

領域が有理関数によって直線境界の半平面に等角写像される場合の二次元弾性問題の解法およびくさび状の裂目を有する無限薄板へのその応用

THE SOLUTION OF TWO DIMENSIONAL ELASTIC PROBLEM WHERE THE REGION IS CONFORMALLY MAPPED ON THE SEMI-INFINITE PLANE BY THE RATIONAL FUNCTION AND IT'S APPLICATION TO THE INFINITE THIN PLATE WITH WEDGE-SHAPED SPLIT

岡 林 稔*

By Minoru Okabayashi

1. 緒 論

与えられた境界条件のもとに二次元弾性問題を解くためには Fredholm の第 2 種積分方程式を解かねばならないが、一般にはそれを解くことは容易でない。しかし、ある種の問題については積分方程式を解くことなしに、閉じた解が得られる。たとえば、Fourier 変換を用いれば無限に長い帯状領域の、Mellin 変換を用いれば無限に広がったくさび状領域の、任意の荷重に対する閉じた形の解が得られる¹⁾。また、Muskhelishvili は領域が有理関数によって単位円に等角写像される場合には積分方程式を解くことなしに解が得られることを示している²⁾。

著者は領域を有理関数によって直線境界の半平面に等角写像することができるとき（これは単位円に等角写像することができるときと本質的には同じである）、境界条件として外力分布が与えられる場合について、Muskhelishvili とは少し異なった方法で解を誘導したが、つぎの理由によって発表することにした。

(1) 著者の方法は Muskhelishvili の方法にくらべて多少わかりやすいと思われる。

(2) 写像関数がある有理関数でないときに、これを有理関数で近似させることが電子計算機を使用すれば割合容易に細工できる。

(3) 写像関数の有理関数表示ができてしまえば、問題を解くことは境界条件に関するいくつかの積分を行なった後、多元連立一次方程式を解くことに帰着する。かつ、その連立方程式の定数項は境界条件によって定まる値であるが、未知数の係数は境界条件に関係なく定まる。したがって、未知数の係数を要素とする行列の逆行列を作っておけば、問題の解決はさらに簡単になる。

2. 予備定理

(1) 応力関数 ϕ は次式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

を満足する重調和関数であるが、これは適当な平面調和関数 U および V を用いてつぎのように表わし得る。

$$\phi = U + yV$$

(2) 調和関数は独立変数 x, y を等角写像関数によって X, Y に変換したとき、 X, Y についてもまた Laplace 微分方程式を満足する。すなわち

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

ならば

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0$$

(3) W 平面 ($X + iY = W$) において実軸を境界とする上部の半平面内に異状点を持たない調和関数で境界値 (実軸上の値) が

$$f(X)$$

与えられるものは次式で示される。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{Y}{(t-X)^2 + Y^2} dt$$

「ただし $f(t)$ は $f(X)$ の文字 X を文字 t に書き換えたもの」

また、この調和関数に対する共役調和関数は次式で与えられることになる。

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{t-X}{(t-X)^2 + Y^2} dt$$

(4) したがって、 W 平面 (XY 平面) において実軸を境界とする上部の半平面内で正則な複素関数で、その実数部の境界値が

$$f(X)$$

であるものは次式で与えられる。

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{dt}{t-W} \quad i = \sqrt{-1}$$

同様に虚数部の境界値が

$$\bar{f}(X)$$

であるものは次式で与えられる。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) \frac{dt}{t-W}$$

$$(5) \frac{1}{(t+\alpha)^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{t-W}, \frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{t-W}$$

* 正会員 名古屋工業大学教授 土木工学科

等を t に関して部分分数に分解すれば、つぎに示すような変形ができる。

$$\frac{1}{(t+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{1}{t-W} = \frac{1}{(W+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{1}{t-W} - \left\{ \frac{1}{(W+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{W+\alpha}{(W+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{1}{(t+\alpha)^2+\beta^2} \right\}$$

一般に

$$\frac{1}{\{(t+\alpha)^2+\beta^2\}^n} \cdot \frac{1}{t-W} = \frac{1}{\{(W+\alpha)^2+\beta^2\}^n} \cdot \frac{1}{t-W} - \sum_{r=1}^n \left[\frac{1}{\{(W+\alpha)^2+\beta^2\}^{n-r+1}} \cdot \frac{t+\alpha}{\{(t+\alpha)^2+\beta^2\}^r} + \frac{W+\alpha}{\{(W+\alpha)^2+\beta^2\}^{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\{(t+\alpha)^2+\beta^2\}^r} \right]$$

また

$$\frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{1}{t-W} = \frac{W+\alpha}{(W+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{1}{t-W} - \left\{ \frac{W+\alpha}{(W+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2+\beta^2} - \frac{1}{(W+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{\beta^2}{(t+\alpha)^2+\beta^2} \right\}$$

一般に

$$\frac{t+\alpha}{\{(t+\alpha)^2+\beta^2\}^n} \cdot \frac{1}{t-W} = \frac{W+\alpha}{\{(W+\alpha)^2+\beta^2\}^n} \cdot \frac{1}{t-W} - \sum_{r=2}^n \frac{1}{\{(W+\alpha)^2+\beta^2\}^{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\{(t+\alpha)^2+\beta^2\}^{r-1}} - \sum_{r=1}^n \left[\frac{W+\alpha}{\{(W+\alpha)^2+\beta^2\}^{n-r+1}} \cdot \frac{t+\alpha}{\{(t+\alpha)^2+\beta^2\}^r} - \frac{1}{\{(W+\alpha)^2+\beta^2\}^{n-r+1}} \cdot \frac{\beta^2}{\{(t+\alpha)^2+\beta^2\}^r} \right]$$

また

$$\frac{1}{(t+\alpha+i\beta)^n} \cdot \frac{1}{t-W} = \frac{1}{(W+\alpha+i\beta)^n} \cdot \frac{1}{t-W} - \sum_{r=1}^n \frac{1}{(W+\alpha+i\beta)^{n-r+1}} \cdot \frac{1}{(t+\alpha+i\beta)^r}$$

