

偏心荷重をうける単純支持円板の曲げについて

BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED CIRCULAR PLATE UNDER AN ECCENTRIC LOAD

佐 正 雄*
By Masa Satake

要旨 偏心荷重をうける単純支持円板の曲げの問題をモーメント荷重をうける場合もふくめて一般的に取り扱ったもので、方法として双極座標を用いる。解は級数解となるが、その係数を求める方法をのべ、代表的な荷重位置について計算結果を示した。また、モーメント荷重をうける場合の解については特に荷重点のたわみ角について検討した。

1. まえがき

偏心荷重をうける円板の曲げの問題を最初に取り扱ったのは Clebsch¹⁾ で、極座標を用いて固定の場合を解き、後に Föppl²⁾ は同様の方法で単純支持の場合を解いている。この方法は Timoshenko の著書³⁾ にも引用されているが、円板を荷重点をふくむ同心円により二つの部分に分けて考えるので、両部分のたわみは二つのべつべつな級数解によって示されることになる。2種類の級数解を用いねばならないことに不満があり、Michell⁴⁾ は固定の場合 inversion の方法により級数解とならない closed form の解を得、後に Melan⁵⁾ も双極座標を利用して同様の表現を得ている。単純支持の場合、双極座標を応用する解については中山⁶⁾ が述べている。Reissner⁷⁾ は単純支持の場合についても closed form の解を導いたが、これは積分をふくむもので一般に実用には用いがたいものと考えられる (Nasittta⁸⁾ はその近似解法について述べている)。さらに、鷺津⁹⁾ は2次元応力問題と平板の理論との analogy を用い単純支持の場合の級数解を導いているが、これは極座標に関するもので、かつ Föppl の解に比し单一な級数解である点がまさっている。

以上は、いずれも偏心集中力をうける場合であるが、そのうち単純支持の場合については鷺津の解が実用的に最もすぐれているように考えられる。しかし、モーメント荷重の場合もふくめて一般的に取り扱おうとするときは、これから述べる双極座標による解法が有力である。すなわち、モーメント荷重の場合も単に反力に関する境界条件を多少変更するだけでよいで集中力の場合の係数をわずかの修正で利用でき、また後述するようにモーメント荷重の場合、荷重点のたわみ角が ∞ になってしま

まう難点を解決することができるのもこの方法の大きい特長といえる。単純支持の場合について双極座標を用いることは以前にも試みられてはいるが、級数解としての取り扱いが十分でなく、またモーメント荷重の問題についてもまったくふれられていないので、これらの点を中心的に双極座標による解法について述べることにする。

2. 双極座標における一般算式

図-1 に示すように、与えられた円板の中心を A 、半径を a 、荷重点を C 、その偏心距離を d とし、 $\frac{d}{a} = \alpha$ とおく。 C を極点とし円 A をその一つにふくむような共軸円群**とこれ

と直交するもう一組の共軸円群とを考えれば、これらがちょうどわれわれの問題に適合した曲線座標を与えるものと考えられ

図-1

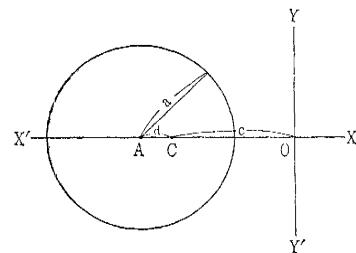
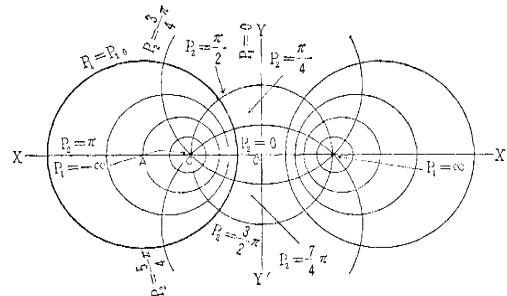


図-2



る (図-2)。いま、その根軸にあたる直線を Y 軸とし、 A, C が X 軸にのるように座標軸をとれば、この2組の円群は、解析関数 $p(z) = \log \frac{c+z}{c-z}$ の実数部 $p_1(x, y)$ 、虚数部 $p_2(x, y)$ を用い、 C_1, C_2 をパラメーターとしてそれぞれ、

** 極点、根軸、共軸円群などについては、たとえば文献 10) 参照。

$$\left. \begin{aligned} p_1(x,y) &= \tanh^{-1} \frac{2cx}{x^2+y^2+c^2} = C_1 \\ p_2(x,y) &= \tan^{-1} \frac{-2cy}{x^2+y^2-c^2} = C_2 \end{aligned} \right\}$$

.....(1)

で示すことができる。ただし、

$$c = \overline{CO} = \frac{a^2 - d^2}{2d} = -\alpha \sinh p_{10}$$

.....(2)

$$p_{10} = \log \alpha = \log \frac{d}{a} \quad(3)$$

である。この場合、円板の周は $p_1=p_{10}$ に、荷重点は $p_1=-\infty$ に対応している。

平板の諸量をたわみ w (スカラー), たわみ角 θ (ベクトル), 断面モーメント M (テンソル), せん断力 S (ベクトル), 分布荷重 q (スカラー) とすれば、これらの双極座標における成分は w によってつぎのように記述することができる*。

$$\left. \begin{aligned} d_{(\kappa)} &= \partial_\kappa w \quad (\kappa=1,2) \\ M_{(11)} &= -\frac{D}{2} \\ &\times [(1+\nu)\Delta w + (1-\nu)h\{(\partial_{11}-\partial_{22})(hw)-hw\}] \\ M_{(22)} &= -\frac{D}{2} \\ &\times [(1+\nu)\Delta w - (1-\nu)h\{(\partial_{11}-\partial_{22})(hw)-hw\}] \\ M_{(12)} &= -(1-\nu)Dh\partial_{12}(hw) \\ S_{(\kappa)} &= -Dh\partial_\kappa \Delta w \quad (\kappa=1,2) \\ q &= D\Delta^2 w \end{aligned} \right\}$$

.....(4)

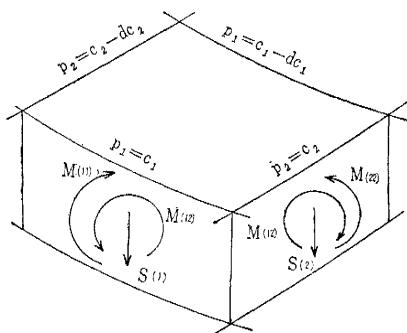
ここに、

$$h = |p'(z)| = \frac{1}{c} (\cosh p_1 + \cos p_2) \quad(5)$$

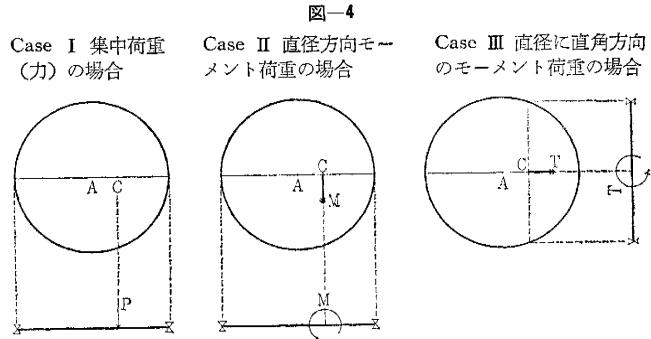
$$\Delta = h^2(\partial_{11} + \partial_{22}) \quad (\text{Laplacian}) \quad(6)$$

