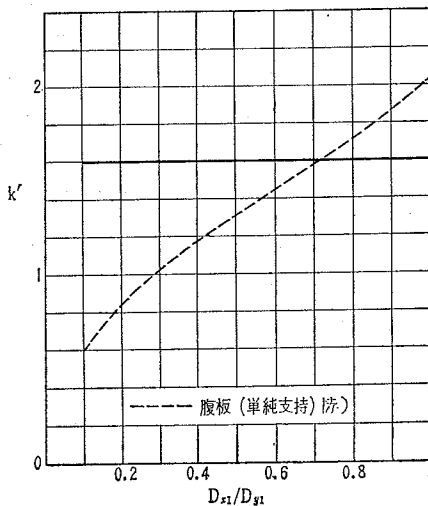


図-9 水平補剛材と座屈荷重



する場合はいずれも補剛材の影響が顕著である。これに対して腹板と鋼床板が同時に座屈する場合は鋼床板の影響が大きいため、腹板の補剛材の影響は低下するものと考えられる。

(4) 縦リブおよび横リブの影響

鋼床板の縦リブ ( $D_{x2}$ ) と  $N_0 = k \frac{\pi^2 D_{y1}}{a^2}$  との関係は  $m=1, \kappa_1 = \kappa_2 = 0.3, b=1.5a, l=a, D_{y1} = 2D_{x1}, D_{y2} = 20D_{y1}$  の場合につき示すと図-10 のようになる。

同じく横リブ ( $D_{y2}$ ) と  $k$  の関係を  $m=1, \kappa_1 = \kappa_2 = 0.3, b=1.5a, l=a, D_{y1} = 2D_{x1}, D_{x2} = 10D_{x1}$  の場合について図-11 に示す。

いずれもほぼ直線的に変化しているが、たとえば縦リブにおいては  $D_{x2}$  が5倍になると  $k$  が約2.8倍になり、横リブでは  $D_{y2}$  が5倍になると  $k$  が約1.7倍になる。縦リブの方が座屈強度を増加させるのに有効なように思われるが、縦リブの数は横リブに比較して非常に多いわけであるから設計上いずれが有効かは簡単にはいえないであろう。

図-10, 11 で点線および鎖線は鋼床板を  $y_2 = \pm b/2$  で単純支持および固定された単独の矩形板と考えた場合の  $k$  の値を示す。図からわかるように、箱断面の一部を構成している鋼床板の  $k$  の値は単純支持と固定の間にあり、かつ単純支持の  $k$  に近い値を示している。鋼床板の

図-10 縦リブと座屈荷重

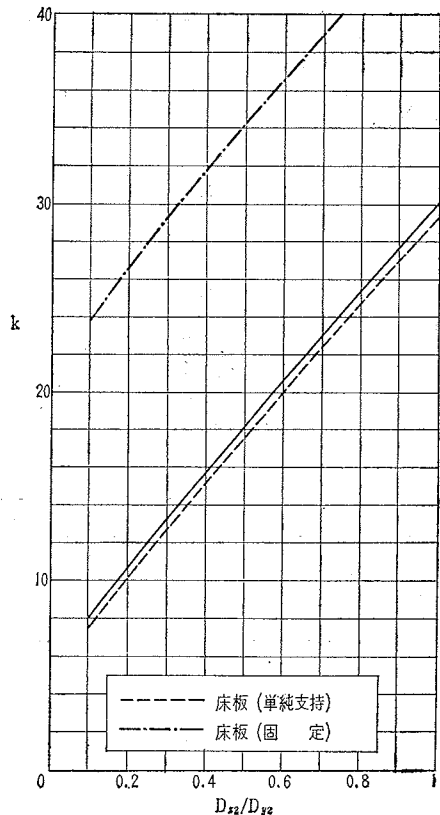
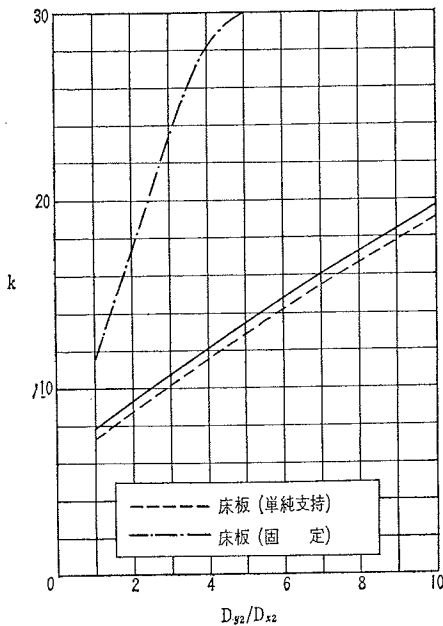