3. 境界条件

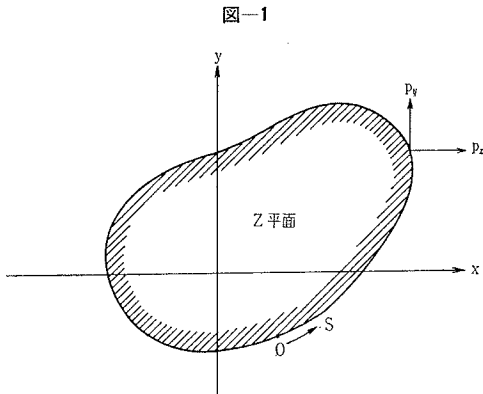
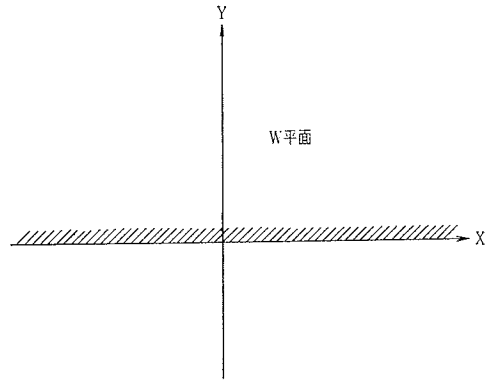


図-2



応力関数を ϕ とすれば境界上 (図-1) で

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \int_0^s p_y ds, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \int_0^s p_x ds$$

〔注: 0 におけるこれらの値は任意に選んで良いから $(\partial \phi / \partial x)_{s=0} = (\partial \phi / \partial y)_{s=0} = 0$ に選ぶ。〕

となる。しかるに境界に立てた内向き法線の方向を n で表わせば、

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dx}{ds}$$

であるから、 $\partial \phi / \partial s$ および $\partial \phi / \partial n$ は s の関数として与えられる。Z 平面 (xy 平面) 上の領域を

$$Z = F(W)$$

なる写像関数によって W 平面 (XY 平面) における X 軸を境界とする上部の半平面に等角写像 (図-2) したものとす。 ($F(W)$ は $Y > 0$ で正則である。ただ Z 平面の領域が無限に広がっているときは Z 平面の無限遠点に対応する W 平面上の点で $F(W)$ は極を持つ。以下の説明においては Z 平面の領域が有限な場合を取り扱うが、Z 平面の領域が無限に広がっている場合の解法はわずかしか異なるから、容易に類推できる)。

このとき $\partial \phi / \partial x$ および $\partial \phi / \partial y$ の境界値を X の関数で表わしたものをそれぞれ、

$$P(X), Q(X)$$

とすれば、これらは既知であって境界上 (X 軸上) で

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = P(X) \frac{dx}{dX} + Q(X) \frac{dy}{dX},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = -P(X) \frac{dy}{dx} + Q(X) \frac{dx}{dX}$$

となる。

4. 解 法

いま、応力関数を 2 個の調和関数 U, V (これらは $Y > 0$ の半平面内に異状点を持たない) を用いてつぎのように表わす。

$$\phi = U + yV$$

ゆえに

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial X} V + y \frac{\partial V}{\partial X},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial Y} V + y \frac{\partial V}{\partial Y}$$

したがって、境界上での $x, U, \text{および } V$ の値をそれぞれ

$$f(X), u(X), v(X)$$

とし、それぞれの共役調和関数 $y, \bar{U}, \text{および } \bar{V}$ の境界値をそれぞれ

$$\bar{f}(X), \bar{u}(X), \bar{v}(X)$$

とし、さらに、

$$\frac{d}{dX} f(X) = f'(X), \quad \frac{d}{dX} u(X) = u'(X),$$

$$\frac{d}{dX} v(X) = v'(X)$$

などと書くことにすれば、

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\partial x}{\partial X}, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial X}, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial X}$$

を考慮し、境界条件を参照して次式が得られる。

$$u'(X) + \bar{f}'(X)v(X) + \bar{f}(X)v'(X) = P(X)f'(X) + Q(X)\bar{f}'(X) \dots \dots \dots (1)$$

$$-u'(X) + f'(X)v(X) - \bar{f}(X)\bar{v}'(X) = -P(X)\bar{f}'(X) + Q(X)f'(X) \dots \dots \dots (2)$$

いま、式(1)および式(2)において、変数 X を t に書き直して各両辺に、

$$-\frac{i}{\pi} \frac{dt}{t-W}$$

を乗じ、 $-\infty$ より $+\infty$ まで t について積分する。すなわち、

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \frac{dt}{t-W} - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}'(t)v(t) \frac{dt}{t-W} \rightarrow$$

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t)v'(t) \frac{dt}{t-W} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(t)f'(t) \frac{dt}{t-W}$$

$$f_{m,n}(X) = \frac{A \left\{ (X+\alpha)^n - \binom{n}{2} \beta^2 (X+\alpha)^{n-2} + \dots \right\} + B \left\{ \binom{n}{1} \beta (X+\alpha)^{n-1} - \binom{n}{3} \beta^3 (X+\alpha)^{n-3} + \dots \right\}}{\{(X+\alpha)^2 + \beta^2\}^n} \dots (6a)$$

$$\bar{f}_{m,n}(X) = \frac{B \left\{ (X+\alpha)^n - \binom{n}{2} \beta^2 (X+\alpha)^{n-2} + \dots \right\} - A \left\{ \binom{n}{1} \beta (X+\alpha)^{n-1} - \binom{n}{3} \beta^3 (X+\alpha)^{n-3} + \dots \right\}}{\{(X+\alpha)^2 + \beta^2\}^n} \dots (6b)$$

$$f'_{m,n}(X) = -nA \frac{(X+\alpha)^{n+1} - \binom{n+1}{2} \beta^2 (X+\alpha)^{n-1} + \binom{n+1}{4} \beta^4 (X+\alpha)^{n-3} - \dots}{\{(X+\alpha)^2 + \beta^2\}^{n+1}}$$

$$-nB \frac{\binom{n+1}{1} \beta (X+\alpha)^n - \binom{n+1}{3} \beta^3 (X+\alpha)^{n-2} + \dots}{\{(X+\alpha)^2 + \beta^2\}^{n+1}} \dots \dots \dots (6c)$$

$$\bar{f}'_{m,n}(X) = -nB \frac{(X+\alpha)^{n+1} - \binom{n+1}{2} \beta^2 (X+\alpha)^{n-1} + \dots}{\{(X+\alpha)^2 + \beta^2\}^{n+1}} + nA \frac{\binom{n+1}{1} \beta (X+\alpha)^n - \binom{n+1}{3} \beta^3 (X+\alpha)^{n-2} + \dots}{\{(X+\alpha)^2 + \beta^2\}^{n+1}} \dots \dots \dots (6d)$$