また、 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ は板の曲げ剛度、 ν は Poisson 比

図-3



* 双極座標も調和曲線座標の一つであり、その一般的な性質については文献 11) 参照。また、式(4)で添字にカッコを付したのはこれらが物理成分 (anholonomic 成分) の意、 ∂_κ は $\partial/\partial p_\kappa$ の略記。



である。なお、これらの成分の正の向きは図-3 に示すとおりである。換算せん断力は、

$$V_{(1)} = S_{(1)} + h\partial_2 M_{(12)}, \quad V_{(2)} = S_{(2)} + h\partial_1 M_{(12)} \quad(7)$$

となり、その正の向きは $S_{(e)}$ と同様である。

われわれの問題では、荷重点以外で $q=0$ であるから

$$-\infty \leq p_1 \leq p_{10} \quad \Delta^2 w = 0 \quad(8)$$

が成立する。 $p_1=C_1$ 上の w は p_2 の周期関数であるから、式(8)の一般解を p_2 の Fourier 級数形に展開すると都合がよく、

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p_1) \cos np_2 \quad(9)$$

とおく。 w_n はそれぞれ式(8)の解で、周 ($p_1=p_{10}$) 上で $w_n=0$ となるような $f_n(p_1)$ は、

$$\left. \begin{aligned} f_0(p_1) &= A_0 e^{p_1} (p_1 - p_{10}) + B_0 e^{-p_1} (p_1 - p_{10}) \\ &+ A_0^* e^{-p_1} (e^{2p_1} - e^{2p_{10}}) \\ f_1(p_1) &= A_1 (e^{2p_1} - e^{2p_{10}}) + C_1 (p_1 - p_{10}) \\ f_n(p_1) &= e^{(n-1)p_1} [A_n (e^{2p_1} - e^{2p_{10}}) \\ &+ B_n (e^{-2np_1} - e^{-2np_{10}}) + C_n \{e^{-2(n-1)p_1} \\ &- e^{-2(n-1)p_{10}}\}] \end{aligned} \right\}$$

.....(10)

とかくことができる。さらに、荷重点のたわみの有限確定性から、

$$B_0 = B_1 = B_n = C_n = 0 \quad (n \geq 2) \quad(11)$$

を得る。後述するように、残りの未定係数のうち A_0, C_1 は反力のつりあい条件から、 $A_0^*, A_1, \dots, A_n, \dots$ は単純支持の条件から決定される。本論では図-4 に示す 3 種類の荷重状態 (荷重は図示の向きを正とする) を取り扱うが、変形の対称性から、式(9)において Case I, II の場合は \cos , Case III の場合は \sin をとればよいことがわかる。

つきに式(9)の一項 $w_n = \frac{1}{h} f_n(p_1) \cos np_2$ のみによる諸成分を式(4)から求めれば、

$$\left. \begin{aligned}
 M_{(11)} &= -\frac{D}{c} \left[\frac{1}{2} \{f_n'' - (n+1)(1+n\nu)f_n\} \cos(n-1)p_2 + \{f_n'' \cosh p_1 - (1+\nu)f_n' \sinh p_1 - \nu(n^2-1)f_n \cosh p_1 \right. \\
 &\quad \times \cos np_2 + \frac{1}{2} \{f_n'' + (n-1)(1-n\nu)f_n\} \cos(n+1)p_2 \left. \] \\
 M_{(22)} &= -\frac{D}{c} \left[\frac{1}{2} \{\nu f_n'' - (n+1)(n+\nu)f_n\} \cos(n-1)p_2 + \{\nu f_n'' \cosh p_1 - (1+\nu)f_n' \sinh p_1 - (n^2-1)f_n \cosh p_1 \right. \\
 &\quad \times \cos np_2 + \frac{1}{2} \{\nu f_n'' - (n-1)(n-\nu)f_n\} \cos(n+1)p_2 \left. \] \\
 M_{(12)} &= (1-\nu)nDh f_n' \sin np_2 \\
 S_{(1)} &= -\frac{D}{c} h \left[\frac{1}{2} \{f_n''' - (n+1)^2 f_n'\} \cos(n-1)p_2 + \{f_n''' \cosh p_1 - f_n'' \sinh p_1 - (n^2+1)f_n' \cosh p_1 \right. \\
 &\quad - (n^2-1)f_n \sinh p_1 \} \cos np_2 + \frac{1}{2} \{f_n''' - (n-1)^2 f_n'\} \cos(n+1)p_2 \left. \] \\
 S_{(2)} &= \frac{D}{c} h \left[\frac{1}{2} \{f_n''' - (n+1)^2 f_n\} (n-1) \sin(n-1)p_2 + \{f_n'' \cosh p_1 - 2f_n' \sinh p_1 - (n^2-1)f_n \cosh p_1 \right. \\
 &\quad \times n \sin np_2 + \frac{1}{2} \{f_n'' - (n-1)^2 f_n\} (n+1) \sin(n+1)p_2 \left. \] \\
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。ここに、dash は p_1 に関する微分を示す。 $w_n = \frac{1}{h} f_n(p_1) \sin np_2$ によるものは式 (12) において $\cos \rightarrow \sin$, $\sin \rightarrow -\cos$ の置換を行なえばよい。したがって $w = \Sigma w_n$ による諸成分を

$$\left. \begin{aligned}
 M_{(11)} &= -\frac{D}{c} \Sigma m_n(p_1) \frac{\cos np_2}{\sin np_2} \\
 M_{(22)} &= -\frac{D}{c} \Sigma m_n(p_1) \frac{\cos np_2}{\sin np_2} \\
 M_{(12)} &= \frac{D}{c} \Sigma t_n(p_1) \frac{-\sin np_2}{-\cos np_2}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_{(1)} &= -\frac{D}{c} h \Sigma s_1(p_1) \frac{\cos np_2}{\sin np_2} \\
 S_{(2)} &= \frac{D}{c} h \Sigma s_2(p_1) \frac{\sin np_2}{-\cos np_2} \\
 V_{(1)} &= -\frac{D}{c} h \Sigma v_1(p_1) \frac{\cos np_2}{\sin np_2} \\
 V_{(2)} &= \frac{D}{c} h \Sigma v_2(p_1) \frac{\sin np_2}{-\cos np_2}
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

