

ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究*

STUDIES ON HIGHWAY BRIDGE IMPACT DUE TO RANDOM MOVING VEHICLES

山田 善一**・小堀 為雄***
By Yoshikazu Yamada and Tameo Kobori

要 旨 本研究は、主として道路橋の衝撃問題を究明する目的で行なったものである。一般に、道路橋に載荷する荷重は、その荷重の重さ、それぞれの荷重の間隔（車頭間隔）がランダムな連行荷重列をなしている。さらに、この連行荷重列は、道路の線形、交通信号などによってある一つの車群をなし、この車群にふくまれる台数もまた確率変数である。われわれはこのことに注目して、このようなランダム連行荷重列による橋梁の振動について、図-1 に示すように、自動車荷重をばね上質量とばねからなる1自由度系と仮定して、いくつかのランダム荷重列模型が各種スパン長の橋梁上を走行する際の橋梁の動的応答を電子計算機で数値計算した。

すなわち、電子計算機の中で多くの数学的実験を行なって、これを統計的に整理して、道路橋の衝撃係数を解明しようとするものである。

1. 概 要

道路橋の衝撃については古くから理論的実験的研究が多く行なわれている^{1)~7)}。その上近年測定技術の進歩にとともに、実験によりその現象を正確に把握しようとするところみがかかに行なわれている。これらの結果から、一般に単一自動車荷重が走行する時の衝撃現象は、実際に橋梁の設計時に用いる状態とかなりかけはなれていることが明確にされ、実際、2台以上の連行荷重による橋桁の衝撃は単一荷重にくらべてかなり小さいものであることが認められつつある。このおもな原因として考えられるのは、まず連行荷重のもつ加振力の位相差の任意性と、ばねをもつ多くの荷重群自身、それぞれダイナミックダンパーとしての作用をもつ点にあるものと考えられる。われわれはこのことに注目して、道路橋に作用する活荷重をできるだけ実際交通流に近い多くの凝装連行荷重列により表わし、これらの荷重列による橋梁の衝撃の解析方法について考察を加えた。

現在の示方書では、橋梁の衝撃は主として、スパンとの関係においてのべられていることと、また上記の原因は、スパン長と非常に密接に関係することを考えて、これらの結果をすべてスパン長との関係において整理し

た。

とくに、スパン長が大きくなるにつれて同時に載荷する荷重の数が多くなり、車頭間隔がスパン長に比較して小さい場合には、荷重相互に相殺しあう可能性が大きくなって、衝撃係数はスパン長が大きくなると急激に小さくなることを立証することができた。

2. ランダム連行荷重列について

昭和38年12月16日に国道8号線（金沢～小松間、高岡～富山間）において、さらに昭和39年3月18日に国道1号線（逢坂山付近、草津市付近）において実際の交通流の調査を行なった¹⁰⁾。

その結果から、自動車交通流は一般にある1つの車群をなして走行しており、その車群に含まれる台数の分布はポアソン分布に近く、1荷重列における車頭間隔もまたポアソン分布に近いことを確認した。さらに自動車の総重量の分布は西村 昭氏の報告⁹⁾から、小型車および大型車それぞれについて正規分布にしたがうとし、さらに小型車と大型車の比($p:q$)は、今回の観測では7:3であった。以上の観測結果から、われわれは自動車連行荷重列の確率模型を電子計算機の中でシミュレーションすることを試みた。これについては現在調査を続行中であるので結果がまとまり次第報告する。

本報告では、このようにして作成された自動車連行荷重列による橋桁の振動について解析する。

3. ランダム自動車荷重列による橋桁の動的応答

2. でのべたように荷重の重さ、車頭間隔および荷重列にふくまれる車の台数（以下車群台数という）が、それぞれある確率分布にしたがう連行荷重列をわれわれはランダム自動車荷重列（以下単にランダム荷重列という）と呼ぶ。このようなランダム荷重列が、ある一定速度で橋梁上を走行する際の橋の振動は、その荷重列のもつ重量、車頭間隔および車群台数などの分布によって、ランダムであると考えられる。われわれはこのことに注目して、このような荷重列による橋梁の衝撃について解析する。

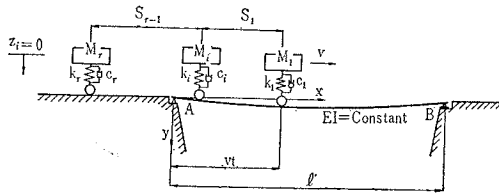
まずわれわれは、問題を解明する第1段階としてつぎの仮定を用いた。

* 第19回土木学会年次学術講演会で発表 I-30（昭和39年5月）

** 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 金沢大学助教授 工学部土木工学教室

図一 ランダム荷重列と橋の振動模型



(1) 自動車は図一のようにばね上質量 M_i とばね定数 k_i をもつばねからなるばね質量系と仮定し、さらに、 $\mu = k_i/M_i g$ において1つのランダム荷重列について一定とした。すなわち荷重の固有振動数を一定とした。

(2) 自動車の全質量がこのばね上質量に集中しているものとし、ばね上質量は鉛直方向の振動のみを行ない、走行などによるロッキング現象を無視する。

(3) ランダム荷重列の車群台数および車頭間隔はポアソン分布にしたがい、重量の分布は小型車、大型車についてそれぞれ正規分布をなす双峰性分布とし、その比 ($p:q$) は 7:3 をとる¹⁰⁾。

(4) 橋は単純支持された桁橋とし、その橋面は滑らかであり、全長に渡って剛比 EI は一定とする。

(5) ランダム荷重列は等速で左支点から右支点に向かって橋桁の動たわみ曲線にそって滑めらかに走行するものとする。

以上の仮定のうち(1)および(2)については、自動車は前後左右の車輪の上にそれぞればねを有し、4自由度系として解かねばならないが、橋桁のスパン長に比較して、前後車軸間距離は短く、しかもトラックなどの後輪荷重は前輪荷重に比較して大きいことなどからこれを1自由度系と仮定した¹¹⁾。また左右のロッキングについても橋軸直角方向の橋面は平滑であるとしてこれを無視した。さらにばね下荷重、すなわち自動車のタイヤおよび車軸にあたる部分の質量は自動車の全重量に比較して小さいので無視することにした。またばね定数 k_i と荷重の重量 W_i との比 μ を一定とした、すなわち荷重の固有振動数を等しくとったが、これはトラックや乗用車など車種によって当然異なると考えられるが、今回は第一次近似としてこのように仮定した。(3)については2.で述べたとおりであり、(4)については、橋のスパン長により橋の形式が異なり、また橋桁の各断面積も一般に変化するものであるが、今回は主として走行荷重による橋桁の衝撃作用を究明するために橋の形式を単純化し、その諸元について建設省土木研究所設計の活荷重合成桁橋標準設計¹²⁾の値を各種スパン長についてプロットし、この曲線より近似的に必要なスパン橋の各諸元の値を定めている。(5)については、計算の便宜上、荷重列は橋面の中央を一定速度で走行するものとした。

