

# 瞬間最大値と評価時間の関係ーとくに突風率について

## RELATIONSHIPS BETWEEN THE INSTANTANEOUS PEAK VALUES AND THE EVALUATION TIME. A THEORY ON THE GUST FACTOR

日野幹雄\*  
By Mikio Hino

**要旨** ある不規則な変動、たとえば風速や煙の濃度などを観測するとき、これらの瞬間最大値が観測時間の長短や記録計器の感度の良否によって異なることはよく知られている。

一方、不規則変動のいろいろな性質は Rice の雑音理論にまとめられている。観測時間の長短や記録計器の感度は、もともとの不規則変動に周波数フィルターをかけてスペクトルを変形させることに相当する。これらの理論から瞬間最大値と観測時間・評価時間の関係を導きうる。

不規則変動でそのスペクトルの性質がわりに知られており、實際上重要なものに風の乱れ（息）がある。半理論的に突風スペクトルを導き、これを Davenport の経験式と対比しながら 2,3 の実測値と比較した。

また、Davenport 式および新しく導かれた式を使って突風率と評価時間との関係を計算し、実測とくらべた。さらに、突風率が種々の因子でどのように変化するかを計算し図示した。

最後に、理論と実測とを対比して突風率の実用計算式および図表を与えた。この関係式は、観測時間・評価時間の他に高さ・基準風速・地表粗度等の因子もふくんだ簡単な式型となっている。

### 1. 序論

われわれの対象とする多くの現象には、ある平均値のまわりの不規則な変動が付随している。一様に見える川の流れも、われわれが普通に測定する平均流速に細かい流速の変動がともなっている。もっとも良く経験するのは、風の息であろう。不動のようにみえる大地にも、微弱ではあるがあきらかな、しかしその原因のすべてがわかっているわけでない振動 (microseism) が観測される。地震や津波のような振動も決して単純な harmonics ではない。

こうした不規則変動では、しばしば平均値に対する変動値、もしくは最大値の比が問題とされる。特に風の息に対しては、瞬間最大値と平均風速の比を Gust factor 突風率と呼んでいる。

この瞬間最大値と平均値の比は、平均値をとる時間の長さ、瞬間値を測る測定器の感度によって異なってくる。一般に、平均値をとる時間が長くなればこの比は大きくなり、測定器の感度が鈍れば低くなる。つまり、測定器の感度が落ちると周波数の高い変動を追跡しえないし、また観測時間を増せばそれだけ大きな渦（大きな変動エネルギーをもっている）をとらえることができるるのである。突風率の理論式には Davenport<sup>1)</sup>・塙谷<sup>2)</sup>・日野<sup>3)</sup> の各式があり、また経験式として、光田<sup>4)</sup> の式がある。

風の息の他に、今一つ peak to average ratio が問題となる例に、煙の濃度と観測時間の関係がある。人が呼吸に不快を感じるのは、単に大気中の有害分の瞬間値が高いだけでは起こらない。あるエキ値濃度があるエキ値時間を越した場合に、急に不快を感じ有害となる。それゆえ、われわれは、あまり瞬間的な有害成分の濃度よりは、むしろエキ値時間の平均濃度の最大値がエキ値濃度を越えるかどうかを知る必要があり、また逆に、ある感度の計器（評価時間）での測定濃度を特定の評価時間の濃度に換算する必要が生ずる。

こうした不規則変動の統計的な諸性質は Rice<sup>5)</sup> の雑音理論として良く知られている。すなわち、変動の確率分布・zero-crossing 数・極大値の度数分布と変動スペクトルおよびモーメントとの関係である。

また、極大値の最大（つまり瞬間最大値）については Longuet-Higgins と Cartwright<sup>6), 7)</sup> が波浪の問題と関連して、Rice の理論を発展させた。

観測時間や評価時間の長短は、もともとの不規則変動に周波数フィルターをかけて、変動スペクトルを変形させることに相当する<sup>8)</sup>。

これらの理論から瞬間最大値と観測時間・評価時間の関係を導くことができる。以下 1. (1) では Rice の理論をまとめ、(2) では Longuet-Higgins と Cartwright の式を示し、(3) では変形フィルターの式型を示し、(4) で一般的な式を導く。

#### (1) 極大値の確率分布と変動スペクトル

今ある不規則変動  $f(t) = \xi$  を考える。 $\xi$  と  $d\xi/dt = \eta$ ,  $d^2\xi/dt^2 = \zeta$  との間に相互に相関がなく独立であれば、 $\xi$ ,

\* 正会員 工博 電力中央研究所 技術研究所

$\eta, \zeta$  の joint probability density function  $p_1(\xi, \eta, \zeta)$  は“中心極限定理”によって正規分布と考えてよい。

ところで、一般に不規則ベクトルを構成する数個の変数  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$  が正規分布をなすとき  $x$  の確率分布密度は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} p_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \\ = (2\pi)^{-k/2} |M|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} x' M^{-1} x \right] \quad (1) \end{aligned}$$

ここに、 $M$  は  $x$  の 2 次積率  $M_{11} = \overline{x_1^2}$ ,  $M_{12} = \overline{x_1 x_2}$  などからなる正方行列である。

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kk} \end{pmatrix} \quad (2)$$

であり、 $x'$  は行ベクトル,

$$x' = [x_1, x_2, \dots, x_k] \quad (3)$$

であり、 $x$  は  $x'$  を転置してえられる列ベクトルである。

したがって、joint probability density function  $p_1(\xi, \eta, \zeta)$  は、

$$\begin{aligned} p_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |M|^{1/2}} \exp \\ &\times \left[ -\frac{1}{2|M|} (M_{11} \xi^2 + M_{22} \eta^2 + M_{33} \zeta^2 + 2 M_{12} \xi \eta + 2 M_{13} \xi \zeta) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\xi = \sum C_n \cos(\sigma_n t + \epsilon_n)$  であるから、

$$\left. \begin{aligned} |M| &= \rho^2 (\sigma^2 \nu^2 - \rho^4), \quad M_{11} = \rho^2 \nu^2 \\ M_{22} &= \sigma^2 \nu^2 - \rho^4, \quad M_{33} = \sigma^2 \rho^2 \\ M_{13} &= \rho^4 \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

である。ただし、 $\sigma^2 \nu^2 \rho^2$  は  $\xi, \eta, \zeta$  の二次積率で  $\xi$  のスペクトルを  $S(f)$ ,

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \xi(t+\tau) e^{i2\pi f\tau} d\tau \quad (5)$$

とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^{\infty} S(f) df \\ \rho^2 &= (2\pi)^2 \int_0^{\infty} f^2 S(f) df \\ \nu^2 &= (2\pi)^4 \int_0^{\infty} f^4 S(f) df \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