図-11 横リブと座屈荷重



$D_{y2}$  にくらべて腹板の  $D_{y1}$  が相当小である点を考えればこれは当然の結果であろう。

#### 4. む す び

箱桁構造物を板剛度の異なる直交異方性矩形板の組合せで構成されているものとみなし、隔板の間で腹板と鋼床板が同時に座屈する場合を理論的に解析した。その結果をまとめるとつぎのようである。

- 1) 座屈荷重は  $\kappa$  の値に対してほぼ直線的に変化し、曲げ応力の場合より  $\kappa$  の影響が顕著である。
- 2) 箱断面の高さと幅の比は座屈荷重に大きく影響し、高さにくらべて幅が大になるにしたがって座屈荷重は小さくなる。ここで扱った板剛度、鋼床板および腹板の縦横比などの範囲内では高さが幅より大になると腹板のみで座屈しやすくなる。
- 3) 腹板の水平補剛材の剛度の大小は座屈荷重にほとんど影響しない。この点腹板が単独で座屈する場合と大いに異なる。
- 4) 腹板の鉛直補剛材の剛度と座屈荷重はほぼ直線的

関係にあり、水平補剛材よりも座屈荷重に大きく影響するが、腹板が単独で座屈する場合にくらべて座屈荷重に対する影響は少ない。

5) 鋼床板の縦リブ、横リブの剛度と座屈荷重との関係もほぼ直線的である。腹板と鋼床板の連成座屈に関しては鋼床板が決定的な影響を与えている。また縦リブ剛度の影響が横リブ剛度より大きい。

以上の結論はここで扱った板剛度その他の値の範囲内の数値を有する箱桁構造物についていえることであるが、傾向を判断するには十分であり、また他の個々の場合についての具体的な結果はここで誘導した式 (18) を使用すれば判明するであろう。

さらに腹板の補剛材の数が 1 本あるいは 2 本と非常に少ない場合に対して、直交異方性板理論を適用することの適否について疑問が残るかもしれない。この点に関しては E.G. Gienke の論文<sup>5)</sup> に補剛材一本のような極端な場合でも、直交異方性板としての座屈荷重が補剛された等方性板としての解と非常によく一致することが示されている。

等方性板としての局部座屈も重要な問題であろうが、補剛材を含めた全体としての座屈が桁構造の耐荷力に一層重要な影響を与えるものと考えこの研究を行なったもので、箱桁構造の設計上参考となる点があれば幸と考える次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) K. Klöppel, J. Scheer: Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten, Berlin, 1960, W. Ernst u. Sohn
- 2) 長柱研究委員会: 弾性安定要覧, 昭 36, コロナ社
- 3) A. Pflüger: Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte, Ingenieur-Archiv, 16, 1962, S. 111
- 4) H.G. Schultz: Zum Stabilitätsproblem elastisch eingespannter orthotroper Platten, Schiff und Hafen, 14, 1962, S. 479, S. 569
- 5) E.G. Gienke: Über die Berechnung regelmässiger Konstruktionen als Kontinuum, Stahlbau, 33, 1964, S. 39
- 6) H. Yonezawa: Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges, Proc. ASCE, Vol. 88, No. EM 1, 1962, p. 1
- 7) 神奈川県その他: 城ヶ島大橋設計計算書・同解説, 1961, 技報堂

1964.11.16・受付)