以上5つの仮定を用いてランダム荷重列による橋桁の振動を解析する。

つぎに基礎運動方程式の誘導であるが、一般に行なわれるように擬装化されたランダム荷重列と橋桁との連成振動に関する運動方程式をエネルギー法で導く。

いま荷重の先頭車が橋桁の左支点上を出発する時刻を $t=0$ として、この t で以後の時刻を測ることとする。

まず、桁の無応力状態を基準として測った桁の全たわみ y を一般座標 $q(t)$ と基準座標 $\psi(t, x)$ で表わす。すなわち、

$$y = q(t)\psi(t, x) \dots\dots\dots(1)$$

ここに、

$$\psi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K} \eta_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(2)$$

$$\eta_n(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r \epsilon_i \frac{W_i}{n^4} \sin \frac{n\pi x_i}{l} + \frac{2mgl}{n^5\pi} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

となる。式(2)中の K はパラメータであり、桁の剛比 EI によって定まる。もし、橋梁の静たわみに合せるとすれば $(lEI/2)(\pi/l)^4$ をとる。 ϵ_i はそれぞれの荷重について、 i 番目の荷重が橋梁上にある時は1とし、荷重が橋梁上に達していない場合および橋梁を通過したあとをそれぞれ0とする。

すなわち、

$$0 \leq x_i \leq l \text{ のとき } \epsilon_i = 1$$

$$0 > x_i \geq l \text{ のとき } \epsilon_i = 0$$

である。

このようにして、図一に示すランダム荷重列と橋桁からなる系の全位置エネルギー V は、

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l (y_{xx})^2 dx - \int_0^l (mg)y dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \epsilon_i k_i [z_i - y_i]^2 - \sum_{i=1}^r \epsilon_i (M_i g) y_i \dots\dots(4)$$

となる。

つぎにこの系の運動エネルギー T は、

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \dot{y}_t^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r M_i (\dot{z}_i)_t^2 \dots\dots\dots(5)$$

となる。

つづいて、エネルギーの減衰関数 D はつぎのように表わされるとする。

$$D = \frac{1}{2} \beta \int_0^l \dot{y}_t^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \epsilon_i c_i [(z_i)_t - (y_i)_t]^2 \dots\dots(6)$$

これらの関数をラグランジの運動方程式に入れて、整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{ml}{2K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \eta_n^2 \ddot{q} + 2\eta_n \dot{\eta}_n \dot{q} + \eta_n \ddot{\eta}_n q \} \\ & + \frac{EI}{2K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \eta_n^2 q - \frac{2mgl}{\pi K} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \\ & - \sum_{i=1}^r \epsilon_i \left\{ k_i [z_i - y_i] \frac{\partial y_i}{\partial q} + (M_i g) \frac{\partial y_i}{\partial q} \right\} \\ & + \frac{\beta l}{2K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \eta_n^2 \dot{q} + \eta_n \dot{\eta}_n q \} - \sum_{i=1}^r \epsilon_i c_i [z_i - y_i] \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q} \\ & = 0 \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

となる。いま、式(7)中、 η_n の $n=2$ 以上の項は $n=1$ の項に比較して $1/n^4$ で小さくなることから本研究では、 $n=2$ 以上の項を省略すると、式(7)はつぎのように整理される。

$$\begin{aligned} & \frac{ml}{2K}\eta\ddot{q} + \left\{ \frac{ml}{K}\eta + \frac{\beta l}{2K}\eta \right\} \dot{q} + \left\{ \frac{ml}{2K}\ddot{\eta} + \frac{EI l}{2K} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \eta \right. \\ & \left. + \frac{\beta l}{2K}\ddot{\eta} \right\} q - \sum_{i=1}^r \epsilon_i \{ k_i [z_i - y_i] + (M_i g) \\ & + c_i [\dot{z}_i - \dot{y}_i] \} \sin \frac{\pi v t_i}{l} - \frac{2 m g l}{\pi} = 0 \dots\dots (8) \end{aligned}$$

一方荷重の系はそれぞれの荷重系について運動方程式は、

$$M_i \ddot{z}_i + k_i [z_i - y_i] + c_i [\dot{z}_i - \dot{y}_i] = 0 \dots\dots\dots (9)$$

で表わされる。

4. 数値計算

今計算の便宜上、

$$\tau = \frac{v t}{l}$$

$$K = \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{EI l}{2} \quad \text{剛比パラメータ}$$

$$\alpha = \frac{\pi v}{p_0 l} = \frac{v T_b}{2 l} \quad \text{速度パラメータ}$$

$$p_0 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{橋桁の固有振動数}$$

の記号を用いて式(8)および式(9)を整理すると、

$$\begin{aligned} (d\tau) \frac{d^2 q}{d\tau^2} &= \frac{-\pi^2}{\alpha^2 \left\{ \sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i + \frac{2 m g l}{\pi} \right\}} \\ & \cdot \left[\left\{ 2 \alpha^2 \sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \cos \pi \tau_i \right. \right. \\ & + \frac{\alpha \beta}{m p_0} \left(\sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i + \frac{2 m g l}{\pi} \right) \frac{d\tau}{\pi} \frac{dq}{d\tau} \\ & + \left\{ -\alpha^2 \sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i + \frac{\alpha \beta}{m p_0} \sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \cos \pi \tau_i \right. \\ & + \left. \sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i + \frac{2 m g l}{\pi} \right\} d\tau^2 q \\ & - \sum_{i=1}^r \epsilon_i \left\{ \mu W_i (z_i - y_i) d\tau \right. \\ & + \left. \frac{\alpha p_0 c_i}{\pi} \left(\frac{dz_i}{d\tau} - \frac{dy_i}{d\tau} \right) d\tau \right\} d\tau \sin \pi \tau_i \\ & \left. - \left\{ \frac{2 m g l}{\pi} + \sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i \right\} d\tau^2 \right] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\tau^2 \frac{d^2 z_i}{d\tau^2} &= \frac{-\pi^2}{p_0^2 \alpha^2} \left\{ \mu g (z_i - y_i) d\tau^2 \right. \\ & \left. + \frac{\alpha p_0 g}{\pi W_i c_i} \left(\frac{dz_i}{d\tau} - \frac{dy_i}{d\tau} \right) d\tau \right\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\tau \frac{dy_i}{d\tau} &= \frac{2}{m l p_0^2} \left[\left(\sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i + \frac{2 m g l}{\pi} \right. \right. \\ & + \delta_0 \left. \right) \sin \pi \tau_i \cdot d\tau \frac{dq}{d\tau} + \left\{ \pi \left(\sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2 m g l}{\pi} + \delta_0 \right) \cos \pi \tau_i + \pi \left(\sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \cos \pi \tau_i \right) \right. \end{aligned}$$