で表わされる。

確率関数  $f(t)$  が矩形領域  $(t, t+dt, \xi, \xi+d\xi)$  で一つの極大値をもつ確率は、 $f''(t)$  は  $(-\infty, 0)$  の間の任意の値をとれるが、 $f'(t)$  は 0を中心とした  $-(f')' dt = |f''| dt$  幅の値しかとりえないことから

$$-dt d\xi \int_{-\infty}^0 p_1(\xi, 0, \zeta) \zeta d\zeta$$

であり、したがって極大が  $\xi$  にある確率  $p(\xi)$  は、

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[ \epsilon e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon^2\nu^2}} + (1-\epsilon^2)^{1/2} \frac{\xi}{\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} \right. \\ &\times \left. \int_{-\frac{(1-\epsilon^2)^{1/2}\xi}{\sigma\epsilon}}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) dx \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\epsilon^2 = (\sigma^2 \nu^2 - \rho^4) / \sigma^2 \nu^2 \quad (8)$$

で与えられ、また極大値の平均度数  $N$  は、

$$N = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\nu}{\rho} \quad (9)$$

で与えられる。ちなみに、 $\xi$  がゼロ点を通る平均度数  $N_0$  は、 $N_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\rho}{\sigma}$  であり、 $N_0$  と  $N$  の比は  $N_0/N = (1-\epsilon^2)^{1/2}$  である。

## (2) 最大値の確率分布とスペクトル

極大値の確率分布の理論から最大値の確率分布が導かれる<sup>6), 7)</sup>。すなわち、極大値が  $\xi$  を超えない確率は、

$$1 - q(\xi) = 1 - \int_{\xi}^{\infty} p(\xi) d\xi$$

である。 $T$  時間の観測を考えれば、極大値は平均的に  $TN$  個ある。このすべての極大値が  $\xi$  を越えない確率は  $[1 - q(\xi)]^{TN}$  である。このことから、極大値の最大値が  $\xi$  である確率  $M(\xi)$  は、

$$M(\xi) = \frac{d}{d\xi} [1 - q(\xi)]^{TN}$$

または、

$$M(\xi) = TN [1 - q(\xi)]^{TN-1} \cdot p(\xi) \quad (10)$$

である。

したがって、 $T$  時間の観測での変動  $\xi$  の最大値  $\xi_{\max}$  の期待値は、次式で与えられる。

$$E(\xi_{\max}) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi M(\xi) d\xi \quad (11)$$

上式の右辺の  $(-\infty, 0)$  の積分は無視できること、 $q(\xi)$  を  $q(\xi) = (1-\epsilon^2)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\sigma^2}} + O\left(\frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon^2\nu^2}}\right)$  と近似しうることから、

$$\begin{aligned} E(\xi_{\max}) &= \int_0^{\infty} [1 - [1 - (1-\epsilon^2)^{1/2} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}]^{TN}] d\xi \\ &= \sigma \int_0^{\infty} \{1 - [1 - (1-\epsilon^2)^{1/2} e^{-\frac{\xi^2}{2}}]^{TN}\} d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

となる。また、 $TN(1-\epsilon^2)^{1/2}$  が大きければ漸近展開から、

$$\begin{aligned} E(\xi_{\max}) &\approx \sigma(2\theta)^{1/2} \\ &\times \left( 1 + \frac{1}{2} A_1 \theta^{-1} - \frac{1}{8} A_2 \theta^{-2} + \frac{1}{16} A_3 \theta^{-3} - \dots \right) \end{aligned} \quad (12a)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \ln\{TN(1-\epsilon^2)^{1/2}\} = \ln\{TN_0\} \\ A_1 &= r = 0.5772 \\ A_2 &= r^2 + \frac{\pi^2}{6} = 1.9781\dots \\ A_3 &= r^2 + \frac{1}{2} r \pi^2 + 2 S_3 = 5.4449 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

## (3) 平均・評価時間とスペクトル

不規則変動を観測するとき、われわれは普通無限のタイム・シリーズの一部だけ ( $T \text{ sec}$ ) を取り出している。また、計器は十分高い周波数の変動まで追従できないから、ここでもある時間の平均を記録していることになる。この結果、記録されるのは真のスペクトル  $S(f)$  の変形したものである。

記録時間(平均値の評価時間)を  $T(\text{sec})$  とし、瞬間値の評価時間を  $s(\text{sec})$  とすれば、 $T$  と  $s$  の影響による変形スペクトル  $S_{T,s}(f)$  は<sup>8)</sup>,

$$S_{T,s}(f) = S(f) \left[ 1 - \frac{\sin^2 \pi T f}{(\pi T f)^2} \right] \frac{\sin^2 \pi s f}{(\pi s f)^2} \quad \dots \dots \dots (14)$$

である。

## スペクトルの変形要素,

$$G(T, s) = \left[ 1 - \frac{\sin^2 \pi T f}{(\pi T f)^2} \right] \frac{\sin^2 \pi s f}{(\pi s f)^2} \quad \dots \dots \dots (15)$$

を  $T=100 \text{ s}$  の場合、 $T \rightarrow \infty$  の場合について図示すれば、図-1,2 のよう

図-1

になる。

このことは、またつぎのように考えてもいい。不規則変動の記録を  $T$  時間で打ち切ることは、周波数が  $1/T$  オーダー以下の変動を切り捨てる事であり、

また計器の特性が  $s(\text{sec})$  平均値を示すということは、計器が  $1/s$  より高い周波数の変動に追従しないということで、 $1/s$  より高周波の渦を切り捨てる事である。この場合には、スペクトル変形要素  $G(T, s)$  を乘算するかわりに、スペ

クトルの積分範囲を  $(0, \infty)$  から  $(1/T, 1/s)$  に変えれば良いことがわかる。

## (4) 瞬間最大値と評価時間

上に述べた議論から、ある変動  $\xi$  の瞬間最大値の平均値・期待値と  $\xi$  の平均値  $\xi_0$  との比  $\Gamma$  は、次式で与えられる。

$$\Gamma = 1 + \frac{\sigma}{\xi_0} \int_0^\infty \left\{ 1 - [1 - (1 - \epsilon^2)^{1/2} e^{-\frac{\xi^2}{2}}]^{TN} \right\} d\xi \quad \dots \dots \dots (16)$$

あるいは、漸近式として  $TN(1 - \epsilon^2)^{1/2}$  が大きければ、

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 + \frac{\sigma}{\xi_0} \sqrt{2} \left[ (\ln \{TN(1 - \epsilon^2)^{1/2}\})^{1/2} + \right. \\ &\quad 0.2886 (\ln \{TN(1 - \epsilon^2)^{1/2}\})^{-1/2} - \\ &\quad 0.2473 (\ln \{TN(1 - \epsilon^2)^{1/2}\})^{-3/2} + \\ &\quad \left. 0.3403 (\ln \{TN(1 - \epsilon^2)^{1/2}\})^{-5/2} - \dots \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (16a)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= (\sigma^2 \nu^2 - \rho^4) / \sigma^2 \nu^2 \\ \sigma^2 &= \int_0^\infty S_{T,s}(f) df \\ \rho^2 &= (2 \pi)^2 \int_0^\infty f^2 S_{T,s}(f) df \\ \nu^2 &= (2 \pi)^4 \int_0^\infty f^4 S_{T,s}(f) df \\ S_{T,s}(f) &= S(f) \left[ 1 - \frac{\sin^2 \pi T f}{(\pi T f)^2} \right] \frac{\sin^2 \pi s f}{(\pi s f)^2} \\ N(1 - \epsilon^2)^{1/2} &= N_0 = \frac{1}{2 \pi} \frac{\rho}{\sigma} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (17)$$