上式はまた部分分数に分解してつぎのように書き直すこともできる。たとえば

$$\bar{f}'_{m,n}(X) = \sum_{r=1}^{n+1} \frac{C_r (X+\alpha) + D_r}{\{(X+\alpha)^2 + \beta^2\}^r} \dots \dots \dots (7) \text{等}$$

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \bar{f}'(t) \frac{dt}{t-W} \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \frac{dt}{t-W} - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)v(t) \frac{dt}{t-W}$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t)\bar{v}'(t) \frac{dt}{t-W} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\bar{f}'(t) \frac{dt}{t-W} - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t)f'(t) \frac{dt}{t-W} \dots \dots \dots (4)$$

しかるに

$$U + i\bar{U} = S(W)$$

と書くことにすれば、

$$\frac{dS}{dW} = \frac{\partial U}{\partial X} + i \frac{\partial \bar{U}}{\partial X}, \quad \left(\frac{dS}{dW} \right)_{Y=0} = u'(X) + i\bar{u}'(X)$$

であるから、式(3)および式(4)の各左辺第1項は予備定理(4)によって

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \frac{dt}{t-W} = \frac{dS}{dW},$$

$$\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}'(t) \frac{dt}{t-W} = i \frac{dS}{dW}$$

となる。その他の項については写像関数、

$$Z = F(W)$$

が W の有理関数であることを考慮する。すなわち、 Z はつぎの形を有する。

$$Z = F(W) = \sum_m \sum_n \frac{A_{m,n} + iB_{m,n}}{(W + \alpha_m + i\beta_m)^n} \dots \dots \dots (5)$$

「ただし、 $A_{m,n}, B_{m,n}, \alpha_m, \beta_m$ などはすべて実定数であり、 $F(W)$ は $Y > 0$ に極を持たないからすべての β_m は $\beta_m > 0$ である。」

したがって、

$$f(X) = \sum_m \sum_n f_{m,n}(X), \quad \bar{f}(X) = \sum_m \sum_n \bar{f}_{m,n}(X)$$

などと書くとき、 $f_{m,n}(X)$ などは次式のようなになる(繁雑を避けるため添字を省略する)。

「 C_r, D_r は定数」

以上を考慮すれば、たとえば式(3)左辺第2項の被積分関数のうち、

$$\frac{\bar{f}'(t)}{t-W}$$

は予備定理(5)によって部分分数に分解され、つぎの形に表わされる。

$$\frac{\bar{f}'(t)}{t-W} = \bar{f}'(W) \cdot \frac{1}{t-W} + \sum G(W)H(t) \dots (8)$$

ここに $\bar{f}'(W)$ は $\bar{f}'(t)$ において変数 t の代りに W を代入した形の関数であり、 $G(W)$ は W のみの、 $H(t)$ は t のみの関数である。かつ、 $G(W)$ は W の有理関数であって、それが $Y < 0$ の側に有する極は写像関数

$$Z = F(W)$$

が有する各極と一致し、各極の位数の最大のものは

$$Z = F(W)$$

が有する各最大の位数より1だけ大きい。よって、式(3)左辺第2項はつぎのごとくなる。

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}'(t)v(t) \frac{dt}{t-W} = -\frac{i\bar{f}'(W)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t-W} dt - \frac{i}{\pi} \sum \{G(W) \int_{-\infty}^{\infty} H(t)v(t) dt\}$$

上式右辺の各項はそれぞれ $Y > 0$ の側にも極を持つが右辺全体としては $Y > 0$ の側に極を持たないはずである。

ここで

$$V + i\bar{V} = T(W)$$

と書くことにすれば上式右辺第1項は予備定理(5)によって

$$\bar{f}'(W) \cdot T(W)$$

となり、右辺第2項の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t)v(t) dt$$

は $v(t)$ が未知であるから、その値は未定であるが、とにかく定数である。その未定定数を h と書けば、

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}'(t)v(t) \frac{dt}{t-W} = \bar{f}'(W) \cdot T(W) - \frac{i}{\pi} \sum hG(W)$$

となる。以上と同様の操作を式(3)および式(4)の各項に施し、 dS/dW を消去するため式(3)に i を乗じて、式(4)を減ざると dT/dW に関する項(各式の左辺第3項から出てくる)も消去されてつぎの形の式を得る。

$$\{i\bar{f}'(W) - f'(W)\} T(W) = \{f'(W) - i\bar{f}'(W)\} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(t) + iQ(t)] \frac{dt}{t-W} \right\} + \sum R(W) \dots (9)$$

ここに $R(W)$ は W の有理関数で、 $Y < 0$ の側に有する極は $F(W)$ のそれに一致し、各極の最大の位数は $F(W)$ のそれと同じになる。

「注： $\{f'_{m,n}(t) - i\bar{f}'_{m,n}(t)\}$ は式(6c)および式(6d)を参照して計算すると

$$(t + \alpha + i\beta)^{n+1}$$

なる因数が分母、分子で約されてしまうので

$$\frac{f'(t) - i\bar{f}'(t)}{t-W}$$

を部分分数に分解したとき予備定理(5)の最後の式を参照して $Y < 0$ の側に極を有する項は出てこないことがわかる。したがって

$$i(\text{式(3)左辺第2項}) - (\text{式(4)左辺第2項})$$

からは $Y < 0$ の側に極を有する項が消えてしまう。右辺の各項についても同じことがいえる。左辺第3項からは $Y < 0$ の側に極を有する項が出てくるが、その各極の位数の最大のものは $F(W)$ のそれと同じである。」