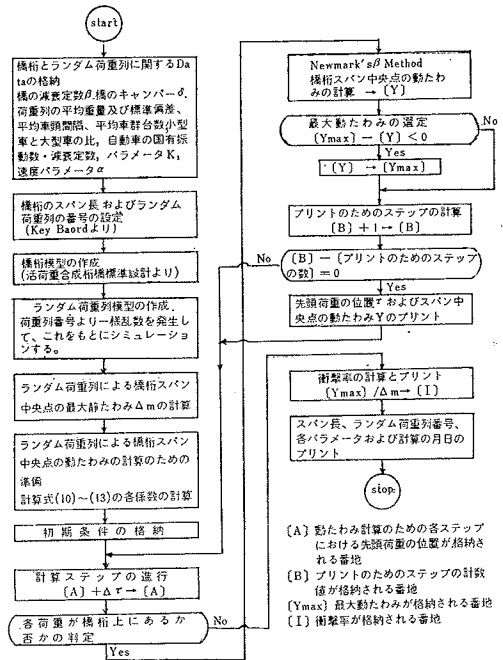
$$\left. \cdot \sin \pi \tau_i \right\} d\tau \cdot q \dots\dots\dots (12)$$

$$y_i = \frac{2}{m l p_0^2} \left\{ \sum_{i=1}^r \epsilon_i W_i \sin \pi \tau_i + \frac{2 m g l}{\pi} + \delta_0 \right\} \sin \pi \tau_i \cdot q \dots\dots\dots (13)$$

$i=1, 2, 3, \dots, r$

となる。これらの式からランダム荷重列による桁の動たわみを求めることができるのであるが、これらの式を直接解くことは困難であるので、われわれはで Newmark's β Method^{(13),(14),(15)} で電子計算機を用いて数値積分を行なうようプログラムした。計算のフローチャートを図-2に示す。

図-2 計算のためのフローチャート



このプログラムでは、橋桁のスパン長、各パラメータおよびランダム荷重列を変えて種々の場合の数値計算が行なえるよう、これらの変数を Input Data として選んだ。

計算ステップの間隔 $d\tau$ は計算の収斂と安定から最大静たわみの計算では 0.01 をとり、動たわみを求める積分では 0.001 をとった。output は 20 step ごとに荷重列の先頭荷重の位置と動たわみを印字するようになっていいる。

なお、計算が終了したならば、本計算中で起こった最大動たわみを最大静たわみで除したいいわゆる衝撃率を印字して、計算を終了する。この時の計算時間はランダム荷重列の長さによって異なるが、5台の荷重列で約1時間を要する。つぎに Newmark's β Method (計算過程については参考文献 13),14) および 15) を参照) で用いた関係式をあげる。

- [A] たわみ計算のための各ステップにおける先頭荷重の位置が格納される番地
- [B] プリントのためのステップの計算値が格納される番地
- [Ymax] 最大たわみが格納される番地
- [I] 衝撃率が格納される番地

$$\Delta\tau\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_j = \Delta\tau\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_{j-1} + \frac{1}{2}\left\{\Delta\tau^2\left(\frac{d^2q}{d\tau^2}\right) + 4\Delta\tau^2\left(\frac{d^2q}{d\tau^2}\right)_{j-1}\right\} \dots\dots\dots(14)$$

$$\Delta\tau\left(\frac{dz_i}{d\tau}\right)_j = \Delta\tau\left(\frac{dz_i}{d\tau}\right)_{j-1} + \frac{1}{2}\left\{\Delta\tau^2\left(\frac{d^2z_i}{d\tau^2}\right) + 4\Delta\tau^2\left(\frac{d^2z_i}{d\tau^2}\right)_{j-1}\right\} \dots\dots\dots(15)$$

$$q_j = q_{j-1} + \Delta\tau\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_{j-1} + \frac{1}{6}\left\{\Delta\tau^2\left(\frac{d^2q}{d\tau^2}\right) + 2\Delta\tau^2\left(\frac{d^2q}{d\tau^2}\right)_{j-1}\right\} \dots\dots\dots(16)$$

$$(z_i)_j = (z_i)_{j-1} + \Delta\tau\left(\frac{dz_i}{d\tau}\right)_{j-1} + \frac{1}{6}\left\{\Delta\tau^2\left(\frac{d^2z_i}{d\tau^2}\right) + 2\Delta\tau^2\left(\frac{d^2z_i}{d\tau^2}\right)_{j-1}\right\} \dots\dots\dots(17)$$

$i=1,2,3,\dots\dots r$

ここに、 j は積分ステップの番号である。

つぎに、計算の誤差について、本計算は連立微分方程式の形になっているので直接これを論ずることが困難であるので、われわれがプログラムした数値積分のサブルーチンについて、理論解の知られている1自由度系の微分方程式を試算してその誤差を確認した。この場合 Iteration 中の許容誤差を $\pm 1 \times 10^{-10}$ にして、積分ステップを振動周期 T の $1/1000$ とした場合、1周期過ぎた時の計算誤差は 1.9×10^{-6} であり、積分ステップを振動周期 T の $5/1000$ とした場合の誤差は 4.1×10^{-5} であった。