である。あるいは、 $(1/T, 1/s)$  範囲外の周波数を切り捨てるという考え方によれば、 $\sigma^2, \rho^2, \nu^2$  はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{1/T}^{1/s} S(f) df \\ \rho^2 &= (2 \pi)^2 \int_{1/T}^{1/s} f^2 S(f) df \\ \nu^2 &= (2 \pi)^4 \int_{1/T}^{1/s} f^4 S(f) df \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (17a)$$

ここに導かれた  $\Gamma$  は、変動  $\xi$  と  $d\xi/dt, d^2\xi/dt^2$  とが相互に相関のないことを仮定している。この仮定が成立しないときは、 $\xi, d\xi/dt, d^2\xi/dt^2$  の joint probability density function  $p_1(\xi, d\xi/dt, d^2\xi/dt^2)$  を知るか、もしくは極大値の確率  $p(\xi)$  を知って、次式から直接計算しなければならない。

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{\xi_0} \int_{-\infty}^\infty \xi \frac{d}{d\xi} \left[ 1 - \int_\xi^\infty p(\xi) d\xi \right]^{TN} d\xi \quad \dots \dots \dots (18)$$

$p(\xi)$  が不明ならば、

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \left[ \int_{-\infty}^0 p_1(\xi, 0, \zeta) \zeta d\zeta \right] / \left[ \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_{-\infty}^0 p_1(\xi, 0, \zeta) \zeta d\zeta \right] \\ &= \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

を用いる。

## (4) 外力による不規則振動

変数  $\xi$  のスペクトルではなく  $\xi$  の変化をもたらす不規則変動のスペクトルが知られる場合がある。たとえば、風による構造物の振動の場合である。この場合には風速のスペクトル  $S(f)$  に構造物の振動特性に関する増幅関数を掛けたものが構造物の変位スペクトル  $\phi(f)$  である。質量  $m$ 、バネ定数  $k$ 、抵抗係数  $\nu_1$  の簡単な振動

系では、

$$\phi(f) = \frac{1}{\left(\left(\frac{k}{m}\right)^2 - 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \left(\frac{V_1}{m}\right)^2} S(f)$$

となる<sup>9)</sup>。式(6), (17), (17a)中の  $S(f)$  のかわりにこの  $\phi(f)$  を代入すれば、式(12), (12a)から最大変位が求まる。

## 2. 突風率

### (1) 突風スペクトル

突風率を求めるためには式(17)のスペクトルを知らなければならない。流速変動のスペクトルの高周波域(inertial subrange, viscous subrange)の関数形は、Kolmogorov, Heisenberg, Kovasznayによって与えられており、逆に非常に低周波数域のスペクトルは、Batchelor, Karman & Linによって求められている。inertial subrangeについての  $-5/3$  乗則は実験的にも良く認められているが、他の周波数域のスペクトル関数はあまりたしかでない。

突風のスペクトルを全周波数域にわたって比較的良く表わすものとして、Davenport の実験式<sup>10)</sup> (20)がよく用いられる。

$$S(f) df = 4.0 k V_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^{4/3}} dx \quad \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 $V_1$ : 地上 10 m の基準風速 (m/sec)

$k$ : 地表の抵抗係数: 式(21)

$$x = 1200 f/V_1 \text{ (cycle/m)}$$

である。

この式は、二、三の実測とくに Sale での Deacon の測定を主にして導かれたものであり、風速スペクトルは地表からの高さ  $z$  に無関係となる。この点、後の突風率の計算結果にものべるようにこの式形の一つの欠点である。なお、式(20)は、 $f$  の大きな所で  $S(f) \propto f^{-5/3}$  の指數関係は満たしているが、係数まで Kolmogorov の理論と一致していない。それゆえ、以下に突風スペクトルを理論的に導いてみる。

まず、つぎの 3 点を基本的に認める。

a) せん断応力  $\tau$  は高さに無関係に一定で次式で表わされる。これは高さ 100 m 位まで実験的に認められている。いわゆる constant stress layer である。

$$\tau = k \rho V_1^2 \quad \dots \dots \dots (21)$$

b) 突風時の風速分布は、“log+linear” law ではなくむしろ、指數則で表わされる。

$$\frac{U}{V_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^\alpha \quad \dots \dots \dots (22)$$

c) 波数  $\kappa$  の大きい領域では Kolmogorov の  $-5/3$  乗則が成立する。

$$S(\kappa) = a \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad \dots \dots \dots (23)$$

ここに、

$$\kappa = 2\pi f/U \quad \dots \dots \dots (24)$$

$a$ =Kolmogorov constant

$$(a=0.5 \text{ rad./cm 単位})$$

$\epsilon$ =単位質量あたりのエネルギー逸散率

もし、エネルギー拡散項を無視すれば、つまり大気の温位が中立で地表面からの熱フラックスがないとすれば、

$$\epsilon = \frac{\tau}{\rho} \frac{dU}{dz} = \frac{a k V_1^3}{z_1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\alpha-1} \quad \dots \dots \dots (25)$$

となる。

Priestley<sup>11)</sup>は、 $\epsilon$ に関する種々の実測資料をまとめ、風速が 5 m/sec では  $\epsilon$  が  $z^{-4/3}$  に比例することを示した。したがって、一般的に  $\epsilon$  はつぎのように表わす方が良い。

$$\epsilon = \frac{a k V_1^3}{z_1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{(2m-1)\alpha-1} \quad \dots \dots \dots (25a)$$

ここに、 $m$  は熱フラックスの影響に関する修正係数であり、風速が大きいほど大気層内の混合が強くなり地表面からの対流は少なくなるから、 $m \rightarrow 1$  の性質のものである。事実、後に二、三の実測との比較を示すが風速が大きく、また地表粗度の大きい場合は  $m=1$  として良いことがわかる。風速が小さく熱フラックスの影響が強い場合には、安定気層であるほど  $m$  は 1 より小さくなり、逆に不安定気層では  $m$  は 1 より大きくなると考えられる。しかし、強風状態以外では風速分布は指數則よりも対数則で表わす方がよいから、式(25a)にもそのための修正をする必要がある(ここでは、突風を問題としているから式(25a)の範囲で以下の考察を進める)。

d) 最後に、周波数が十分小さくなるとエネルギースペクトルは一定値に近づくと仮定する。これは、三次元の波数空間を一次元的に観測するときに表われる性質である。

c), d) の関係を満たす内挿式として、谷<sup>12)</sup>にしたがって、

$$S(\kappa) = A \left(1 + \frac{\kappa^2}{B^2}\right)^{-5/6} \quad \dots \dots \dots (26)$$