式(9)の左辺および右辺第1項に表われる

$$f'(W) - i\bar{f}'(W)$$

は式(6c)および式(6d)を用いて

$$f'(W) - i\bar{f}'(W) = \sum_{m,n} \{f'_{m,n}(W) - i\bar{f}'_{m,n}(W)\}$$

と書けるが、

$$\frac{A + iB}{(W + \alpha + i\beta)^n}$$

を W について微分し、虚数部の定数 (B および β) の符号を代えたものは、

$$f'_{m,n}(W) - i\bar{f}'_{m,n}(W)$$

に等しいことが計算される。ゆえに

$$f'(W) - i\bar{f}'(W) = \sum_{m,n} \frac{d}{dW} \left[\frac{A_{m,n} - iB_{m,n}}{(W + \alpha_m - i\beta_m)^n} \right] \dots (10)$$

となる。しかるに

$$Z = F(W)$$

は Z 平面の領域を W 平面の実軸を境界とする上部の半平面に1対1に等角写像する写像関数であるから $F'(W)$ の零点は $Y > 0$ の側には一つもなく、すべて $Y < 0$ の側にある。したがって、この式の虚数部の定数の符号をすべて代えたものである式(10)の零点はすべて $Y > 0$ の側にある。ゆえに、

$$\frac{1}{f'(W) - i\bar{f}'(W)}$$

の極はすべて $Y > 0$ の側にある。式(9)の両辺に

$$\frac{1}{f'(W) - i\bar{f}'(W)}$$

を乗じて、

$$T(W) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t) + iQ(t)}{t-W} dt - \frac{R(W)}{f'(W) - i\bar{f}'(W)}$$

を得るが、上式右辺第1項は外力分布が与えられれば計算される項であり、かつ W 平面の実軸を境界とする上部の半平面内で正則な複素関数である。しこうして、 $T(W)$ は同じ領域で正則であるはずだから、上式右辺第2項を部分分数に分解したとき、 $Y > 0$ の側に極を有

する項はすべて打ち消しあって、 $Y < 0$ の側に極を有する項のみを残すこととなるはずである。したがって、前式はつぎのごとく書かれる ($Y < 0$ の側には先に述べた理由により、新しい極は現われない)。

$$T(W) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t) + iQ(t)}{t - W} dt + \sum_m \left\{ \frac{a_{1,m} + ib_{1,m}}{W + \alpha_m + i\beta_m} + \frac{a_{2,m} + ib_{2,m}}{(W + \alpha_m + i\beta_m)^2} + \dots \right\} \dots\dots\dots(11)$$

「ただし右辺の級数について

$$(W + \alpha_m + i\beta_m)$$

のべきは $F(W)$ にふくまれるものの最高位に等しいところまでとる。

式 (11) によって $T(W)$ したがって、その実数部である $V(X, Y)$ は境界条件によって定まる項 (式 (11) 右辺第1項) と有限級数の和で表わされることとなり、その有限級数は定まった個数の未定定数をふくむことのほかは、その形は写像関数によって定まる。この未定定数を定めるには式 (11) を式 (1) および式 (2) に代入すれば良い (同時に dS/dW したがって、 $\partial U/\partial X$ および $\partial U/\partial Y$ も定まる)。その計算については応用例で説明する。

5. 応用例

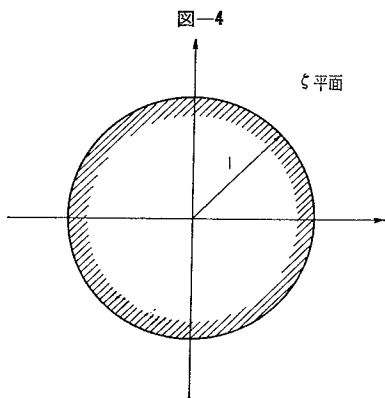
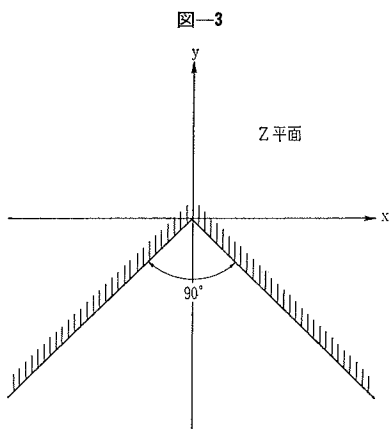


図-3 の領域を 図-4 の単位円の内部に等角写像する関数はつぎのごとくである。

$$Z = i \left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \right)^{3/2}$$

これは $\zeta = -1$ で無限大になる。そして ζ の有理関数でないから近似有理関数を求めるため、まず

$$\omega = \frac{1}{Z + i} = \frac{-i}{1 + \left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \right)^{3/2}}$$

を考える。これを ζ のべき級数に展開すると次式を得る。

$$\omega = i(-0.5 - 0.75\zeta + 0.3125\zeta^3 - 0.09375\zeta^5 + 0.03515625\zeta^7 - 0.009765625\zeta^9 + \dots) \dots(12)$$

この級数は割合に収束の速度が良いが、それでも有限項で打ち切って近似写像関数を作るには 10 項以上とらねば余り良い結果は得られないであろう。しかし、つぎのようにすれば割合に良い近似の有理写像関数が得られる (上記の級数の収束の速度が割合に良いのは 図-3 の隅角Aの内角が2直角より大きいからで、内角が2直角以下になると収束の速度は悪くなる。内角が小さくなるほどその程度はひどくなり、非常に細長い領域は内角が零に近い所が2カ所あるのに近くなるから、非常に収束の速度は悪くなる)。

$$\omega = i \left(-0.5 + A\zeta + \frac{B\zeta}{1 - \alpha\zeta^2} + \frac{C\zeta}{1 - \beta\zeta^2} + \frac{D\zeta}{1 - \gamma\zeta^2} \right) \dots\dots\dots(13)$$

とおいて、これを ζ について展開したものの係数が ζ^{13} の係数まで式 (12) の係数と一致するように各定数を定める (ζ^{15} 以上の係数もかなりのところまで式 (12) の係数に近い値になる)。この例のように式 (12) の級数の収束が早いと定数の決定に電子計算機を使うほどのことはない。式 (13) の項数をもっと増せばもっと良い近似が得られるはずであるが、余り項数の多いのは実用的でないし、 α, β および γ の絶対値が1を越えてはならないという制限も考慮しなければならぬ。計算の結果

$$A = 0.08523 \quad B = -0.89176 \quad C = 0.05148 \\ D = 0.005046 \\ \alpha = -0.33302 \quad \beta = 0.23543 \quad \gamma = 0.67451$$