とおけば、 $s_1(p_1)$ 等はつきのように記すことができる。

$$s_1(p_1) = F_n^{**} - \nu(n^2-1)F_n - (1+\nu)f_n' \sinh p_1 + \frac{1}{2} \{n(1+3\nu)(f_{n-1}-f_{n+1}) - (2+3\nu)(f_{n-1}+f_{n+1})\}$$

$$\text{特に } s_1(p_1) = F_1^{**} - (1+\nu)f_1' \sinh p_1 + \frac{1}{2} \{(1+3\nu)(f_0-f_2) - (2+3\nu)(f_0+f_2)\} + \underline{\frac{1}{2}(f_0''-f_0)}$$

$$s_2(p_1) = \nu F_n^{**} - (n^2-1)F_n - (1+\nu)f_n' \sinh p_1 + \frac{1}{2} \{n(3+\nu)(f_{n-1}-f_{n+1}) - (3+2\nu)(f_{n-1}+f_{n+1})\}$$

$$\text{特に } s_2(p_1) = \nu F_1^{**} - (1+\nu)f_1' \sinh p_1 + \frac{1}{2} \{(3+\nu)(f_0-f_2) - (3+2\nu)(f_0+f_2)\} + \underline{\frac{\nu}{2}(f_0''-f_0)}$$

$$t_n(p_1) = (1-\nu) \{nF_n^* - \frac{1}{2}(f'_{n-1}-f'_{n+1})\}$$

$$s_1(p_1) = F_n^{***} - (n^2+1)F_n^* - \{f_n'' + (n^2-1)f_n\} \sinh p_1 + 2n(f'_{n-1}-f'_{n+1}) - \underline{\frac{3}{2}(f'_{n-1}+f'_{n+1})}$$

$$\text{特に } s_1(p_1) = F_1^{***} - 2F_1^* - f_1'' \sinh p_1 + 2(f_0'-f_2') - \underline{\frac{3}{2}(f_0'+f_2')} + \underline{\frac{1}{2}(f_0'''-f_0')}$$

$$s_2(p_1) = n \left\{ F_n^{**} - (n^2-1)F_n - 2f_n' \sinh p_1 + 2n(f_{n-1}-f_{n+1}) - \underline{\frac{5}{2}(f_{n-1}+f_{n+1})} \right\}$$

$$\text{特に } s_2(p_1) = F_1^{**} - 2f_1' \sinh p_1 + 2(f_0-f_2) - \underline{\frac{5}{2}(f_0+f_2)} + \underline{\frac{1}{2}(f_0''-f_0)}$$

$$v_1(p_1) = s_1(p_1) - nt_n(p_1)$$

$$v_2(p_1) = s_2(p_1) + t_n'(p_1) = s_2(p_1) + (1-\nu) \left\{ n(F_n^{**} + f_n' \sinh p_1) - \frac{1}{2}(f''_{n-1}-f''_{n+1}) \right\}$$

ここで、underline の項は特に付加される項を示し、 F_n 等は、

$$\left. \begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{2} f_{n-1} + f_n \cosh p_1 + \frac{1}{2} f_{n+1} \\
 F_n^* &= \frac{1}{2} f'_{n-1} + f_n' \cosh p_1 + \frac{1}{2} f'_{n+1} \quad (\text{以下同様に}, F_n^{**}, F_n^{***} \text{は } f_n'', f_n''' \text{に関するもの})
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{e^{-p_{10}}}{\beta_3} \sinh p_{10} \\ A_2 &= -\frac{e^{-2p_{10}}}{\beta_3} \sinh p_{10} (\beta + 4 \cosh p_{10}) K \\ A_3 &= \frac{e^{-3p_{10}}}{\beta_3} 2(\sinh p_{10}) K \end{aligned} \right\}$$

ただし、 $\beta_3 = \beta^3 + 6\beta^2 \cosh p_{10}$
 $+ 8\beta \sinh^2 p_{10} - 8 \cosh p_{10}$

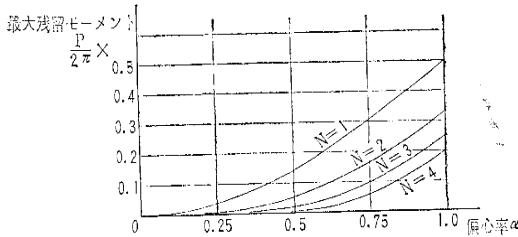
.....(27.3)

等が得られる。これらはいずれも近似式であるから、境界条件式 (16) は完全には満足されず、周辺に最大

$$M_{(11)} = \frac{2D}{c} N |A_N| e^{(N+1)p_{10}} \quad(28)$$

というモーメントが残留することになる。しかし、このモーメントは図-5 に示すように、項数 N を多くとるほど、また偏心率 α が小さいほど小さくなるので、 α が小さい範囲では式 (27) の近似解を適宜用いて差し支えないものである。

図-5



偏心が大きい場合には、項数 N を大きくとらなければならず解析的な解を求めることが困難になる。しかし、前記近似解式 (27) をさらに一般化すれば、つぎのような漸化式を用いた表現を得るので、 $a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} a_N$ を正解と考えることができる。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= (-1)^n \frac{a_n}{N} K \\ a_n &= \frac{-\sinh p_{10}}{n} \frac{\beta_{N,N-n}}{\beta_{N,N}} \end{aligned} \right\} \quad(29)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \beta_{N,0} &= 1 \\ \beta_{N,1} &= e^{p_{10}} \left(2 \cosh p_{10} - \frac{1+\nu}{N} \sinh p_{10} \right) \end{aligned} \right\} \quad(30)$$

一般に、

$$\beta_{N,n} = \beta_{N-n+1,1} \beta_{N,n-1} - e^{2p_{10}} \beta_{N,n-2}$$

これらの式は複雑なようみえるが、電子計算機を用いれば N をいくら大きくしても容易に数値計算を行なうことができる。表-1 は最初 $N=30$ から出発し、 $1 \leq n \leq 30$ のすべての n に対して $|a_n - a_{n-1}| \leq 10^{-7}$ の条件を満足するまで逐次 N を増加させて a_n の計算を行なったもので、小数第 6 位まで正確な数値を示している。また、前記の近似解から得られた数値を表-1 と比較してみると、 $\alpha \leq 0.3$ の範囲では $N=3$ 程度でも十分よい近

似を与えていることがわかる。 $\alpha \geq 0.3$ では項数も多く必要となるので、表-1 の数値を用い補間法によって計算するのがよいと思われる ($\alpha \leq 0.3$ では数値の変動が大きいので表-1 を用いるのは適当でない)。

4. 計算例

前節において集中荷重の場合の解が得られたので、この節では $\alpha=0, 0.25, 0.5, 0.75$ の 4 つの代表的な荷重位置について、たわみ、モーメント、周辺反力を計算した結果を示すこととする ($\alpha=0$ は周知の中心荷重の場合であるが参考のため加えた)。

計算の順序を示せばつぎのとおりである。

- 1) 与えられた α に対する A_n を求める。
- 2) 求める点の $f_n, f'_n, \dots, F_n, F'_n, \dots$ 等の計算。

式 (1) より求めた p_1, p_2 を用いる。 $f_n(p_1)$ は式 (10), (11), (23) より、

$$\left. \begin{aligned} f_0(p_1) &= A_0 e^{p_1} (p_1 - p_{10}) + A_0 * e^{-p_1} (e^{2p_1} - e^{2p_{10}}) \\ n \geq 1 \quad f_n(p_1) &= A_n e^{(n-1)p_1} (e^{2p_1} - e^{2p_{10}}) \end{aligned} \right\} \quad(31)$$

である。

- 3) $w, M_{(rr)}, M_{(00)}, V_{(1)}$ の計算

式 (13), (14) による。極座標成分 $M_{(rr)}, M_{(00)}$ に換算するには次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} M_{(rr)} &= M_1 + M_2 \cos 2\theta + M_{(12)} \sin 2\theta \\ M_{(00)} &= M_1 - M_2 \cos 2\theta - M_{(12)} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad(32)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} (M_{(11)} + M_{(22)}) \\ M_2 &= \frac{1}{2} (M_{(11)} - M_{(22)}) \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x + a \cosh p_{10}} - \tan^{-1} \frac{-x}{y + \frac{c}{\tan p_2}} \end{aligned} \right\} \quad(33)$$