を仮定し、 $S(\kappa) = S(f) df/d\kappa$ ,  $\int_0^\infty S(f) df = \bar{U}^2$ ,  $f \rightarrow \infty$  で  $S(\kappa) \rightarrow a \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$  に注意すれば、スペクトルとして

$$S(f) = \frac{\bar{U}^2}{\beta} \frac{2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{1 + \left(\frac{f}{\beta}\right)^2\right\}^{-5/6} \quad \dots \dots \dots (27)*$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a}{\bar{U}^2}\right)^{3/2} \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\right\}^{3/2}$$

$$** K_1 = 2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 0.4751$$

$$** K_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{0.5}{\bar{U}^2}\right)^{3/2} \times \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) / 2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\right\}^{3/2} = 1.169 \times 10^{-2}$$

$$\times V_1^4 \left( \frac{\alpha k}{z_1} \right) \left( \frac{z}{z_1} \right)^{(2m\alpha-1)} \dots (27a)**$$

をうる。

あるいは, Davenport 流にして,

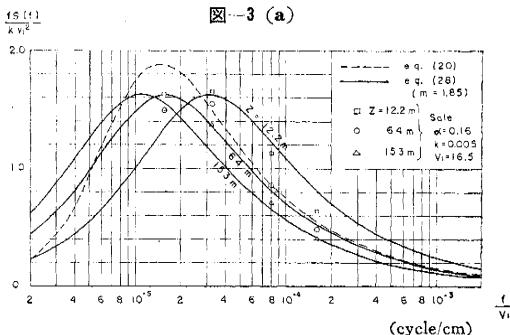


図-3 (a)

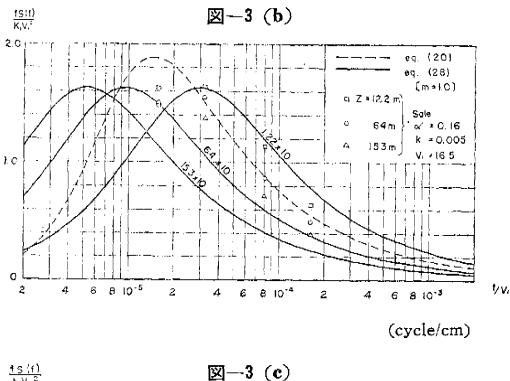


図-3 (b)

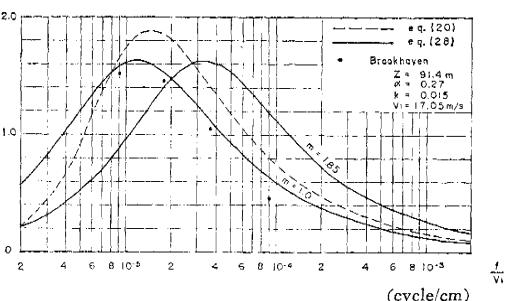


図-3 (c)

$$\frac{fS(f)}{kV_1^2} = \frac{\bar{u}^2}{kV_1^2} \frac{2\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{3})} \frac{f}{\beta_1 V_1} \times \left\{ 1 + \left( \frac{f}{\beta_1 V_1} \right)^2 \right\}^{-5/6} \dots (28)$$

$$\beta_1 = \beta/V_1$$

となる。この式と Davenport の経験式を Deacon の実測値<sup>10)</sup>と比較したのが、図-3 である。

なお、 $\bar{u}^2$  は Davenport と同じく、

$$\bar{u}^2 = 6.0 kV_1^2 \dots (29)$$

とした。

図-3 によれば、少なくともこれらの測定範囲では  $m$  の値を適当に選べば、式 (28) の方が実測に近いことが

わかる。式 (20) と (28) とのいちじるしい違いは、式 (28) が高さ  $z$  によって形の移動(とくに  $fS(f)$  の peak の移動)があるのに、式 (20) では高さの影響のないことである。さらに  $fS/kV_1^2$  と  $f/V_1$  の関係で表わすとき式 (20) は地表粗度に無関係であるが、式 (28) は地表粗度の影響をふくむ点にも両者の差異がある。

強風スペクトルの実測資料が少ない現在、両式の優劣は付けにくいが、相馬<sup>11)</sup>の解析した東京タワーの観測値でも、スペクトルの高周波数域が高さとともに減少する傾向や低周波数域で Davenport 式より頂部が平らで大きくなる傾向が認められることを考えれば、なんらかのより妥当な突風スペクトル形を決める必要があると思われる。式 (28) はその一つの試みであり、今後修正係数と気圧安定度などの気象因子との関係を定めることが残されている。

## (2) 突風スペクトルを導入したガスト・ファクターの式

突風スペクトルの関数形が明確になると突風率  $\Gamma$  の式形がもう少し整理できて、突風率と地表面からの高さ、地表粗度、基準風速などとの関係がはっきりする。

突風スペクトルとして Davenport 式 (20) を用いれば

$$N_* = d(T_*, s_*) T_* \dots (30)$$

$$d(T_*, s_*) = \left\{ \frac{\int_0^\infty G(T_*, s_*) x^3 / (1+x^2)^{4/3} dx}{\int_0^\infty G(T_*, s_*) x / (1+x^2)^{4/3} dx} \right\}^{1/2} \dots (31)$$

$$G(T_*, s_*) = \left[ 1 - \frac{\sin^2 \pi T_* x}{(\pi T_* x)^2} \right] \frac{\sin^2 \pi s_* x}{(\pi s_* x)^2} \dots (32)$$

$$\sigma'(T_*, s_*) = \left\{ \int_0^\infty \frac{2}{3} \frac{x}{(1+x^2)^{4/3}} G(T_*, s_*) dx \right\}^{1/2} \dots (33)$$

$$T_* = V_1 T / 1200$$

$$s_* = V_1 s / 1200$$

などと置いて、ガスト ファクターはつぎのように書き表わせる。

$$\frac{(\Gamma-1)}{2 \sqrt{3} \sqrt{k}} \frac{U}{V_1} = \sigma'(T_*, s_*) \left[ (\ln N_*)^{1/2} + \frac{r}{2} (\ln N_*)^{-1/2} - \frac{1.9781}{8} (\ln N_*)^{-3/2} + \frac{5.4449}{16} (\ln N_*)^{-5/2} - \dots \right] \dots (34)$$