を得る。なお、式 (13) を ζ で微分したものの零点は単位円内にはないことが計算で確認される。この結果式 (13) に $\zeta = -1$ を代入しても正確には零にならないから、適当な定数を加えて (図形をわずかに平行移動させることになる) $\zeta = -1$ で零になるようにした後、逆数を作る。さらに変換

$$\zeta = -\frac{W - i}{W + i} \quad (W = X + iY)$$

によって W 平面上の半平面に対する写像関数とし、適当な定数を加えて (再び平行移動) Z 平面上の図形の直線縁 (近似的な) がほぼ 図-3 の直線縁に重なるように

する。かつ、全体に実定数を乗じて（図形を拡大させることになる）隅角部の曲率半径（正確な図-3の図形なら、それは零である）をきれいな数になるようにする。その結果はつきのごとくである。

$$Z=6.7287 W-167.4472 i+\sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n}{W+i \beta_n} \cdots(14)$$

$$\alpha_1=-5183.97 \quad \alpha_2=-20.055 \quad \alpha_3=-1.1984$$

$$\alpha_4=-0.13111 \quad \alpha_5=-0.01568 \quad \alpha_6=-0.00118$$

Y=0

X	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.25	0.5
x	0	+0.211	+0.485	+0.848	+1.298	+1.821	+7.243	+20.476
y	-0.089	-0.186	-0.454	-0.844	-1.315	-1.846	-7.246	-20.473

式(14)を用いると

$$\left. \begin{aligned} f(X) &= 6.7287 X + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n X}{X^2 + \beta_n^2} \\ \bar{f}(X) &= -167.4472 - \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n}{X^2 + \beta_n^2} \\ f'(X) &= -6.7287 + \sum_{n=1}^6 \left\{ \frac{-\alpha_n}{X^2 + \beta_n^2} + \frac{2 \alpha_n \beta_n^2}{(X^2 + \beta_n^2)^2} \right\} \\ \bar{f}'(X) &= \sum_{n=1}^6 \frac{2 \alpha_n \beta_n X}{(X^2 + \beta_n^2)^2} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (15)$$

となるが、これを用いて式(11)を誘導するとき、解法の前項で説明したのと異なるのは（Z平面の領域が無限に広がっている）右辺に定数項が残る可能性があるだけであり、それは応力に関係しないから捨てることにすれば（実際、以後の計算を、この定数項を考慮して行なうと、この定数項だけは不定という結果を得る）、式(11)と全く同じものが得られる。

いま、簡単のために外力分布が左右対称（Z平面の領域も左右対称である）である場合に限ることにすれば、式(11)にふくまれる級数の未定定数のうち V(X, Y) が X に関して偶関数であるため零でなければならないものがある。したがって、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} T(W) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)+i Q(t)}{t-W} dt + \sum_{n=1}^6 \frac{i a_n}{W+i \beta_n} \\ V &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-X) \cdot P(t)-Y \cdot Q(t)}{(t-X)^2+Y^2} dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^6 \frac{a_n(Y+\beta_n)}{X^2+(Y+\beta_n)^2} \\ \bar{V} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y \cdot P(t)+(t-X) \cdot Q(t)}{(t-X)^2+Y^2} dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^6 \frac{a_n X}{X^2+(Y+\beta_n)^2} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (16)$$

いま、P(X)を実数部の境界値とする複素関数 F_p(W)、Q(X)を実数部の境界値とする複素関数を F_q(W)と書き、それらの虚数部の境界値をそれぞれ $\bar{P}(X)$ および $\bar{Q}(X)$ と書くことにすれば、予備定理(3)によ

$$\beta_1=31.84 \quad \beta_2=5.297 \quad \beta_3=1.9194 \quad \beta_4=0.80778$$

$$\beta_5=0.32535 \quad \beta_6=0.09665$$

この写像関数によれば隅角部の曲率半径は 0.002 となる。また、式(14)右辺全体をたとえば100倍すればZ平面の図形が100倍に拡大され隅角部の曲率半径は 0.2 となる。そのときの W 平面と Z 平面のそれぞれの境界上の点の対応を数カ所示すと次表のごとくである。

て、V および \bar{V} などの境界値はつきのごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} v(X) &= \bar{P}(X)+Q(X)+\sum_{n=1}^6 \frac{a_n \beta_n}{X^2+\beta_n^2} \\ v'(X) &= \bar{P}'(X)+Q'(X)-\sum_{n=1}^6 \frac{2 a_n \beta_n X}{(X^2+\beta_n^2)^2} \\ \bar{v}(X) &= -P(X)+\bar{Q}(X)+\sum_{n=1}^6 \frac{a_n X}{X^2+\beta_n^2} \\ \bar{v}'(X) &= -P'(X)+\bar{Q}'(X) \\ &\quad + \sum_{n=1}^6 \left\{ -\frac{a_n}{X^2+\beta_n^2} + \frac{2 a_n \beta_n^2}{(X^2+\beta_n^2)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (17)$$

これらを式(3)に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dW} &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{P(t) f'(t) - \bar{P}(t) \bar{f}'(t)\} \frac{dt}{t-W} \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{P}'(t) + Q'(t)\} \frac{\bar{f}(t)}{t-W} dt \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^6 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n \beta_n}{t^2 + \beta_n^2} \cdot \frac{\bar{f}'(t)}{t-W} dt \right\} \\ &\quad - \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^6 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 a_n \beta_n t}{(t^2 + \beta_n^2)^2} \cdot \frac{\bar{f}(t)}{t-W} dt \right\} \cdots \cdots (18) \end{aligned}$$

上式右辺はこれに式(15)の関係を代入するとつきのごとく書かれる。

$$\begin{aligned} \text{第1項} &= F_p(W) \cdot F'(W) \\ \text{第2項} &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{P}'(t)+Q'(t)}{t-W} \cdot \left(167.4472 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n}{W^2 + \beta_n^2} \right) dt + \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^6 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{W^2 + \beta_n^2} \{\bar{P}'(t) \right. \\ &\quad \left. + Q'(t)\} \frac{t}{t^2 + \beta_n^2} dt \right] + \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^6 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n W}{W^2 + \beta_n^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \{\bar{P}'(t) + Q'(t)\} \frac{dt}{t^2 + \beta_n^2} \right] = \{-i F_p'(W) \\ &\quad + F_q'(W)\} \left(167.4472 + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n}{W^2 + \beta_n^2} \right) \\ &\quad + i \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n r_n}{W^2 + \beta_n^2} + i \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n \delta_n W}{W^2 + \beta_n^2} \end{aligned}$$