なお、荷重点においては、集中荷重の特異性により、モーメント、せん断力は ∞ となってしまい計算できない。しかし、荷重点のたわみ w_C は次式によって容易に求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} w_C &= \lim_{p_1 \rightarrow -\infty} \frac{1}{h} \sum f_n(p_1) \cos np_2 \\ &= \lim_{p_1 \rightarrow -\infty} 2ce^{p_1} \sum f_n(p_1) \cos np_2 \\ &= -2ce^{2p_{10}} A_0 * \\ &= -\alpha(1-\alpha^2) A_0 * a \end{aligned} \right\} \quad(34)$$

荷重点のたわみが級数とならず、こうして直接求められることもこの解法の一つの特長である。

以上の計算をここではすべてプログラム化し、電子計算機によって行なった。得られた結果は 表-2~5, 図-6~9 に示すとおりで、精度は小数第 4 位まで正確に求めたが、その際の級数の所要項数は表-6 に示すとおりであった。

表-1 a_n

$\alpha \backslash a_n$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
a_1	6.049166	3.007392	1.985758	1.469081	1.154295	0.940354	0.783928	0.663328	0.566478
a_2	2.283338	1.136129	0.751232	0.556876	0.438693	0.358548	0.300087	0.255118	0.219079
a_3	1.251342	0.622932	0.412226	0.305925	0.241361	0.197637	0.165792	0.141335	0.121765
a_4	0.807400	0.402057	0.266200	0.197701	0.156129	0.128002	0.107538	0.091840	0.079294
a_5	0.571651	0.284724	0.188583	0.140129	0.110739	0.090868	0.076421	0.065350	0.056509
a_6	0.429836	0.214123	0.141860	0.105451	0.083377	0.068459	0.057621	0.049321	0.042698
a_7	0.337140	0.167967	0.111304	0.082762	0.065468	0.053777	0.045291	0.038796	0.033616
a_8	0.272839	0.135945	0.090099	0.067011	0.053020	0.043573	0.036715	0.031468	0.027287
a_9	0.226193	0.112712	0.074711	0.055577	0.043985	0.036159	0.030480	0.026137	0.022677
a_{10}	0.191153	0.095258	0.063149	0.046983	0.037191	0.030582	0.025788	0.022122	0.019204
a_{11}	0.164083	0.081773	0.054214	0.040341	0.031939	0.026269	0.022157	0.01914	0.016513
a_{12}	0.142683	0.071111	0.047149	0.035088	0.027784	0.022857	0.019283	0.016553	0.014380
a_{13}	0.125438	0.062519	0.041455	0.030853	0.024434	0.020104	0.016965	0.014566	0.012658
a_{14}	0.111311	0.055480	0.036790	0.027384	0.021689	0.017548	0.015054	0.012937	0.011245
a_{15}	0.099576	0.049633	0.032914	0.024501	0.019408	0.015973	0.013483	0.011582	0.010070
a_{16}	0.089709	0.044716	0.029655	0.022076	0.017489	0.014395	0.012153	0.010441	0.009080
a_{17}	0.081324	0.040537	0.026885	0.020015	0.015857	0.013053	0.011022	0.009471	0.008238
a_{18}	0.074129	0.036952	0.024508	0.018247	0.014457	0.011902	0.010051	0.008637	0.007514
a_{19}	0.067905	0.033850	0.022451	0.016716	0.013245	0.010905	0.009210	0.007916	0.006888
a_{20}	0.062480	0.031146	0.020658	0.015382	0.012189	0.010036	0.008477	0.007287	0.006341
a_{21}	0.057718	0.028773	0.019085	0.014211	0.011262	0.009273	0.007833	0.006734	0.005861
a_{22}	0.053514	0.026677	0.017696	0.013177	0.010443	0.008600	0.007265	0.006246	0.005437
a_{23}	0.049781	0.024816	0.016462	0.012259	0.009715	0.008001	0.006759	0.005812	0.005060
a_{24}	0.046449	0.023156	0.015360	0.011439	0.009066	0.007467	0.006308	0.005425	0.004723
a_{25}	0.043461	0.021666	0.014373	0.010704	0.008484	0.006987	0.005904	0.005077	0.004421
a_{26}	0.040770	0.020325	0.013483	0.010042	0.007959	0.006556	0.005539	0.004764	0.004149
a_{27}	0.038337	0.019113	0.012679	0.009443	0.007485	0.006165	0.005210	0.004481	0.003902
a_{28}	0.036130	0.018012	0.011949	0.008899	0.007054	0.005811	0.004911	0.004224	0.003679
a_{29}	0.034119	0.017010	0.011285	0.008405	0.006662	0.005488	0.004638	0.003990	0.003475
a_{30}	0.032282	0.016094	0.010677	0.007953	0.006304	0.005193	0.004389	0.003776	0.003289

表-2 w

$$\nu=0.3 \quad \times \frac{Pa^2}{4\pi D}$$

$\alpha \backslash$	0	0.25	0.50	0.75
1	0.1967	0.1535	0.1034	0.0512
2	0.3893	0.3074	0.2084	0.1034
3	0.5516	0.4475	0.3074	0.1535
4	0.6346	0.5516	0.3893	0.1967
5	0.5516	0.5751	0.4360	0.2261
6	0.3893	0.4360	0.4077	0.2290
7	0.1967	0.2261	0.2290	0.1741
8	0.1967	0.1788	0.1312	0.0675
9	0.3893	0.3521	0.2563	0.1312
10	0.5516	0.4920	0.3521	0.1788
4	0.6346	0.5516	0.3893	0.1967

表-3 M_{rrr}

$$\nu=0.3 \quad \times \frac{P}{4\pi}$$

$\alpha \backslash$	0	0.25	0.50	0.75
1	0.3740	0.2251	0.1283	0.0577
2	0.9011	0.5303	0.2988	0.1337
3	1.8022	0.9842	0.5398	0.2387
4	∞	1.8072	0.9172	0.3951
5	1.8022	∞	1.6469	0.6578
6	0.9011	1.6332	∞	1.2220
7	0.3740	0.6341	1.2049	∞
8	0.3740	0.3536	0.2769	0.1474
9	0.9011	0.8594	0.6644	0.3473
10	1.8022	1.6559	1.1391	0.5590
4	∞	2.4534	1.4100	0.6592

表-4 $M_{(sp)}$

$$\nu=0.3 \quad \times \frac{P}{4\pi}$$

$\alpha \backslash$	0	0.25	0.50	0.75
1	1.0740	0.7910	0.5180	0.2529
2	1.6011	1.1202	0.7166	0.3465
3	2.5022	1.6007	0.9914	0.4737
4	∞	2.4534	1.4100	0.6592
5	2.5022	∞	2.1914	0.9621
6	1.6011	2.3504	∞	1.5864
7	1.0740	1.3945	1.9079	∞
8	1.0740	0.9475	0.6556	0.3227
9	1.6011	1.3241	0.8250	0.3803
10	2.5022	1.7074	0.9141	0.3980
4	∞	1.8072	0.9172	0.3951
11	0.7000	0.8102	0.8354	0.6938
12	0.7000	0.7443	0.6437	0.3725
13	0.7000	0.6368	0.4684	0.2414
14	0.7000	0.5668	0.3886	0.1934
15	0.7000	0.5441	0.3657	0.1807