評価時間  $s$ ,  $T$ , 基準風速  $V_1$  を一定とすれば、式 (34) は、

$$\Gamma - 1 \propto \sqrt{k} \left( \frac{z_1}{z} \right)^\alpha \dots (35)$$

となる。

つぎに、突風スペクトルとして式 (28) を用いれば、つぎのような置換を行なって、

$$N_* = h(T_*, s_*) T_* \dots (36)$$

$$h(T_*, s_*) = \left\{ \frac{\int_0^\infty f_*^2 F_*(f_*) G(T_*, s_*) df_*}{\int_0^\infty F_*(f_*) G(T_*, s_*) df_*} \right\}^{1/2} \quad \dots \dots \dots (37)$$

$$F_*(f_*) = \frac{2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \{1 + f_*^2\}^{-5/6} \dots \dots \dots (38)$$

$$G(T_*, s_*) = \left[ 1 - \frac{\sin^2 \pi T_* f_*}{(\pi T_* f_*)^2} \right] \frac{\sin^2 \pi s_* f_*}{(\pi s_* f_*)^2} \quad \dots \dots \dots (39)$$

$$\sigma'(T_*, s_*) = \left\{ \int_0^\infty F_*(f_*) G(T_*, s_*) df_* \right\}^{1/2} \quad \dots \dots \dots (40)$$

$$T_* = \beta T$$

$$s_* = \beta s$$

突風率  $\Gamma$  は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma - 1}{2 \sqrt{3} \sqrt{k}} \frac{U}{V_1} &= \sigma'(T_*, s_*) \left[ \{\ln N_*(T_*, s_*)\}^{1/2} \right. \\ &+ \frac{7}{2} \{\ln N_*(T_*, s_*)\}^{-1/2} \\ &- \frac{1.9781}{8} \{\ln N_*(T_*, s_*)\}^{-3/2} \\ &\left. + \frac{5.4449}{16} \{\ln N_*(T_*, s_*)\}^{-5/2} - \dots \right] \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

上式によれば、 $\Gamma$  と  $s$  とはもはや簡単な指數式では表わしえない。

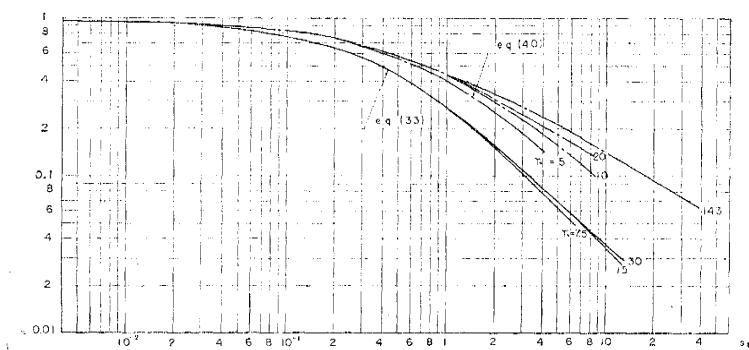
任意の  $T, s$  について  $\Gamma$  を計算しやすいように、 $d(T_*, s_*)$  や  $h(T_*, s_*)$  を計算し、図-4, 5 に示した。

また、式(34)と式(41)は、それぞれ、

$$\beta = \left\{ \frac{V_1 / 1200}{\frac{1}{2\pi} \left( \frac{a}{6.0k} \right)^{3/2} \left( \frac{a k V_1}{z_1} \right) \left\{ \frac{2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \right\}^{-3/2} \left( \frac{z}{z_1} \right)^{2m\alpha-1}} \dots \dots \dots (42) \right. \dots \dots \dots (h)$$

図-4

$\sigma'(T_*, s_*)$



$$F_*(f_*) = \left\{ \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{f_*}{(1+f_*^2)^{4/3}}}{\frac{2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (1+f_*^2)^{-5/6}} \dots \dots \dots (d) \right. \dots \dots \dots (h)$$

とすれば、全く同じ形となる。

### (3) 実測値との比較

上に述べた突風率の式にしたがって二、三の計算を行ない、実測値と比較したのが図-6である。実測値は Deacon が Sale で行なった実験のうち二つの資料の平均値である<sup>4)</sup>。突風スペクトルとして式(20)、式(27)のいずれを用いても、(式(27)の方がやや小さな値を示すが) 計算結果に大差はない。

理論曲線と実験値の一一致の程度はまづまづであるが、必ずしも十分とはいえない。これは、理論値がもともと“平均風速に対する最大瞬間風速の比”の平均値あるいは期待値として定義されているのに対して、実験値はただ2個の観測データから求められたものであって突風率の実験値として取り扱うのに無理があるためである。

そこで、粗度や高さあるいは風速といった因子をあらわな形でふくまず一つにまとまっている式(34)もしくは式(41)の形で比較すれば一応データ数を増すことができて、一つの点が平均値を表わすようになる。結果は図-7に示すように良く理論と実験とが一致することがわかる。

また、以上に述べた理由から突風率と突風度の2つを明確に区別する必要がある。

突風率と突風度 突風率とは最大瞬間風速と平均風速との比の平均値をいう。突風状態を表わすには突風率

とともに、瞬間最大値と平均風速との比（これを仮に突風度と名付ける）の確率分布を考え、たとえば 80% 突風度がいくらであるというようにすれば良い。 $\mu$ % 突風度の風速  $\xi_\mu$  は次式のように定義される。

$$\frac{\mu}{100} = \int_{-\infty}^{\xi_\mu} M(\xi) d\xi \dots \dots \dots (44)$$

ここに、 $M(\xi)$  は式(10)で示される。

### (4) 突風率における種々の因子の影響

突風率はサンプリング時間（平均風速の評価時間） $T$ 、瞬間風速の評価時間  $s$  に関するものであるが、この他摩擦係数  $k$ 、風速分布指数  $\alpha$ 、地表からの

図-5 (a)

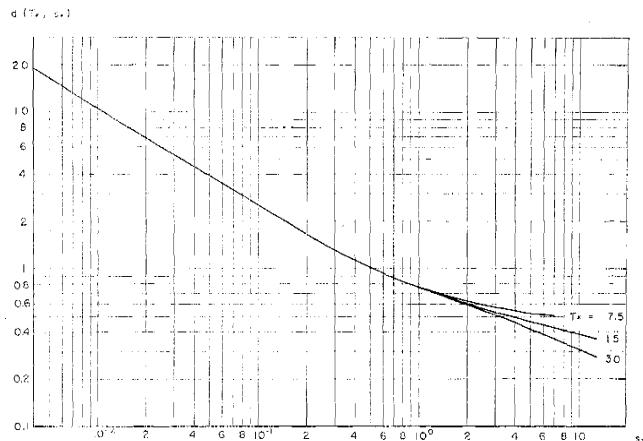


図-5 (b)