「ただし

$$r_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{P}'(t) + Q'(t)\} \frac{t}{t^2 + \beta_n^2} dt,$$

$$\delta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{P}'(t) + Q'(t)\} \frac{dt}{t^2 + \beta_n^2}$$

($n=1, 2, \dots, 6$)

は奇関数であるから

でいまの場合、外力は左右対称であるから $P(X)$ は奇関数、 $Q(X)$ は偶関数、したがって $\bar{P}'(X)$ および $Q'(X)$ である。

$\delta_n=0$ ($n=1, 2, \dots, 6$)

$$\begin{aligned} \text{第3項} = & \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \left[\frac{2 a_n \alpha_m \beta_m W}{(W^2 + \beta_m^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_n}{t^2 + \beta_n^2} \cdot \frac{1}{t - W} dt - \frac{2 a_n \beta_n \alpha_m \beta_m W}{(W^2 + \beta_m^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + \beta_n^2} \cdot \frac{t}{t^2 + \beta_m^2} dt - \left\{ \frac{2 a_n \beta_n \alpha_m \beta_m}{W^2 + \beta_m^2} \right. \right. \\ & - \left. \frac{2 a_n \beta_n \alpha_m \beta_m^3}{(W^2 + \beta_m^2)^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + \beta_n^2} \cdot \frac{1}{t^2 + \beta_m^2} dt - \frac{2 a_n \beta_n \alpha_m \beta_m W}{W^2 + \beta_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + \beta_n^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + \beta_m^2)^2} dt \\ & + \left. \frac{2 a_n \beta_n \alpha_m \beta_m}{W^2 + \beta_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + \beta_n^2} \cdot \frac{\beta_m^2}{(t^2 + \beta_m^2)^2} dt \right] = -i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{2 a_n \alpha_m \beta_m W}{(W + i \beta_n)(W^2 + \beta_m^2)} - i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{1}{\beta_n + \beta_m} \left\{ \frac{2 a_n \alpha_m}{W^2 + \beta_m^2} \right. \\ & - \left. \frac{2 a_n \alpha_m \beta_m^2}{(W^2 + \beta_m^2)^2} \right\} + i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m (\beta_n + 2 \beta_m)}{(\beta_n + \beta_m)^2 (W^2 + \beta_m^2)} \end{aligned}$$

「注：第3項をつぎのごとく変形したときは

$$\text{第3項} = \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^6 \left\{ \frac{a_n \beta_n}{W^2 + \beta_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F}'(t)}{t - W} dt - \frac{a_n \beta_n}{W^2 + \beta_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + \beta_n^2} \bar{F}'(t) dt - \frac{a_n \beta_n W}{W^2 + \beta_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F}'(t)}{t^2 + \beta_n^2} dt \right\}$$

右辺第1項の積分は

すると、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F}'(t)}{t - W} dt = F'(W) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F}'(t)}{t^2 + \beta_n^2} dt = F'(W) - 6.7287$$

とはならないことに注意せねばならない。実際は、この場合（領域が無限に広がっている場合）、式(15)を参照

$$\begin{aligned} \text{第4項} = & \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^6 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 a_n \beta_n t}{(t^2 + \beta_n^2)^2 (t - W)} dt - \frac{167.4472 + \sum_{m=1}^6 \frac{\alpha_m \beta_m}{W^2 + \beta_m^2}}{167.4472 + \sum_{m=1}^6 \frac{\alpha_m \beta_m}{W^2 + \beta_m^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 a_n \beta_n t}{(t^2 + \beta_n^2)^2} dt \right. \\ & \cdot \frac{t}{t^2 + \beta_n^2} dt + \left. \frac{\alpha_m \beta_m W}{W^2 + \beta_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 a_n \beta_n t}{(t^2 + \beta_n^2)^2} \cdot \frac{1}{t^2 + \beta_m^2} dt \right\} = -i \sum_{n=1}^6 \frac{167.4472 a_n}{(W + i \beta_n)^2} - i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m \beta_m}{(W + i \beta_n)^2 (W^2 + \beta_m^2)} \\ & - i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m \beta_m}{(\beta_n + \beta_m)^2 (W^2 + \beta_m^2)} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dW} = & F_p(W) F'(W) + \{-i F_p'(W + F_q'(W))\} \left(167.4472 + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n}{W^2 + \beta_n^2} \right) + i \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n r_n}{W^2 + \beta_n^2} \\ & - i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{2 a_n \alpha_m \beta_m W}{(W + i \beta_n)(W^2 + \beta_m^2)^2} - i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{1}{\beta_n + \beta_m} \left\{ \frac{2 a_n \alpha_m}{W^2 + \beta_m^2} - \frac{2 a_n \alpha_m \beta_m^2}{(W^2 + \beta_m^2)^2} \right\} \\ & + i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m (\beta_n + 2 \beta_m)}{(\beta_n + \beta_m)^2 (W^2 + \beta_m^2)} - i \sum_{n=1}^6 \frac{167.4472 a_n}{(W + i \beta_n)^2} - i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m \beta_m}{(W + i \beta_n)^2 (W^2 + \beta_m^2)} \\ & - i \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m \beta_m}{(\beta_n + \beta_m)^2 (W^2 + \beta_m^2)} \end{aligned}$$