表-5 $V_{(1)}$

$$\nu=0.3 \quad \times \frac{P}{2\pi a}$$

$\alpha \backslash$	0	0.25	0.50	0.75
11	1.0000	1.6955	3.2199	8.2393
12	1.0000	1.3124	1.2961	0.7351
13	1.0000	0.8699	0.5793	0.2736
14	1.0000	0.6655	0.3959	0.1821
15	1.0000	0.6095	0.3537	0.1618

$$A_n = (-1)^n a_n K$$

$\nu = 0.3$

0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.486105	0.417550	0.357670	0.304246	0.255636	0.210564	0.167974	0.126901	0.086341	0.044974
0.189216	0.163761	0.141513	0.121615	0.103423	0.086417	0.070143	0.054147	0.037892	0.020552
0.105571	0.091781	0.079734	0.068955	0.059081	0.049816	0.040890	0.032019	0.022842	0.012753
0.068925	0.060104	0.052403	0.045514	0.039200	0.03264	0.027523	0.021779	0.015763	0.009001
0.049210	0.043006	0.037594	0.032755	0.028320	0.024147	0.020102	0.016035	0.011739	0.006827
0.037234	0.032594	0.028549	0.024935	0.021623	0.018506	0.015480	0.012428	0.009184	0.005424
0.029346	0.025722	0.022566	0.019747	0.017165	0.014735	0.012374	0.009988	0.007439	0.004452
0.023841	0.020919	0.018376	0.016106	0.014027	0.012071	0.010171	0.008247	0.006183	0.003744
0.019828	0.017413	0.015312	0.013438	0.011723	0.010110	0.008541	0.006952	0.005243	0.003207
0.016801	0.014765	0.012995	0.011417	0.009974	0.008617	0.007298	0.005960	0.004517	0.002789
0.014454	0.012711	0.011195	0.009845	0.008611	0.007451	0.006323	0.005179	0.003943	0.002454
0.012593	0.011080	0.009766	0.008595	0.007525	0.006520	0.005543	0.004552	0.003480	0.002182
0.011089	0.009762	0.008609	0.007582	0.006644	0.005764	0.004908	0.004040	0.003100	0.001957
0.009855	0.008678	0.007657	0.006748	0.005919	0.005140	0.004383	0.003615	0.002783	0.001768
0.008827	0.007776	0.006884	0.006053	0.005313	0.004618	0.003943	0.003259	0.002516	0.001608
0.007962	0.007016	0.006196	0.005466	0.004801	0.004176	0.003570	0.002956	0.002288	0.001470
0.007225	0.006369	0.005626	0.004966	0.004364	0.003799	0.003252	0.002696	0.002092	0.001351
0.006592	0.005812	0.005136	0.004535	0.003987	0.003474	0.002976	0.002471	0.001922	0.001247
0.006043	0.005330	0.004711	0.004162	0.003661	0.003191	0.002737	0.002275	0.001774	0.001155
0.005565	0.004909	0.004340	0.003835	0.003375	0.002944	0.002527	0.002103	0.001643	0.001074
0.005144	0.004539	0.004014	0.003548	0.003124	0.002726	0.002341	0.001951	0.001527	0.001002
0.004772	0.004211	0.003726	0.003294	0.002901	0.002533	0.002177	0.001816	0.001424	0.000938
0.004442	0.003921	0.003469	0.003068	0.002703	0.002361	0.002031	0.001696	0.001332	0.000880
0.004147	0.003661	0.003240	0.002866	0.002526	0.002208	0.001900	0.001588	0.001249	0.000828
0.003882	0.003427	0.003034	0.002684	0.002367	0.002069	0.001782	0.001490	0.001174	0.000781
0.003644	0.003217	0.002848	0.002521	0.002223	0.001944	0.001675	0.001402	0.001106	0.000738
0.003428	0.003027	0.002680	0.002372	0.002093	0.001831	0.001578	0.001322	0.001044	0.000698
0.003232	0.002854	0.002527	0.002238	0.001974	0.001728	0.001490	0.001249	0.000988	0.000662
0.003053	0.002697	0.002388	0.002115	0.001866	0.001634	0.001410	0.001183	0.000936	0.000629
0.002890	0.002552	0.002261	0.002003	0.001768	0.001548	0.001336	0.001122	0.000889	0.000599

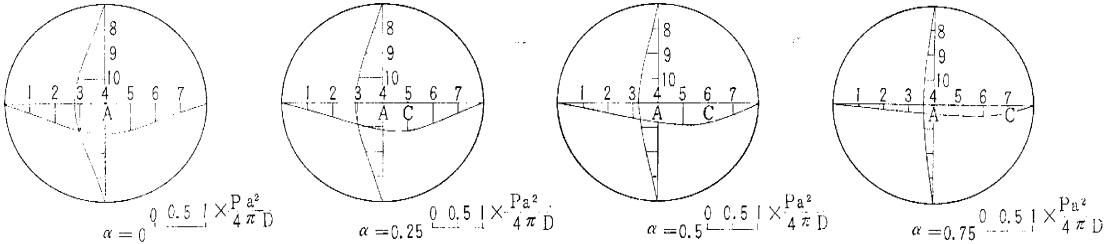
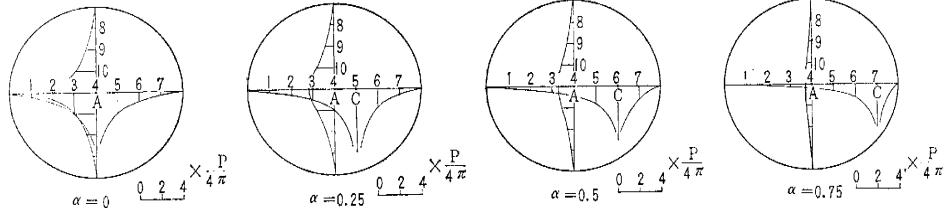
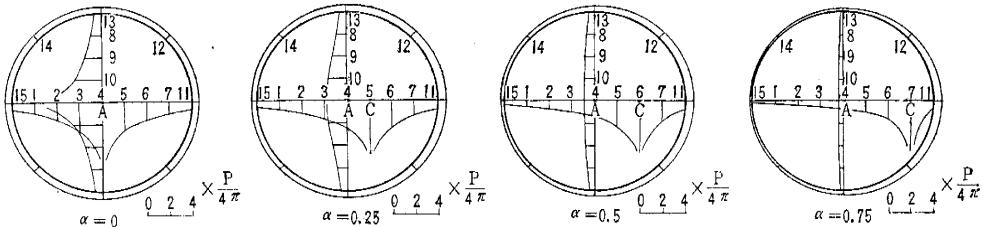
図-6 w 図図-7 M_{rr} 図図-8 $M_{\theta\theta}$ 図