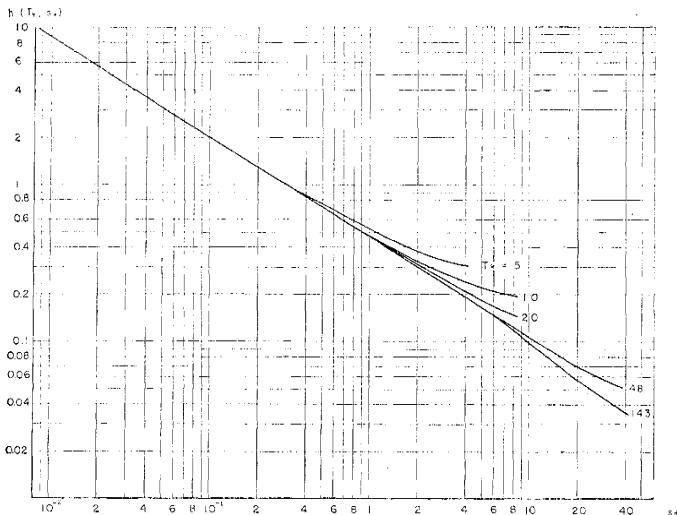
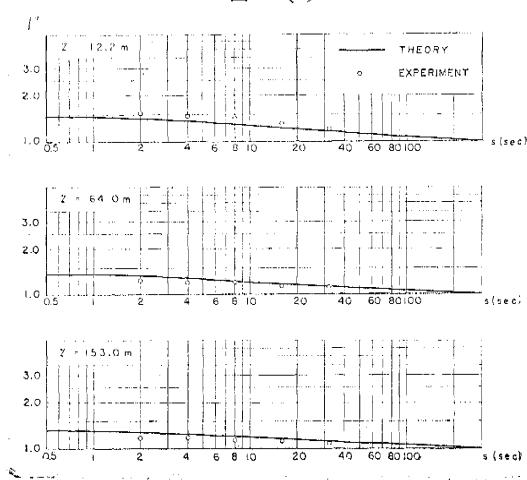


図-6 (a)



高さ  $z$ , 基準高さ  $z_1 (=10 \text{ m})$  での基準風速  $V_1$  などの因子に関係する。これらの因子のうち,  $\alpha$  と  $k$  はつきのように関連している<sup>10)</sup>。

表-1

地表状態	$k$	$\alpha$
開けた障害物のない平地・草地	0.005	0.16
樹木や家屋程度の粗度要素のある地域	0.015	0.28
高層建築の密集する都市	0.050	0.40

まず, 突風率  $\Gamma$  と  $s/T$  の関係に対しても, サンプリング時間  $T$ , 摩擦係数  $k$ , 高さ  $z$ , 基準風速  $V_1$  がどのように影響するかを示せば, 図-8, 9, 10, 11 のようになる。

これらのうち, 特に同一の評価時間  $s (= 2 \text{ sec})$ , 基準風速  $V_1 (= 30 \text{ m/sec})$  に対して, サンプリング時間  $T$ , 摩擦係数  $k$ , 高さ  $z$  の影響を示したのが図-12, 13, 14, 15 である。

これらの図から, 突風率は地表粗度が大きいほど, 高さの低い点ほど, サンプリング時間の増すほど, 評価時間の短いほど, 基準風速の小さいほど大きくなることがわかるが, この傾向は物理的にも予測あるいは説明しうるものである。

すなわち, 風の乱れは  $U_* = \sqrt{\tau/\rho}$  に比例するが  $\tau \propto k$  であるから,  $k$  の大きいほど, 地表粗度が大きいほど,  $\Gamma$  は大きくなる。 $T$  を増せばそれだけ風の乱れに貢献する大きな渦がとらえられるし,  $s$  を小さくすれば小さな渦の作用もとらえることができて観測される風速変動は大きくなる。高さが増せば, 亂れの強さは一定でも(式(29)より), 平均風速は大きくなるから  $\Gamma$  は相対的に小さくなる。基準風速が増せば, 風速変動にしめる小さな渦の割合が多くなるので評価時間  $s$  が大きい場合には, これらが切り捨てられて突風率は減少するものと考えられる。

図-6 (b)

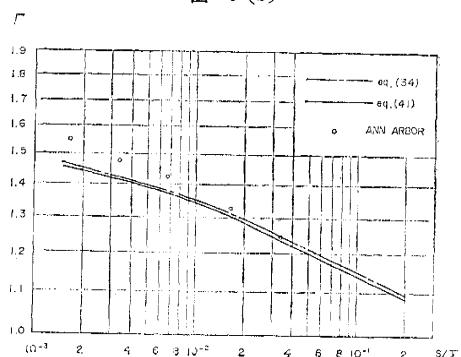


図-7

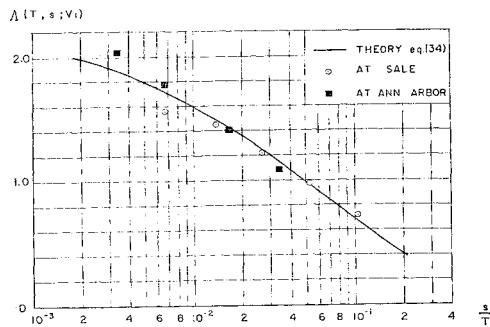


図-8 (a)

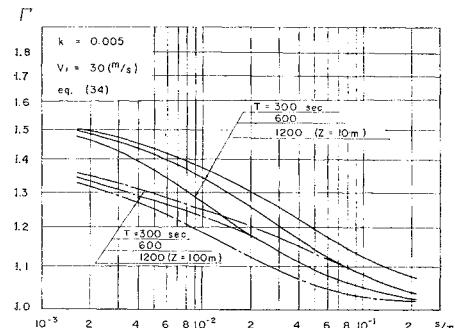


図-8 (b)

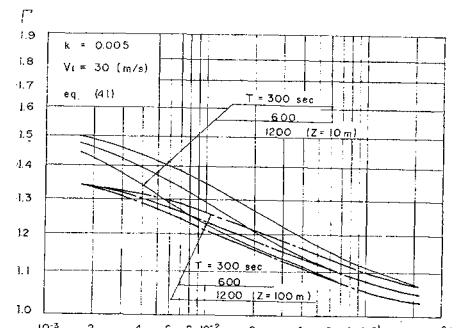


図-9 (a)

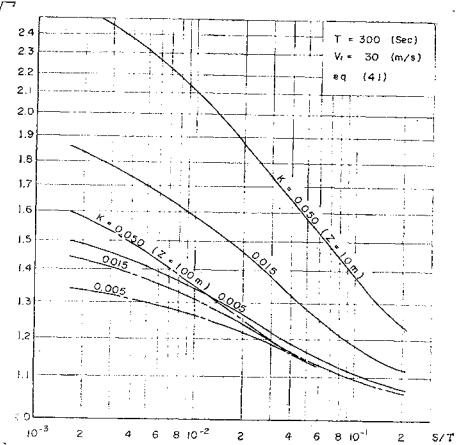


図-9 (b)

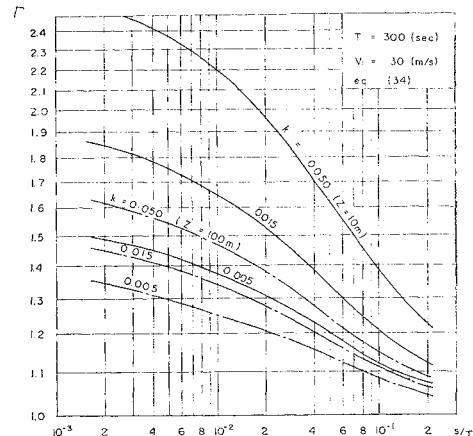
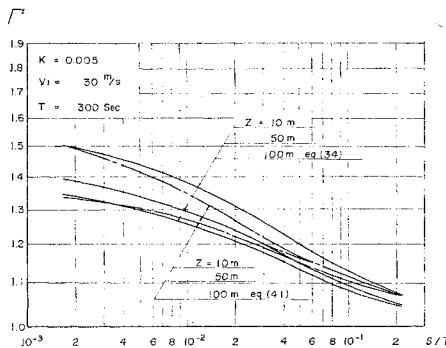