前述のようにわれわれは今回の計算では step 間隔 $\Delta\tau$ を 0.001 に選んでいるので、荷重の走行速度を 60 km/h (1666 cm/sec) とした場合、各スパン長の橋梁の固有振動周期 T_0 を基準に $\Delta\tau/T_0$ を算出すると $0.005 \sim 0.007$ の範囲となり Newmark の与えた収斂および安定に関する条件¹³⁾を十分満足しているものと解される。さらに誤差についても連行荷重列による多くの計算をくり返したとしても衝撃係数として小数点以下 $2 \sim 3$ 桁を論ずる段階では十分正しいものである。

われわれは、このプログラムを完成し、各種スパンについて、各種のランダム荷重列を走行させ、多くの計算結果を統計的に整理することによって道路橋の衝撃係数を明確にし、さらに電子計算機による橋梁の動的設計の基礎資料となるよう計算を行なった。

計算に用いた各スパン長の橋桁に対する諸元を表一1にあげた。表一3中に本計算に用いたシミュレーションされたランダム荷重列をあげた。これらの表中、重要な

表一1 スパン長とその諸元

$l(\text{m})$	$W(\text{kg})$	$EI(\text{kg}\cdot\text{cm})$	$p(\text{rad/sec})$	$\beta(\text{kg/cm/sec})$
20	$1.0 \cdot 10^5$	$7.5 \cdot 10^{12}$	29.8	0.006
30	$1.56 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^{13}$	18.4	0.006
40	$2.15 \cdot 10^5$	$3.65 \cdot 10^{13}$	15.9	0.006
50	$2.74 \cdot 10^5$	$7.00 \cdot 10^{13}$	13.9	0.006
60	$3.33 \cdot 10^5$	$1.02 \cdot 10^{14}$	11.6	0.006

ものについて説明する。

ランダム荷重列の車群台数および車頭間問題は 2. でのべたように観測結果から平均台数 3.5 台、平均車頭間隔 15 m のポアソン分布とし、重量分布は小型車と大型車の比率を $7:3$ とし、昭和 30 年近畿地方建設局が行なった観測結果^{8),9)}から小型車平均 1.540 t 、標準偏差 0.55 t 、大型車平均 7.740 t 、標準偏差 2.08 t のそれぞれ正規分布をなす、いわゆる双峰性分布であるとして、電子計算機の中でシミュレーションした。

橋桁の剛比 EI は、今回は建設省土木研究所設計の活荷重合成桁橋標準設計から得た値を用いた。橋桁の減衰係数 β は $0.006 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$ を用いた。

荷重のばね定数 k_i については、その質量 M_i との比 μ が各荷重について一定となるようにし、その値については、トラックまたは乗用車などの車種によって異なる値であるが、今回は一般に自動車の走行中のばね上質量の振動数は $2.0 \sim 3.0 \text{ cps}$ 前後であることから、これを逆算して μ の値をつぎのように仮定して計算を行なった。

$$\mu = 0.446 \quad (3.33 \text{ cps})$$

$$\mu = 0.362 \quad (3.0 \text{ cps})$$

$$\mu = 0.252 \quad (2.5 \text{ cps})$$

$$\mu = 0.162 \quad (2.0 \text{ cps})$$

なお、自動車の減衰係数 c_i は自動車の形式や停止中と走行中などによって異なるのであるが、その資料が入手できなかったので、今回は橋梁への振動に対して多少安全側にとり考えられる減衰係数の下限値として $0.002 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$ を用いた。このため比較的長いスパンに対しても自動車の初期変位の影響が表われている。

つぎにランダム荷重列の走行速度であるが、今回は 60 km/h (1666 cm/sec) を採用した。走行荷重による橋桁の振動は走行速度によっても異なるのであるが、今回は主として荷重をランダム荷重列とみなすことによって、統計的に橋梁のスパン長と衝撃係数について調べようとする目的から 60 km/h 等速として計算を行なった。

以上の諸元および初期条件として各荷重の初期変位 $(z_i)_0$ および初期速度 $(\dot{z}_i)_0$ を用いて、式 (10), (11), (12), (13) の数値計算を行なうのであるが、この初期条件を選ぶにあたってはつぎのような過程をへている。

すなわち、橋桁は $t=0$ で静止しているものとし、すなわち、 $q_0=0, \dot{q}_0=0$ とし、荷重の $(z_i)_0$ および $(\dot{z}_i)_0$ については、それぞれの荷重が橋桁の左支点を通過した瞬間において $(z_i)_0=0, (\dot{z}_i)_0=0$ とした場合と、荷重が橋桁に入る前にすでにある振動をなしているとし、荷重の振動成分の最大値と静的荷重の比をとり、それを κ で表わし、この κ を $0.1, 0.2, 0.3$ とするよう荷重の初期変位 $(z_i)_0$ を選んだ場合について計算を行なった。なお、

この場合の初期速度 (\dot{z}_i)₀ は 0 としている。

すなわち $t=0$ における各荷重のもつ最大振動成分は、

$$k_i[z_i - y_i]_0 = \mu W_i[(z_i)_0 - (y_i)_0] = \kappa W_i \dots (18)$$

$$\kappa = \mu[(z_i)_0 - (y_i)_0] \dots (19)$$

として表わされ式 (19) 中、 i 番目の荷重が橋桁の左支点上にあるときは $(y_i)_0 = 0$ であるから、式 (19) は書き替えられて、

$$(z_i)_0 = \kappa / \mu \dots (20)$$

となる。ここで、式 (20) 中のパラメータ μ および κ のそれぞれの数値に対する各自動車の初期変位 $(z_i)_0$ の値を表-2 に示す。今回の計算では自動車の走行中の固有周期を 0.3 sec にとり、それぞれの κ に対する荷重の初期変位、 $(z_i)_0$ 。表-2 の最上段の値を用いることにした。なお、この κ は、今回の計算では橋梁上を走行していることを考慮して標準として 0.3 を採用した。

表-2 κ および μ に対する初期変位 z_0 の値

$\mu \backslash \kappa$	0.1	0.2	0.3	0.4
0.446	0.224	0.448	0.672	0.896
0.362	0.276	0.552	0.828	1.104
0.252	0.397	0.794	1.191	1.588
0.162	0.617	1.234	1.851	2.468

以上、今回の計算に用いた主な数値について説明を加えたが、これらの数値のより適切な値は、あるものは多くの観測結果から、あるものは実験や理論解析の結果から導きだすべきものであるが、本研究の主目的は、連行荷重による橋桁の衝撃を論じようとするものであることから、これらの数値は一応妥当な数値であると考えられる。