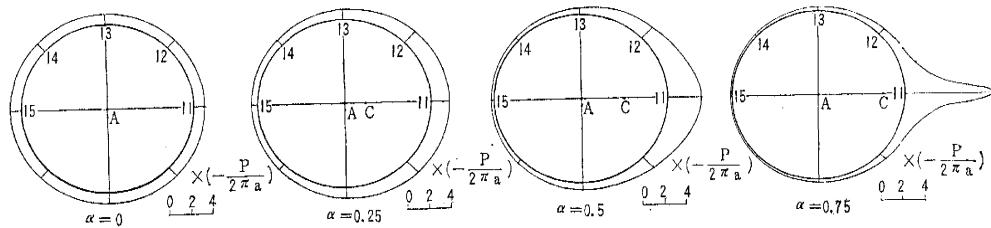
図-9 $V_{(1)}$ 図

表-6

 $\alpha=0.25$

点	w	$M_{(11)}$	$M_{(22)}$	$M_{(12)}$	$V_{(1)}$
1	4	5	5	5	—
2	4	5	5	5	—
3	4	4	5	5	—
4	3	4	4	4	—
5	—	—	—	—	—
6	3	4	4	4	—
7	4	5	5	5	—
8	4	5	5	5	—
9	4	5	5	5	—
10	3	4	4	4	—
11~15	—	—	6	5	7

 $\alpha=0.50$

点	w	$M_{(11)}$	$M_{(22)}$	$M_{(12)}$	$V_{(1)}$
1	7	8	9	9	—
2	7	8	8	8	—
3	6	7	7	7	—
4	5	6	6	6	—
5	4	5	5	5	—
6	—	—	—	—	—
7	5	6	6	6	—
8	7	8	9	8	—
9	6	7	8	7	—
10	6	7	7	7	—
11~15	—	—	10	9	13

 $\alpha=0.75$

点	w	$M_{(11)}$	$M_{(22)}$	$M_{(12)}$	$V_{(1)}$
1	11	12	16	15	—
2	11	13	15	14	—
3	11	12	13	13	—
4	10	11	12	11	—
5	8	10	10	10	—
6	6	7	7	7	—
7	—	—	—	—	—
8	11	13	15	14	—
9	11	12	13	13	—
10	10	12	12	12	—
11~15	—	—	17	15	27

5. モーメント荷重の場合 (Case II, III)

最初は集中モーメント荷重として考察する。図-4に示す二つの場合を取り扱うが、その中間の場合はもちろんベクトル的に分解して両者の和として考えることができる。

Case II : 直径方向のモーメント荷重

集中荷重の場合と同様に w の基本解は \cos の項のみから成る。境界条件のうち、式(17)は全く同様で式(18)はつぎのように変わる。

$$0 = \oint V_{(1)} ds, \quad M = \oint V_{(1)} x ds \quad \dots \dots \dots \quad (35)$$

したがって、

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h} dp_z, \quad \frac{M}{\sinh p_{10}} = \int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h^2} dp_z \quad \dots \dots \dots \quad (36)$$

である。式(20), (22)が同様に成立するので、

$$A_0 = C_1 = \frac{M}{4\pi D} (= K \text{ とおく}) \quad \dots \dots \dots \quad (37)$$

が得られる(この場合、 C_1 が 0 でないことに注意する)。式(24), (25)も同様に成立するが、式(25)の最初の式の右辺は、

$$-e^{-p_{10}} \left(1 - \frac{1+\nu}{2} e^{-p_{10}} \sinh p_{10} \right) K$$

と変えなければならない。したがって、この場合の解を

$$A_n = (-1)^n a_n' K \quad \dots \dots \dots \quad (38)$$

とおけば、表-1に示した a_n を用い、

$$\begin{aligned} a_n' &= \varphi_M(p_{10}) a_n \\ \varphi_M(p_{10}) &= \frac{1+\nu}{2} e^{-p_{10}} - \frac{1}{\sinh p_{10}} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

とかくことができる。この $\varphi_M(p_{10})$ は表-7に示す。

Case III : 直径に直角方向のモーメント荷重

この場合の変形は荷重点をふくむ直径に関して逆対称であるから、前に述べたように基本解は \sin の項のみからなり、 f_0 は不要となる。したがって式(13)の \sin , \cos は下側をとり、式(14)において f_0 の関係項は 0 と

表-7

α'	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
φ_M	13.100251	6.702020	4.640239	3.666667	3.133333	2.826007	2.654864	2.577381	2.572971	2.633333	2.758879
φ_T	13.000000	6.500000	4.333333	3.250000	2.600000	2.166667	1.857143	1.625000	1.444444	1.300000	1.181818

する。式(17)についても、 f_0 の関係項を 0 とおけばそのまま用いることができる。第 2 の境界条件 式(18)はつぎのように変化する。

$$0 = \oint V_{(1)} ds, \quad T = \oint V_{(1)} y ds \quad \dots \dots \dots (40)$$

ここに、 $y = \frac{\sin p_2}{h}$ であるから*、

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h} dp_2, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h^2} \sin p_2 dp_2 \dots \dots \dots (41)$$

となる。

$$\int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h} dp_2 = -\frac{D}{c} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(p_{10}) \int_0^{2\pi} \sin np_2 dp_2 = 0$$

であるから式(41)の最初の方の条件は自然に満たされている。つぎに、

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h^2} \sin p_2 dp_2 \\ &= -D \sum_{n=1}^{\infty} v_n(p_{10}) \int_0^{2\pi} \frac{\sin np_2 \sin p_2}{\cosh p_{10} + \cos p_2} dp_2 \\ &= 2\pi D \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{np_{10}} v_n(p_{10}) \end{aligned}$$

となり、式(21)を用いれば、

$$\int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h^2} \sin p_2 dp_2 = 4\pi DC_1 \dots \dots \dots (42)$$

が得られるから、式(41), (42)より、

$$C_1 = \frac{T}{4\pi D} (=K \text{ とおく}) \dots \dots \dots (43)$$

を得る。式(25)はこの場合も同様に成立するが、その最初の式の右辺は

$$\frac{1+\nu}{2} e^{-2p_{10}} (\sinh p_{10}) K$$

となるから、式(25)の解を

$$A_n = (-1)^n a_n'' K \dots \dots \dots (44)$$

とおけば、集中荷重の場合の a_n に対して、

$$\left. \begin{aligned} a_n'' &= \varphi_T(p_{10}) a_n \\ \varphi_T(p_{10}) &= \frac{1+\nu}{2} e^{-p_{10}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

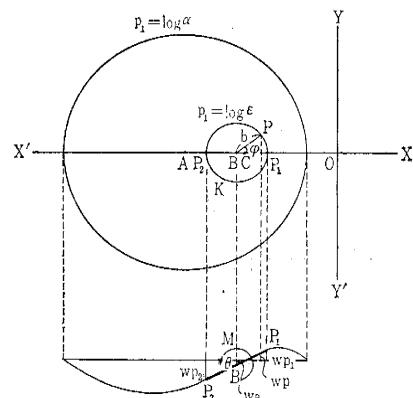
という修正を行なえばよいことになる。この $\varphi_T(p_{10})$ も表-7 に示してある。

以上、集中モーメント荷重をうける場合の解を求めたが、このままでは C_1 が 0 でないために荷重点のたわみ角を計算すると ∞ となってしまう。この点を解決するため、つぎのような考察を行なう。まず、Case II について説明する。