図-10



### (5) 突風率の計算式

突風率は式 (34) もしくは式 (41) で計算すれば良いわけであるが、式形が複雑であるから簡単な計算式を作ることが望ましい。

光田<sup>4)</sup>は Deacon の Sale での実測値と、Sherlock の Ann Arbor での実測値を整理してつぎのような経験式をえた。

図-11 (a)

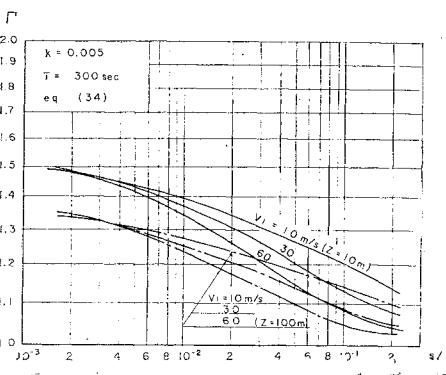


図-11 (b)

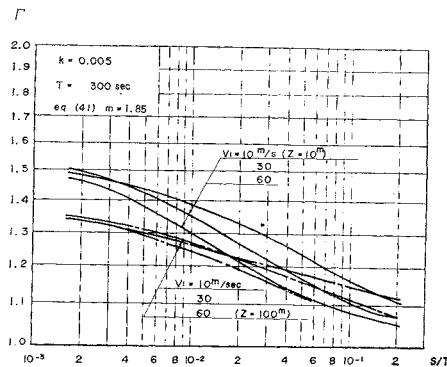
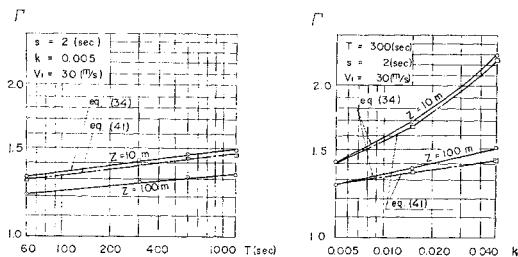


図-12

図-13



$$\Gamma = \left( \frac{s}{T} \right)^{-p(z)} \quad (45)$$

$$p(z) = p_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^{-0.41}$$

先にものべたように実測数が少なく経験式を導くのにデータ不足とも思われるし、また  $V_1 \approx 20$  m/sec,  $k=0.005$ ,  $T=300$  sec での実験をもとにしたものであるから、これらと異なる  $V_1$ ,  $k$ ,  $T$  に対して適用するのにも疑問がある。ことに、 $k$  の影響は大きいから他の粗度条件に対して適用しない。また、一般には  $\Gamma$  を  $(s/T)$  の指數則とみなすことはできない。たまたまこの経験式を導いた条件のもとで指數近似が可能であつ

図-14

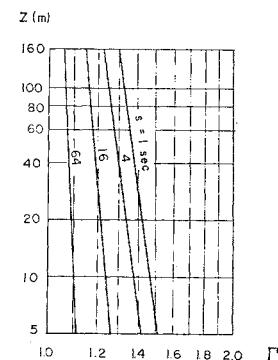
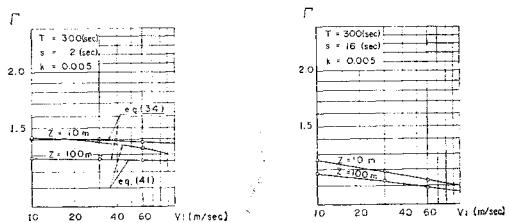


図-15



たのにすぎない(図-8~11 参照)。

したがって、理論で与えられる関係と実験とを比較しつつ、より一般的な計算式を定めることが必要である。

式 (34), (41) は、

$$\frac{\Gamma-1}{2\sqrt{3k}} \left( \frac{z}{z_1} \right)^{\alpha} = A(T_*, s_*) \quad (46)$$

と書ける。とくに、Davenport の突風スペクトルを用いれば式 (46) の右辺は  $T, s$  の他は  $V_1$  のみに関係する。

$$A = A(T, s; V_1) \quad (47)$$

式 (20) の突風スペクトルの場合に、この関係式が実験と良く一致することは、すでに図-7 に示した。 $(T=300 \text{ sec}, V_1=18 \text{ m/sec} (\text{p.25}))$  式 (27) の突風スペクトルを用いた場合は、図-17 のようになる。

図-16

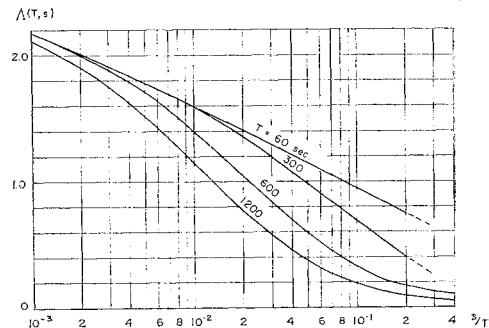
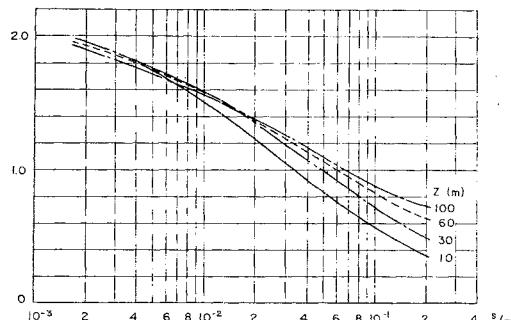


図-17

Δ(T\*, s\*)



なお、図-18 は式 (35) の関係を検討したものである。各実験点は 2 個のデータの平均にすぎないので厳密に理論と比較しえないことや、 $S(f)$  が  $\alpha$  にも関係する点も考慮すれば、式 (35) の関係を一応認めることができる。また、図-7 において理論曲線と実験点は良く一致しているら、記録時間  $T$  や基準風速  $V_1$  が他の値の場合にも式 (34) や式 (41) は正しいと判断して良いであろう。突風スペクトルは式 (20) でも式 (27) でも、突風率には結果的に大きな差異はないから、簡単な Davenport 式を使うのが便利である。

以上のような考察から、突風率はつぎのようにして計算すれば良い。

a)  $T_*, s_*$  を次式で計算する。

$$\left. \begin{aligned} T_* &= V_1 T / 1200 \\ s_* &= V_1 s / 1200 \quad (V_1: \text{m/sec}) \end{aligned} \right\}$$

.....(48)

b) 図-4,5より  $\sigma'(T_*, s_*)$ ,  $d(T_*, s_*)$  を読みとる。  $d(T_*, s_*)$  は近似的に,

$$d(T_*, s_*) = 0.62 s_*^{-0.614} \quad (s_* < 0.4)$$

.....(49)