つぎに電子計算機で行なった数値計算の結果を表-3 および図-3,4,5,6 (a),(b),(c),(d) 7 に示す。

5. 計算結果とその考察

まず図-3 に、初期変位 z_0 と衝撃係数との関係を調べるために、スパン長 30 m の橋桁上を総重量 7740 kg、または 15480 kg の自動車が 1 台走行した場合について座標の横軸に初期変位 z_0 (または κ) をとり、縦軸に衝撃係数をとってプロットした。この図から初期変位 z_0 (または κ) が大きくなるにつれて直線的に衝撃係数が大きくなるのがわかる。図-4 では図-3 を自動車の重量 W と衝撃係数についてプロットした。この図から初期変位 z_0 (または κ) が等しい場合は自動車の重量 W が小さいほど衝撃係数は大きくなるのがわかる。

図-3 初期条件と衝撃係数

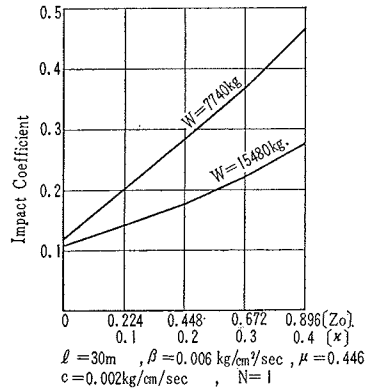


図-4 自動車総重量と衝撃係数

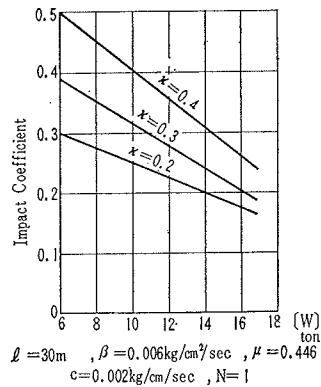
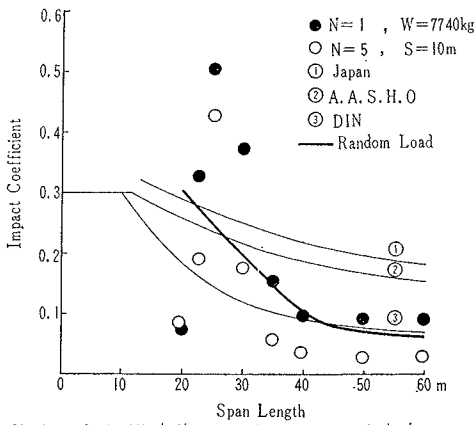


表-3 ランダム荷重列と衝撃係数 (スパン長 30 m, 荷重速度 60 km/h)

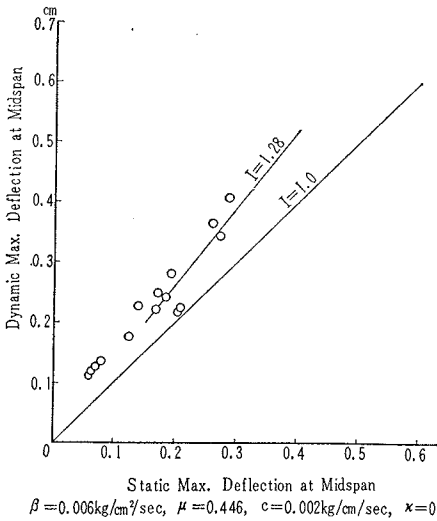
車群の番号	車群台数	荷重の重量 (上段) kg と車頭間隔 (下段) m				スパン中央点の最大静たわみ (cm)	衝撃係数		同時に載荷し得る最大荷重数
		重量	間隔	重量	間隔		κ	μ	
1	4	2400	9600	1500	2300	0.389	0.29	3	
		13.0	14.0	12.0					
2	3	6800	800	2200		0.260	0.43	3	
		14.0	14.0						
3	4	700	1000	1600	3000	0.420	0.16	3	
		9.5	10.0	14.5					
4	2	4900	1200			0.184	0.56	2	
		22.0							
5	5	3700	4100	6000	8100	0.378	0.19	3	
		13.0	19.5	15.0	13.0				
6	3	10000	7500	3000		0.469	0.26	3	
		15.0	13.0						
7	6	4400	2100	2100	1200	0.312	0.12	3	
		12.0	13.0	14.0	15.0				
8	3	2700	2500	1700		0.138	0.40	2	
		15.0	16.0						
9	2	1600	1400			0.099	0.88	2	
		9.5							
10	3	2100	7100	5000		0.370	0.20	3	
		14.0	12.0						
11	4	7300	2300	700	1200	0.274	0.42	2	
		18.0	15.0	17.0					
12	2	3100	2400			0.116	0.70	2	
		20.0							
13	5	2900	6300	1700	2900	0.289	0.21	3	
		12.0	13.0	13.0	12.0				
14	4	6900	2200	5400	1000	0.259	0.43	3	
		22.0	12.0	17.0					
15	2	2600	600			0.110	0.62	2	
		10.0							

図-5 スパン長と衝撃係数



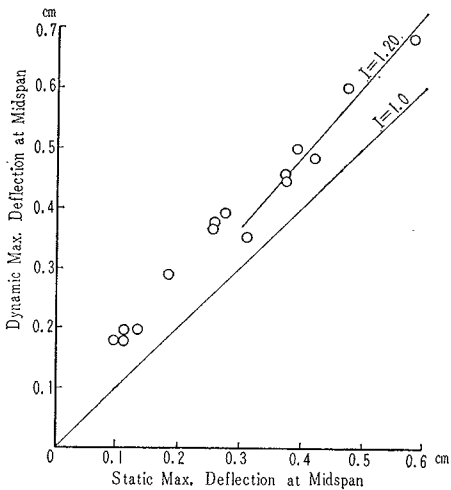
$l = 20 \sim 60 \text{ m}$, $\beta = 0.006 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$, $\mu = 0.446$, $c = 0.002 \text{ kg/cm/sec}$, $\alpha = 0.3$

図-6 (a) スパン中央点の最大静たわみと最大動たわみ ($l = 22.5 \text{ m}$)