いま、図-10 に示すように荷重点 C の近傍に、

$$p_1 = \log \epsilon \dots \dots \dots (46)$$

図-10



で示される円 K を考え、K で囲まれる部分は剛体であって X 軸方向の断面は一定のたわみ角 θ をもっているとする。円 K の中心を B, 半径を b とすれば、

$$\left. \begin{aligned} b &= -\frac{c}{\sinh(\log \epsilon)} = \frac{\sinh(\log \alpha)}{\sinh(\log \epsilon)} a \\ BC &= \epsilon b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47)$$

であり、K 上の境界条件は、K 上の任意の点 P のたわみ w_P 、たわみ角 $d_{(1)P}$ について、

$$w_P = w_B - b \cos \varphi \tan \theta \dots \dots \dots (48)$$

$$d_{(1)P} = \frac{1}{b} (w_P - w_B) \dots \dots \dots (49)$$

で示される。 $\cos \varphi = \frac{1 + \cosh p_1 \cos p_2}{ch}$ を用いると、式(48)より、

$$\left. \begin{aligned} f_0(\log \epsilon) &= \frac{w_B}{c} \cosh(\log \epsilon) + \frac{\tan \theta}{\sinh(\log \epsilon)} \\ f_1(\log \epsilon) &= \frac{w_B}{c} + \frac{\tan \theta}{\sinh(\log \epsilon)} \cosh(\log \epsilon) \end{aligned} \right\}$$

$$n \geq 2 \dots \dots \dots (50)$$

$$f_n(\log \epsilon) = 0 \dots \dots \dots (51)$$

が得られる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} w_B &= \frac{1}{2} (w_{P_1} + w_{P_2}), \quad \tan \theta = \frac{1}{2b} (w_{P_2} - w_{P_1}) \\ w_{P_1} &= \frac{c}{\cosh(\log \epsilon) + 1} \{ f_0(\log \epsilon) + f_1(\log \epsilon) \} \\ w_{P_2} &= \frac{c}{\cosh(\log \epsilon) - 1} \{ f_0(\log \epsilon) - f_1(\log \epsilon) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

で、式(52)は式(50)を満足している。つぎに式(49)から、

$$f_0'(\log \epsilon) = \frac{\sinh(\log \epsilon)}{c} w_B \dots \dots \dots (53)$$

$$n \geq 1 \quad f_n'(\log \epsilon) = 0 \dots \dots \dots (54)$$

0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	
2.958333	3.251082	3.673669	4.295238	5.256944	6.890832	10.195906	20.171390	$\varphi_M = \frac{1+\nu}{2} e^{-p_{10}} - \frac{1}{\sinh p_{10}}$
1.083333	1.000000	0.928571	0.866667	0.812500	0.764706	0.722222	0.684211	$\varphi_T = \frac{1+\nu}{2} e^{-p_{10}} \quad (\nu = 0.3)$

* p. 4 の脚注参照

が得られる。以上のように考へている場合は、式(9), (10)は円Kの外側にのみ適用されるのであるから、式(11)の条件は成立せず、これに代わるもののが式(51), (53), (54)の条件式である。

式(51), (54)から、

$$\left. \begin{aligned} n &\geq 2 \\ B_n &= -\frac{(n-1)-n\delta^2+\delta^{2n}}{1-n\delta^{2n-2}+(n-1)\delta^{2n}} \delta^{2n}\alpha^{2n+2} A_n \\ C_n &= \frac{n-(n+1)\delta^2+\delta^{2n+2}}{1-n\delta^{2n-2}+(n-1)\delta^{2n}} \delta^{2n-2}\alpha^{2n} A_n \\ \delta &= \frac{\epsilon}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

を得るが、 δ を微小量と考えるときは、 B_n, C_n の項は無視して差し支えない。

つぎに、 B_0, B_1 が0でない場合の式(20), (22)は、

$$\int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h} dp_2 = -\frac{4\pi D}{c} (A_0 + B_0 - C_1) \quad (56)$$

$$B_0 = \epsilon^2 \frac{[(1-\nu)\alpha^2 + (3+\nu)\alpha^2 + \epsilon^2\{(1-\nu) + (1+\nu)\alpha^2\}]K + \{(1-\nu)(\alpha^4 + \epsilon^4) + 2(1+\nu)\alpha^2\epsilon^2\}2A_1}{(1+\nu)\alpha^2 + \epsilon^2\{(1-\nu)(1-\alpha^2) - 2(1+\nu)\alpha^2\} - \epsilon^4\{2(1-\nu) + (1+\nu)\alpha^2\}} \quad (60)$$

と得られる。 A_1 以下の A_n はこの場合も式(17)から求めるのであるが、特に ϵ を微小と考える場合は前と同様に式(25)が成立すると考えて差し支えなく式(38), (39)によって計算される。 ϵ を微小と考える場合の $f_0(p_1), f_1(p_1)$ の計算には、 ϵ のべきを項全体で ϵ^0 または $\epsilon \log \epsilon$ のorderまで考えることにすれば、つぎの係数を用いてよいことになる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= K \\ B_0 &= \frac{\epsilon^2}{1+\nu} [\{(1-\nu)\alpha^2 + (3+\nu)\}K + 2(1-\nu)\alpha^2 A_1] \\ A_0^* &= -\frac{1}{2(1+\nu)(1-\alpha^2)} \\ &\times [\{(1-\nu)\alpha^2 + (3+\nu)\}K + 4\alpha^2 A_1] \\ B_1 &= \frac{\epsilon^2}{2} K, \quad C_1 = K \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

したがって、

$$\begin{aligned} f_0(\log \epsilon) &\approx \frac{\alpha^2}{2(1+\nu)(1-\alpha^2)\epsilon} \\ &\times [\{(1-\nu)\alpha^2 + (3+\nu)\}K + 4\alpha^2 A_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h^2} dp_2 &- a \int_0^{2\pi} \frac{V_{(1)}}{h} dp_2 \\ &= -\frac{4\pi D}{\sinh p_{10}} (2B_0 - C_1) \end{aligned} \quad (57)$$

となり、これらを式(36)で用いることにより、

$$A_0 = K + B_0 \quad \left(K = \frac{M}{4\pi D} \right) \quad (58)$$

を得る。また、 $f_1'(\log \epsilon) = 0$ から、

$$B_1 = \epsilon^2 \left(\frac{K}{2} + B_0 + \epsilon^2 A_1 \right) \quad (59)$$

式(17)の最初の式から、

$$\begin{aligned} A_0^* &= -\frac{1}{2(1+\nu)(1-\alpha^2)\alpha^2} [(1-\nu)\alpha^4 + (3+\nu)\alpha^2 \\ &+ 2\epsilon^2)K + 4(\alpha^4 + \epsilon^4)A_1 - \{(1-\nu)(1-\alpha^4) - 4\epsilon^2\}B_0] \end{aligned} \quad (60)$$

を得る。

B_0 は式(53)に式(58)～(60)を代入することによつて、

$$B_0 = \frac{\epsilon^2}{2(1+\nu)} \left[\{(1-\nu)\alpha^2 + (3+\nu)\}K + 4\alpha^2 A_1 \right] \quad (61)$$

$$f_1(\log \epsilon) = \left(\frac{1}{2} + \log \frac{\epsilon}{\alpha} \right) K - \alpha^2 A_1$$