上式は見掛けは、

に打ち消しあって、 $Y > 0$ の側には極を持たない。

$$W = i \beta_n \quad (n=1, 2, \dots, 6)$$

上式両辺の虚数部の境界値をとる。

に極を持つように見えるが、実際はそのような項は互い

$$\begin{aligned} \bar{v}'(X) = & \bar{P}(X) f'(X) + P(X) \bar{F}'(X) + \{P'(X) - \bar{Q}'(X)\} \bar{F}(X) + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n r_n}{X^2 + \beta_n^2} - \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{2 a_n \alpha_m \beta_m X^2}{(X^2 + \beta_n^2)(X^2 + \beta_m^2)} \\ & - \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{1}{\beta_n + \beta_m} \left\{ \frac{2 a_n \alpha_m}{X^2 + \beta_m^2} - \frac{2 a_n \alpha_m \beta_m^2}{(X^2 + \beta_m^2)^2} \right\} + \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m (\beta_n + 2 \beta_m)}{(\beta_n + \beta_m)^2 (X^2 + \beta_m^2)} - \sum_{n=1}^6 \frac{167.4472 a_n (X^2 - \beta_n^2)}{(X^2 + \beta_n^2)^2} \\ & - \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m \beta_m (X^2 - \beta_n^2)}{(X^2 + \beta_n^2)^2 (X^2 + \beta_m^2)} - \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{a_n \alpha_m \beta_m}{(\beta_n + \beta_m)^2 (X^2 + \beta_m^2)} = \bar{P}(X) f'(X) + P(X) \bar{F}'(X) + \{P'(X) \\ & - \bar{Q}'(X)\} \bar{F}(X) + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n r_n}{X^2 + \beta_n^2} + \sum_{n=1}^6 \frac{a_n}{X^2 + \beta_n^2} \bar{F}(X) - \sum_{n=1}^6 \frac{2 a_n \beta_n^2}{(X^2 + \beta_n^2)^2} \bar{F}(X) - \sum_{n=1}^6 \frac{a_n X}{X^2 + \beta_n^2} \bar{F}'(X) \\ & - \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{1}{\beta_n + \beta_m} \cdot \frac{a_n \alpha_m}{X^2 + \beta_m^2} + \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{1}{\beta_n + \beta_m} \cdot \frac{2 a_n \alpha_m \beta_m^2}{(X^2 + \beta_m^2)^2} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

式(17)および式(19)を式(2)に代入して整理すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^6 \frac{6.7287 a_n \beta_n}{X^2 + \beta_n^2} + \sum_{n=1}^6 \sum_{m=1}^6 \left\{ \frac{a_n \beta_n \alpha_m}{(\beta_n + \beta_m)^2} \frac{1}{X^2 + \beta_n^2} + \frac{a_n \alpha_m \beta_m}{(\beta_n + \beta_m)^2} \frac{1}{X^2 + \beta_m^2} \right\} = \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n \beta_n r_n}{X^2 + \beta_n^2}$$

上式が恒等的に成立するためには次式が成立せねばならない。

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left\{ \frac{6.7287}{\alpha_1} + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n}{\alpha_1(\beta_1 + \beta_n)^2} \right\} + \sum_{n=1}^6 \frac{a_n}{(\beta_1 + \beta_n)^2} &= r_1 \\ a_2 \left\{ \frac{6.7287}{\alpha_2} + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n}{\alpha_2(\beta_2 + \beta_n)^2} \right\} + \sum_{n=1}^6 \frac{a_n}{(\beta_2 + \beta_n)^2} &= r_2 \\ &\vdots \\ a_6 \left\{ \frac{6.7287}{\alpha_6} + \sum_{n=1}^6 \frac{\alpha_n}{\alpha_6(\beta_6 + \beta_n)^2} \right\} + \sum_{n=1}^6 \frac{a_n}{(\beta_6 + \beta_n)^2} &= r_6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ゆえに

$$r_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \bar{P}'(t) + Q'(t) \} \frac{t}{t^2 + \beta_n^2} dt$$

(n=1, 2, ..., 6)

を計算すれば、式 (20) 左辺の

$$a_n \quad (n=1, 2, \dots, 6)$$

の係数は既知であるから、 a_n は簡単に求められ、式 (16) および式 (18) によって応力関数が定まる。

この例題では a_n の係数からなる行列の逆行列

$$[K_{i,j}]$$

を作るとつぎのようになる (対称行列となる)。

$K_{1,1} = -1255.1623968$	$K_{1,2} = -7.2534743$
$K_{1,3} = -0.9495899$	$K_{1,4} = -0.1922815$
$K_{1,5} = -0.0430917$	$K_{1,6} = -0.0073769$
$K_{2,1} = -7.2534743$	$K_{2,2} = -7.8240150$
$K_{2,3} = -0.1207798$	$K_{2,4} = -0.0299494$
$K_{2,5} = -0.0073086$	$K_{2,6} = -0.0012912$
$K_{3,1} = -0.9495899$	$K_{3,2} = -0.1207798$
$K_{3,3} = -0.7481438$	$K_{3,4} = -0.0135574$
$K_{3,5} = -0.0039747$	$K_{3,6} = -0.0007679$
$K_{4,1} = -0.1922815$	$K_{4,2} = -0.0299494$
$K_{4,3} = -0.0135574$	$K_{4,4} = -0.1253366$
$K_{4,5} = -0.0024755$	$K_{4,6} = -0.0005781$
$K_{5,1} = -0.0430917$	$K_{5,2} = -0.0073086$
$K_{5,3} = -0.0039747$	$K_{5,4} = -0.0024755$
$K_{5,5} = -0.0237797$	$K_{5,6} = -0.0004641$
$K_{6,1} = -0.0073769$	$K_{6,2} = -0.0012912$
$K_{6,3} = -0.0007679$	$K_{6,4} = -0.0005781$
$K_{6,5} = -0.0004641$	$K_{6,6} = -0.0033795$

よって

$$a_n = \sum_{j=1}^6 K_{n,j} r_j \quad (n=1, 2, \dots, 6)$$

より a_n が求められる。

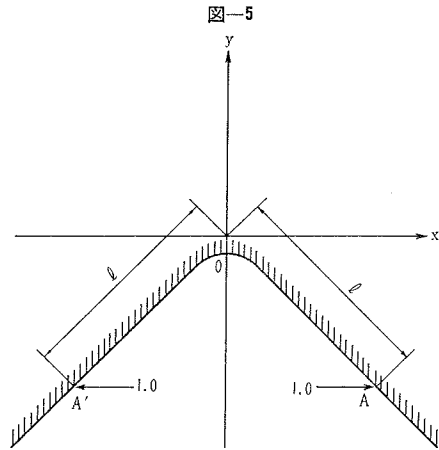
式 (14) の写像関数を k 倍して、拡大した図形について解を求めようとするならば式 (18) の右辺全体が k 倍され、これより式 (20) を誘導するとき k は約されてしまうので式 (20) は変化せず、逆行列も同じものが用いられる。ただ r_n を計算するとき写像関数が k 倍されていることに注意して Z 平面から W 平面への変換を行ない、応力度の計算のときも式 (18) の右辺が k 倍されていることに注意して行なえば良い。