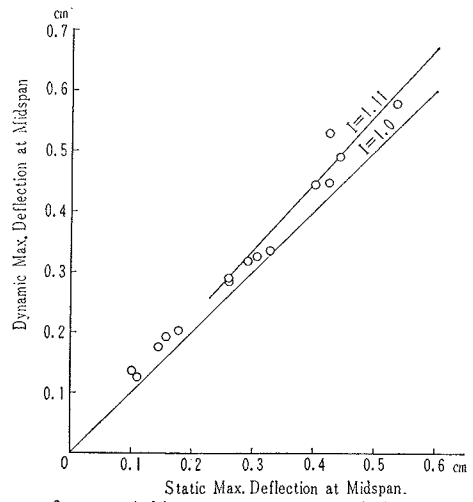
$\beta = 0.006 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$, $\mu = 0.446$, $c = 0.002 \text{ kg/cm/sec}$, $\alpha = 0.3$

図-6 (b) スパン中央点の最大静たわみと最大動たわみ ($l = 30 \text{ m}$)



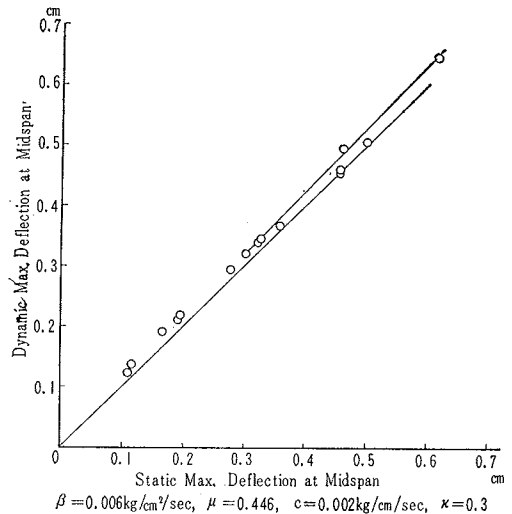
$\beta = 0.006 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$, $\mu = 0.446$, $c = 0.002 \text{ kg/cm/sec}$, $\alpha = 0.3$

図-6 (c) スパン中央点の最大静たわみと最大動たわみ ($l = 40 \text{ m}$)



$\beta = 0.006 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$, $\mu = 0.446$, $c = 0.002 \text{ kg/cm/sec}$, $\alpha = 0.3$

図-6 (d) スパン中央点の最大静たわみと最大動たわみ ($l = 50 \text{ m}$)



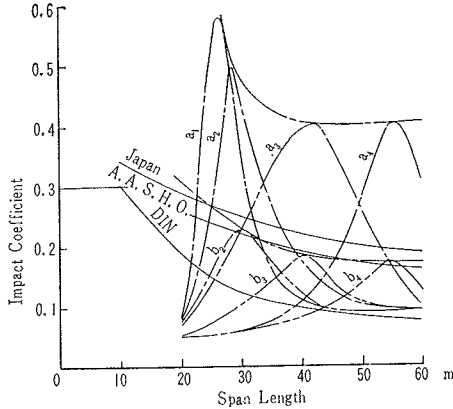
$\beta = 0.006 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$, $\mu = 0.446$, $c = 0.002 \text{ kg/cm/sec}$, $\alpha = 0.3$

つぎに、図-5 に総重量 7740 kg の自動車 が 1 台 走行した場合と 5 台 連行した場合についての計算結果を、横軸にスパン長 l を、縦軸に衝撃係数 i をとってプロットした。図中●は総重量 $W = 7740 \text{ kg}$, $\mu = 0.446$ ($T_0 = 0.3 \text{ sec}$), 初期変位 $\alpha_0 = 0.672$ ($\alpha = 0.3$) の自動車 が 1 台 走行した場合であり、○は前記の自動車 が 5 台、車頭間隔 $S = 10 \text{ m}$ の等間隔で連行した場合の各スパン長に対する衝撃係数である (5 台を選んだのは、今対象として単純支持された 50 m までの橋梁をとっているので一応満載荷重であるとして考えられるからである)。

この 2 つの場合について比較すると自動車 1 台の場合の衝撃係数はスパン長 26 m 前後でかなり大きく 0.5 ~ 0.55 を記録している。このことは走行中の自動車の固

図-7 走行荷重1台の共振曲線

- $a_1 \mu=0.446(3.33 \text{ cps}) z_0=0.672$
- $a_2 \mu=0.362(3.0 \text{ cps}) z_0=0.672$
- $a_3 \mu=0.252(2.5 \text{ cps}) z_0=0.672$
- $a_4 \mu=0.162(2.0 \text{ cps}) z_0=0.672$
- $b_1 \mu=0.446(3.33 \text{ cps}) z_0=0.224$
- $b_2 \mu=0.362(3.0 \text{ cps}) z_0=0.224$
- $b_3 \mu=0.252(2.5 \text{ cps}) z_0=0.224$
- $b_4 \mu=0.162(2.0 \text{ cps}) z_0=0.224$



$l=20\sim 60 \text{ m}, \beta=0.006 \text{ kg/cm/sec}, N=1, W=7740 \text{ kg}, c=0.002 \text{ kg/cm/sec}$

有振動数をスパン長 26 m 前後の橋梁のそれに近い値を選んだためであり、この共振スパン長を過ぎると橋桁のスパン長が大きくなるにつれて急激に小さくなっている。さらに5台連行による衝撃係数について見ると、共振前後のスパン長以外では1台の場合のそれよりかなり小さくなっている。しかし共振スパン長に近い 25 m の橋梁では1台の場合より5台の場合の減少の割合は他のスパン長ほど顕著ではないが、それでもいくらかの減少が認められる。このことは共振状態では種々のパラメータの影響が顕著に表わされるためと考えられる。

このことから、自動車荷重1台による衝撃より数台の連行自動車荷重による衝撃が小さいことがわかる。

つづいて、2.でのべたような電子計算機中でシミュレーションされた表-3に示すランダム連行荷重列による衝撃係数を計算し、各種スパン長について横軸に最大静たわみ d_m を縦軸に最大動たわみ y_i をとってプロットした。図-6の(a),(b),(c),(d)にそれぞれのスパン長についての計算結果を示す(初期変位 $z_0(x)$ および、 μ などの定数は図-5の場合と同様になっている)。これらの図で、縦軸と横軸とのスケールを同じくとってあるので両軸と角度が 45° の線は衝撃率 $I=1.0$ (衝撃係数 $i=I-1$) の線を表わし、各プロットされた点と原点0とを結ぶ直線の勾配が衝撃率を表わすことになる。この図からたわみが小さい連行荷重列に対する衝撃係数は大きく、たわみが大きくなるにつれて一般に衝撃係数は小さくなる傾向にある。われわれが実際に橋梁の設計に用いる衝撃係数はかなりたわみの大きい場合を対象としてい