となり、これらを式(52)に入れて計算すれば、

$$\begin{aligned} w_B &\approx 2c\epsilon f_0(\log \epsilon) \\ &= \frac{\alpha a}{2(1+\nu)} [\{(1-\nu)\alpha^2 + (3+\nu)\}K + 4\alpha^2 A_1] \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &\approx 2\epsilon f_0(\log \epsilon) - f_1(\log \epsilon) \\ &= \frac{\alpha^2}{(1+\nu)(1-\alpha)} \\ &\times [\{(1-\nu)\alpha^2 + (3+\nu)\}K + 4\alpha^2 A_1] \\ &- \left(\frac{1}{2} + \log \frac{\epsilon}{\alpha} \right) K + \alpha^2 A_1 \end{aligned} \quad (64)$$

が得られる。この w_B は本節前半で集中モーメントと考えた場合の w_C とも一致する*。表-8, 図-11, 12は w_B 、および $k = \frac{b}{a} = 0.1, 0.2$ とした場合の $\theta (\equiv \tan \theta)$ を示したもので、図中、点線の部分では

$$\epsilon = \frac{1}{2\alpha k} \{ \sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\alpha^2 k^2} - (1-\alpha^2) \}$$

が微小とならないので、 θ の正確な値は計算できない。

表-8

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ϵ	$k=0.1$	0.0101	0.0208	0.0329	0.0475	0.0664	0.0929	0.1348	0.2122	0.3985
	$k=0.2$	0.0202	0.0415	0.0657	0.0944	0.1311	0.1813	0.2595	0.3802	0.6029
Case II	$w_B \left(\times \frac{Ma}{4\pi D} \right)$	0.0962	0.1897	0.2777	0.3566	0.4221	0.4681	0.4852	0.4577	0.3513
	$\left(\times \frac{M}{4\pi D} \right)$	$k=0.1$	1.611	1.626	1.653	1.696	1.762	1.862	2.020	2.296
Case III	$\left(\times \frac{T}{4\pi D} \right)$	$k=0.2$	0.917	0.941	0.971	1.010	1.082	1.193	1.364	—
	$\left(\times \frac{T}{4\pi D} \right)$	$k=0.1$	1.597	1.571	1.526	1.488	1.362	1.225	1.031	0.740

($\nu=0.3$)

* w_C は式(34)で示される。 A_0^* は式(24)に式(37)の A_0 を入れることにより式(62)と同一の式となり、これを式(34)に入れれば式(63)と同一の結果を得る。

图-11

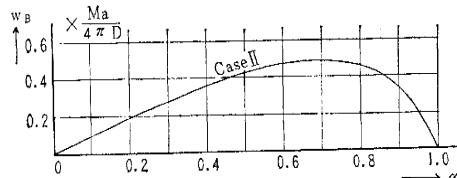
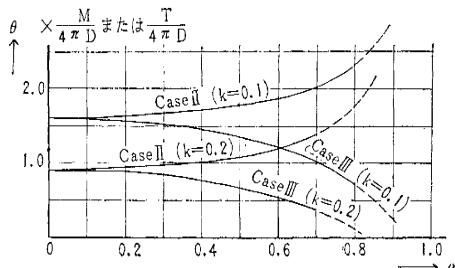


图-12



また w_B は $\alpha=0.7$ 付近で極大値をとっている。

Case III の場合も同様に、円 K で囲まれる部分の Y 軸方向の断面が一定のたわみ角 θ をもつと考える。円周 K 上の境界条件は

$$w_E = -b \sin \varphi \tan \theta \quad \dots \dots \dots \quad (65)$$

$$d_{(1)P} = \frac{w_P}{b} \quad \dots \dots \dots \quad (66)$$

で、 $\sin\varphi = -\frac{\sin p_1 \sin p_2}{ch}$ を用いると、式(65)より、

$$n \geq 2 \quad f_n(\log \varepsilon) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (68)$$

式(66)より、

$$n \geq 1 \quad f_n'(\log \varepsilon) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (69)$$

を得る。この場合も B_n, C_n は式(55)となるが、 ϵ を微小と考えるときは、 B_n, C_n の項は省略してよい。 f_0 がないので本節前半に述べた式がそのまま成り立ち、

$$C_1 = K \quad \left(K = \frac{T}{4\pi D} \right) \dots \dots \dots (70)$$

が得られ、また、 $f_1'(\log \epsilon) = 0$ から、

$$B_1 = \varepsilon^2 \left(\frac{K}{2} + \varepsilon^2 A_1 \right) \dots \dots \dots \quad (71)$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= -f_1(\log \varepsilon) \\ &= -\left(\frac{1}{2} + \log \frac{\varepsilon}{a}\right) K + \alpha^2 A_1 \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{K}{2\alpha^2} - 2A_1 \right) + \frac{\varepsilon^4}{\alpha^2} A_1 \quad \dots \dots \dots (72)\end{aligned}$$

となり、 ϵ を微小量と考えるときは右辺の第3項以下を省略する。表-8、図-12にはこの場合のものも示してある。たわみ角 θ は偏心率が大きくなると Case II の場合と逆に減少して 0 に近づくことがわかる。

6. あとがき

偏心荷重をうける単純支持円板の曲げの問題を双極座標を応用して取り扱った。極座標による解法 (Clebsch-Föppl の方法など) に比較しいくらか複雑な面もあるが、級数の収斂性が荷重点を中心として均齊のある分布をしていることや、モーメント荷重の場合、荷重点のたわみ角を有限の値として考察し得ることなどにこの方法の合理性があるように思われる。最後に、本研究は主として著者が東京大学生産技術研究所研究員として在勤中に行なったものであり、ご指導を頂いた同所所長 岡本舜三教授に厚く感謝申し上げる次第である。

参 考 文 献

- 1) Clebsch, A. : Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig, 1862, p. 327.
 - 2) Föppl, A. : Die Biegung einer kreisförmigen Platte, Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K.B. Akademie zu München, 1912, p. 155.
 - 3) Michell, J.H. : The Flexure of a Circular Plate, Proc. London Math. Soc., Vol. 34, 1902, p. 223.
 - 4) Melan, E. : Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte, Eisenbau, Vol. 11, 1920, p. 190.
 - 5) Nakayama, I. : Strength of Flat Circular Plate with Eccentric Load, 機械学会誌, Vol. 31, No. 130, 1928, p. 53.
 - 6) Reissner, E. : Über die Biegung der Kreisplatte mit exzentrischer Einzellast, Math. Ann., Vol. 111, 1935, p. 777.
 - 7) Nasittas, Kh. : Über die Dimensionierung dünner Kreisplatten unter exzentrisch aufgebrachten Einzellasten, Ingr.-Arch., Vol. 23, 1955, p. 85.
 - 8) 鶴津: 等方性板の曲げについて, 機械学会論文集, Vol. 18, No. 68, 1952, p. 41.
 - 9) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1959, p. 290.
 - 10) 鬼頭: 等角写像とその応用, オーム社, 1955, p. 65.
 - 11) 佐武: 2次元問題における調和曲線座標の応用について, 生産研究, Vol. 15, No. 8, 1963, p. 358.

(1964. 8. 5・受付)