以上によって、図-3 のごとき領域に左右対称な外力

分布があるときは容易に解を得ることができる。たとえば

$$k=100$$

として、図-5 のごとき载荷状態で



$$l=10$$

とした場合を計算する。A および A' は W 平面で $Y=0$ 上の

$$X = \pm 0.2461$$

に対応している。 $P(X)$ および $Q(X)$ は簡単に求められてつぎのごとくなる。

$$P(X) = 0, \quad Q(X) = \begin{cases} 0 \dots \dots -0.2461 > X \\ -1 \dots \dots -0.2461 > X > -0.2461 \\ 0 \dots \dots X > 0.2461 \end{cases}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \bar{P}'(t) + Q'(t) \} \frac{t}{t^2 + \beta_n^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[Q(t) \frac{t}{t^2 + \beta_n^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \frac{t^2 - \beta_n^2}{(t^2 + \beta_n^2)^2} dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-0.2461}^{0.2461} \frac{t^2 - \beta_n^2}{(t^2 + \beta_n^2)^2} dt = \frac{0.4922}{\pi \{ \beta_n^2 + (0.2461)^2 \}} \end{aligned}$$

となり、計算の結果

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.0001545 & r_2 &= 0.005572 & r_3 &= 0.041839 \\ r_4 &= 0.219714 & r_5 &= 0.9414385 & r_6 &= 2.241169 \end{aligned}$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.373417 & a_2 &= -0.066124 & a_3 &= -0.040563 \\ a_4 &= -0.031928 & a_5 &= -0.024185 & a_6 &= -0.008178 \end{aligned}$$

を得る。これらの値および $P(t)$, $Q(t)$ の値を式 (16) に代入すれば、 V が定まり、式 (18) に代入して、実数部および虚数部をとれば、 $\partial U / \partial X$ および $\partial U / \partial Y$ が定

まる。これによって応力度成分を求めるためには

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

などを計算する必要があるが、つぎの関係を用いれば、
計算は多少簡単である。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dS}{dZ} = \frac{dS}{dW}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 S}{dZ^2} \\ &= \frac{d^2 S}{dW^2} \frac{dZ}{dW} - \frac{dS}{dW} \frac{d^2 Z}{dW^2} \\ &= \frac{\left(\frac{dZ}{dW}\right)^3}{dW} \end{aligned}$$

など。

よって、対称軸上（ y 軸上）の応力度成分を計算したものを示すと次表のごとくである（図-5の0点より測った距離を y_1 とする）。

y_1	0	0.1	0.2	0.4	1.0	2.0	3.0	5.0
σ_x	0.752	0.399	0.294	0.209	0.127	0.082	0.060	0.038
σ_y	0	0.122	0.130	0.120	0.095	0.076	0.065	0.052

図-6 $\sigma_1=10 (\sigma_x)_{max}$ の表

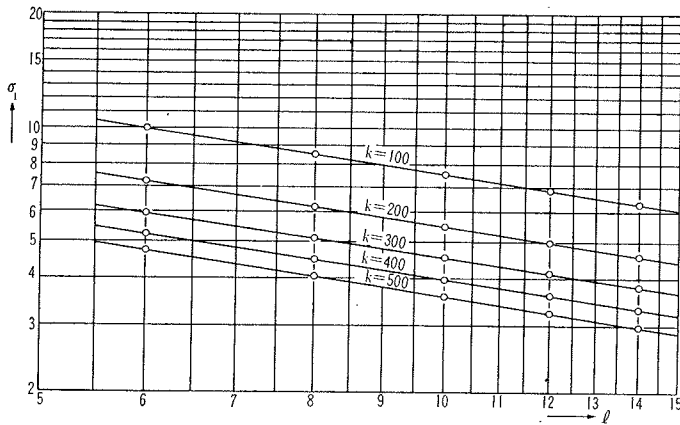
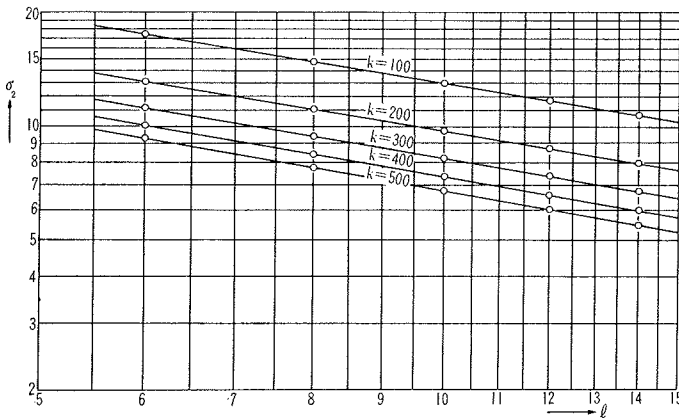


図-7 $\sigma_2=100 (\sigma_y)_{max}$ の表



k および l (荷重の位置) をつぎのごとく種々に変え、

$$k=100, 200, 300, 400, 500$$

$$l=6, 8, 10, 12, 14$$

y 軸上の応力度成分を計算した結果を要約するとつぎのことがいえる。

(1) 0 から少し内側に入ると σ_x は急速に減少し、上記の範囲では $y_1=0.4$ ぐらいからは曲率半径の大小（したがって k の大小）はほとんど σ_x の値に影響しない。

(2) σ_y も引張りであって、その大きさは σ_x よりかなり小さいが、 $y_1=2$ ぐらいまでは k の大小が σ_y の値に影響する。

(3) σ_x の最大値はもちろん $y_1=0$ で起こるが σ_y の最大値はほぼ

$$y_1 = \text{曲率半径}$$

で起こると見て良い。

(4) σ_x および σ_y の最大値の l に対する変化は上の範囲ならば両対数目盛で書くと、ほぼ直線的变化を示す。それを図-6 および 図-7 に示す。

参考文献

- 1) Jan N. Sneddon: Fourier Transforms
- 2) N.I. Muskhelishvili: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity

(1965. 2. 5・受付)