るのであり、ちなみに本計算で用いている橋梁の設計最大静たわみはスパン 30 m の橋で 15 mm、本計算に用いているランダム荷重列による最も大きい静たわみの約2倍に近い(これはランダム荷重列の走行方向を一方向とし、一車線のみをとったためと考えられる)。このことから設計の際の衝撃係数を検討するにあたっては、たわみの比較的大きい荷重列の衝撃係数を取るのが妥当であると考え、図-6の細線の勾配をもって平均衝撃係数とした。同様の方法で各スパン長の橋梁に対するランダム荷重列による衝撃係数 i を求めて(図-6(a),(b),(c),(d)参照)、図-5に太い実線で示した。

以上のような過程を経て求めた図-5の太い実線は、20 m 以上のスパン長を有する道路の衝撃係数を表わす曲線であると考えられる。しかしこの曲線は、ランダム荷重列が橋梁上を滑らかに走行した場合の橋桁の振動から求めたものであって、特にスパン長の小さい橋梁においては橋面の不整による衝撃効果はかなり影響することも考えられ、またスパン長の 5 m 前後の橋梁については実際主桁以外の設計に用いられる場合が多く、これらの点からも検討する必要がある、20 m 以下の短スパンの橋梁に関しては別途研究をすすめている。

つぎに、わが国における現行設計示方書および各国の設計示方書にとられている値を図-5の細線①,②,③で示す。これら各国の設計示方書にとられている衝撃係数と比較すると、いずれの国の場合とも同じように、スパン長に対する逓減関数として表わされ、とくにわれわれが求めた理論値はスパン長が大きくなり載荷荷重の数が多くなるにつれて急激に小さくなることを示している。このことは、一つの橋梁にいくつかの振動荷重が載荷する場合、橋梁の振動はそれらの荷重との連成振動となり、互に振動を相殺しあうためにその合成振動は小さくなることを裏づけるものと解される。

つぎに、ランダム荷重列の 15 の車群について、車群台数、荷重重量、車頭間隔の分布と衝撃係数との関係について調べるためにその一例としてスパン長 30 m の橋桁に関する計算結果を表-3にあげる。これら3つの分布は互に関連をもっているが、まず、車群台数について、いま、われわれは1つの試みとして、橋桁に同時に載荷し得る最大荷重数を算出して見ると表-3の最終列のとおり、3台載荷の場合が9回、2台載荷の場合が6回となっている。衝撃係数は前者が 0.12~0.43 の範囲にあり、後者が 0.40~0.70 の範囲にある。これにより、同時に載荷する荷重が小さい場合は衝撃係数は大きく、逆に荷重が多くなると衝撃係数は小さくなって、車群台数の分布が橋の衝撃係数におよぼす影響が認められる。

ついで、同時に載荷する荷重数3台および2台のいずれの場合の衝撃係数もその範囲はかなり広い、このことは重量の分布の影響と解することができる。なぜなら、

同時に載荷し得る荷重数が等しいということは車頭間隔の分布の条件がよく似ていると解することができるからである。しかし、車群番号2および14の場合は衝撃係数はそれぞれ0.43となり、2台の場合の範囲に入っているようである。この2車群の重量および車頭間隔の分布を見ると、車群番号2では先頭荷重の重量は他の荷重の重量に比較して大きく、あたかも1台ないし2台走行した場合と同じ現象をていしたのと思われる。また車群番号14の場合は重量の分布は互にその差は少なく、その傾向は13の場合に似ているが、車頭間隔の分布は、先頭荷重と後続荷重との間隔が22mと非常に大きく、この場合も車群番号2の場合と同様に1台ないし2台走行した場合に近い衝撃係数になったものと解される。

このことから車頭間隔は橋桁上に同時に載荷する荷重の数に影響し、さらに橋桁への加振力である荷重の振動の位相差に対する影響とも考えられる。

一方、重量(7740kg)および車頭間隔(10.0m)の等しい1, 2, 3, 4, 5台の連行荷重による衝撃係数は、1台の場合は0.36, 2台の場合は0.20, 3台, 4台, 5台の場合はいずれも0.17であった。このことは荷重が多くなると衝撃係数は小さくなり、連行荷重の数が増しても同時に載荷する荷重の数が変わらない場合は、その衝撃係数も変わらないことを示している。しかし、先にのべたランダム荷重列による衝撃係数は同時に載荷する荷重の数が等しくても、それぞれの車群によって異なっていることはランダム荷重列の重量の分布が衝撃係数になんらかの影響をおよぼしていることを示している。

ここでわれわれは小型車を荷重列の中に考慮したことについて、橋梁の設計に用いる活荷重は大型車がある密度の高い状態で載荷した場合の等価等分布荷重をとっているのであるが、走行自動車荷重列を考える場合はこの小型車は荷重列中のスペースを確保する役割をなしている点と、大型車の7/3倍存在している点などからこれを考慮した。

以上のことから、本研究のように連行荷重列による橋桁の振動から橋梁の衝撃係数を解明しようとする場合は、これら車群台数、荷重の重量および車頭間隔の分布を考慮する必要がある。

なお、引続いて、単一荷重について、自動車の固有振動数を2.0 cps, 2.5 cps, 3.0 cpsとして各振動数に対する共振曲線を図-7に示した。ただし、この場合は初期変位 α_0 を0.672および0.224に選んでいる。この共振曲線の包絡線を1点鎖線および2点鎖線で示した。この包絡線と図-5に示すランダム荷重列による衝撃係数および各国の設計示方書にとられている衝撃係数と比較するとその傾向がかなり一致していることは注目すべき点である。

以上、計算の結果についての考察を行なったが、こ

で今一度本研究で得られたおもな結果を列挙すると、

(1) 自動車荷重が1台の場合の衝撃係数は大きく、その大きさは、荷重の大きさに反比例し、初期変位の大きさに比例する。

(2) 一般に連行荷重列による衝撃係数は単一荷重によるそれよりも小さい。

(3) 単一荷重の場合および連行荷重の場合ともに共振スパンによる衝撃係数は最大でその両側スパンで急激に小さくなっている。

(4) ランダム荷重列による衝撃係数はスパン長に関する通減関数として表わされ、スパン長が大きくなると急激に小さくなる。

(5) ランダム荷重列の車群台数、荷重の重量および車頭間隔の分布が橋桁の衝撃係数へおよぼす影響は大きく、このいずれの分布も無視することはできない。

以上のようになる。

6. む す び

われわれは、道路橋の衝撃係数を合理的に算出するために、走行荷重としてできる限り実際交通流に近い凝装進行荷重列を作成して、各種スパン長における衝撃係数を求め、これらを統計的にスパン長との関係において整理して、図-5の太い実線で示される理論値を求めた。さらに計算の結果、一般に橋梁の衝撃係数は単一荷重による場合は大きい、連行荷重になると小さくなり、またスパン長が大きくなるにつれて急激に小さくなることが明白となった。このことは、スパン長が大きくなるということは一つの橋桁に同時に載荷する自動車の数が多くなり、互の振動を相殺しあう確率が大きくなることに起因すると考えられる。しかし、われわれが求めた衝撃係数も今後の研究によってさらに合理的な値にあらためられるであろう。とくに今回はスパン長20m以上の橋梁を対象に解析を行なったが、20m以下のスパン長の小さい橋梁についても別途研究をすすめている。

さらに進んで、自動車荷重を1自由度系から2自由度系4自由度系と発展させなければならず、また今回は自動車のばね下質量を無視したが、これも質量としては、自動車の全質量にくらべればかなり小さいが、この部分の固有振動数は大きく、橋梁のもつ高次の振動に共振することも考えられるので、さらに次数をあげた解析も必要になってくる。さらに今回は荷重列の走行速度を一定としたが、この点についても検討する必要がある。しかし、本研究においては橋梁のスパン長と衝撃係数の関係について一応の解析値を得たのでここに報告したものであり、上の問題について今後研究を重ねる計画である。

なお、本研究にあたって終始ご指導下さいました、京都大学 小西一郎 教授 ならびに自動車工学関係資料を収集するにあたってご便宜をお与え下さいました東京工業

大学 近藤政市教授に感謝の意を表する。この研究の一部に文部省科学試験研究費の援助を受けたことを付記する。

記号とパラメータ

ランダム荷重列に関する記号

M_i または W_i : 自動車のばね上質量またはばね上重量 (以下サフィックスの i は荷重列の先頭荷重から数えて i 番目の荷重に関する記号であることを示す)

m_i 自動車のばね下質量
 k_i 自動車のばね定数
 c_i 自動車のもつ減衰係数
 μ k_i/W_i (1 荷重列中一定と仮定する)
 s_i i 番目の自動車と $i+1$ 番目の自動車の車頭間隔
 S_i s_i/l
 v 荷重列の速さ (一定と仮定する)
 $p:q$ 交通流の小型車と大型車との比 ($p+q=1.0$)
 z_i 自動車が橋桁の支点上で静止しているときのばね上荷重の重心の位置から測ったばね上荷重の重心の鉛直変位

橋桁に関する記号

l スパン長
 W 全重量
 m 単位長さ当りの質量
 EI 剛比
 β 減衰係数 (式 (6) から単位長さ当りとなっている)
 δ_0 両端支点を結んだ線を基準にして測った場合の橋桁中心線のキャンバーのスパン中央点の高さ
 y 無応力状態を基準にして測った場合の橋桁の全たわみ
 $q(t)$ 式 (1) 中での一般座標で、時間のみの関数
 $\psi(t, x)$ 式 (1) 中の基準関数
 $\eta_n(t)$ 基準関数中の時間のみの関数
 ϵ_i i 番目の荷重が橋桁上にあるかいないかを表わす記号, すなわち橋桁上に

ある場合を 1, ない場合を 0 とする。
 p_0 橋桁の固有振動数
 T_0 橋桁の固有振動周期
 V ランダム荷重列と橋桁からなる系の全位置エネルギー
 T 上の系の運動エネルギー
 K $=(\pi/l)^4 EI l^2 / 2$, 式 (2) 中の橋桁の剛比に関するパラメータ
 α $=\pi v/p_0 l = v T_0 / 2 l$, ランダム荷重列の速度に関するパラメータ, すなわち速度パラメータ

参考文献

- 1) C.E. Inglis: "A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges", Cambridge, 1934.
- 2) 三瀬幸三郎・国井修二郎: "走行荷重による橋桁の強制振動論", 九州大学弾性工学研究所報告 1-1 1943.
- 3) T.P. Tung, L.E. Goodman, T.Y. Chen and N.M. Newmark: "Highway-Bridge Impact Problems", Highway Research Board Bulletin 124, 1956.
- 4) J.M. Biggs and J.M. Lowry: "Vibration of Simple-span Highway Bridges", Transactions of ASCE, 1959.
- 5) S.J. Fennes, A.S. Veletsos and C.P. Siess: "Dynamic Studies of the AASHO Road Test Bridges", Highway Research Board Special Report 73, 1962.
- 6) I. Konishi and M. Shinozuka: "Stochastic Study on Uniform Live Load in the Design of Highway Bridge", Tech. Report of Engg. Ras. Inst., Kyoto Univ., Vol. 6, No. 2, Report No. 28 1956.
- 7) 小西・山田・篠塚・小堀: "橋の衝撃係数に関する確率論的一考察", 土木学会論文集 62 号, 昭和 34 年.
- 8) 西村 昭: "自動車荷重のばらつきについて", 神戸大学建設工学研究所報告, 昭和 36 年.
- 9) 西村 昭: "荷重列としての自動車交通流の二, 三の解析", 土木学会誌, 46-2 昭和 36 年.
- 10) 小堀・吉田: "電子計算機による自動車交通流模型の作成について", 金沢大学工学部紀要 Vol. 3, No. 3.
- 11) 平尾・近藤・亘理・山本: "理論自動車工学", 山海堂 昭和 36 年.
- 12) 建設省道路局監修・同土木研究所設計: "道路橋標準設計図集 2) 活荷重合成桁橋", 日本道路協会, 昭和 38 年.
- 13) Newmark, N.M.: "Computation of Dynamic Structural Response in the Range Approaching Failure" Proc. of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, 1952.
- 14) Newmark, N.M.: "A Method of Computation for Structural Dynamics", Proc. of ASCE, EM Vol. 85, No. 3, p. 199, July, 1959
- 15) 山田善一: "β 法による構造物のレスポンス解析に関する考察", 土木学会第 17 回年次学術講演会講演概要, 昭和 37 年 5 月.

(1964. 9. 28・受付)