で求められる。実用範囲で  $d(T_*, s_*)$  は  $T_*$  に無関係である。

ついでながら,

$$h(T_*, s_*) = 0.42 s_*^{-0.64}$$

である。

c) 次式または表-2から  $M_1(N_*)$  を計算する。

$$\begin{aligned} M_1(N_*) &= (\ln N_*)^{1/2} + \frac{\gamma}{2} (\ln N_*)^{-1/2} \\ &\quad - \frac{1.9781}{8} (\ln N_*)^{-3/2} \\ &\quad + \frac{5.4449}{16} (\ln N_*)^{-5/2} \dots (50) \end{aligned}$$

$$N_* = T_* d(T_*, s_*) \dots (51)$$

d)  $A(T, s; V_1) = \sigma'(T_*, s_*) M_1(N_*)$  を計算する。

d') 上の a)~d) の計算は繁雑なので  $A(T, s; V_1)$  の曲線を 図-19,20 に示した。

$A$  を全範囲にわたって簡単な式で近似することはむずかしいけれども、 $V_1$  が  $10 \sim 60 \text{ m/sec}$ ,  $s$  が  $2 \sim 10 \text{ sec}$  ( $s_* = 2 \times 10^{-2} \sim 5 \times 10^{-1}$ ) の実用範囲にある場合には、

$$\begin{aligned} A(T, s; V_1) &= \{0.23 \log T_* + 0.72\} \log s_* \\ &\quad + \{0.25 \log T_* + 0.23\} \end{aligned}$$

.....(52)

で  $A$  を求めることができる。

e) 最後に突風率は、

$$\Gamma = 1 + \sqrt{12k} \left( \frac{z_1}{z} \right)^a A(T, s; V_1) \dots (53)$$

で計算できる。

図-18

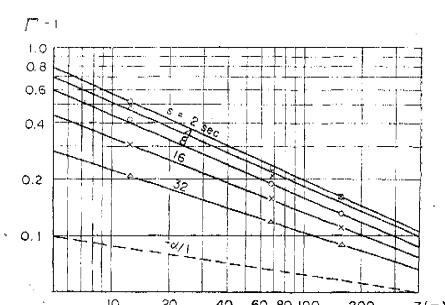


図-19

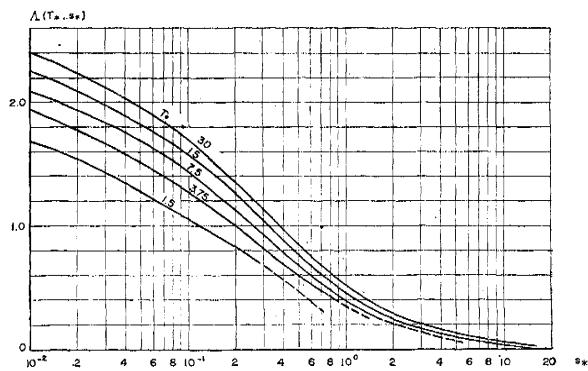


図-20

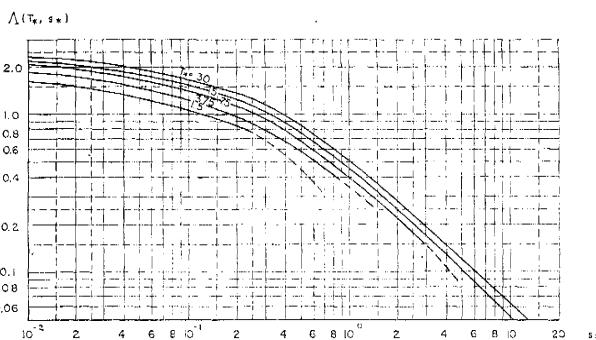


表-2

$N_*$	$M_1(N_*)$
$2^0$	0.886
$2^1$	1.146
$2^2$	1.389
$2^3$	1.610
$2^4$	1.810
$2^5$	1.992
$2^6$	2.160
$2^7$	2.316

### 3. まとめ

- 1) 不規則変動の瞬間最大値は、不規則変動のスペクトル密度関数がわかれば、式(12)のように表わせる。
- 2) 不規則変動の瞬間最大値は、観測時間と評価時間によって変わる。瞬間最大値の平均値(期待値)と平均変動値との比は、スペクトル密度関数  $S(f)$  に関して、式(16), (16a) のようになる。(p.25)
- 3) 不規則変動が不規則外力によって発生するときは外力のスペクトルに増幅関数を掛けたものを  $S(f)$  とみなさなければならない。

- 4) 突風率  $\Gamma$  は、観測時間  $T$ 、評価時間  $s$  の他に摩擦係数  $k$ 、地面からの高さ  $z$ 、基準高さ  $z_1(10 \text{ m})$  での風速  $V_1$  の影響をうける。これらの関係は、

$$\frac{(\Gamma-1)}{\sqrt{12k}} \left( \frac{z}{z_1} \right)^a = A(T, s; V_1)$$

の形にまとめうる。 $A$  の値は、図-19,20 に示すとおりであるが実用範囲では近似的に式(52)で与えられる。

$\Gamma$  を  $s/T$  の指數関数として表わしうるのは特別の観測時間・粗度・基準風速の場合である。

- 4) 突風率は、観測時間  $T$  の長いほど・評価時間、あるいは計器感度  $s$  の短いほど・摩擦係数  $k$ 、あるいは地表粗度の大きいほど・高さの低い所ほど・基準風速  $V_1$  の小さいほど大きい。

5) 突風スペクトルとして、一般に用いられている Davenport 式は高さ  $z$  に無関係であるが、 $z$  の影響をふくんだスペクトル関数として式(27)が導かれた。しかし、結果的には突風率に対する両式の差異の影響は少なく、簡単な Davenport 式を用いるのが便利である。

なお、式(27)における熱フラックスの影響を表わす修正係数  $m$  は、強風の場合には当然のことながら 1 に等しいかほぼ 1 であると考えられる。安定気層で熱フラックスが負となるほど  $m$  は 1 より小さくなり、逆に不安定気層となるほど熱フラックスの効果が加味され  $m$  は 1 より大きくなる性質のものである。修正係数と気層安定度との関係は今後実測データの集収を行なってさらに検討したい。

この論文に掲げた突風率の計算は、電子計算機 IBM 7090 で行なった。プログラム作成に助力された日野和子氏に感謝したい。

#### 参考文献

- 1) Davenport, A.G.: The application of statistical concepts to the wind loading of structures. Proc. Inst. Civil Engrs. Vol. 19, pp. 449-472 (1961).
- 2) 厚谷正雄: 風速および風圧の瞬間最大値と平均値の関係—構造物の動風圧に対する寄与(その2)—, 鉄道技術研究報告, 第 404 号 (1964).
- 3) 日野幹雄: 瞬間最大値と評価時間・計測器特性との関係について, 電力中央研究所, 技術研究所所報, 第 14 卷, 第 5 号 (1964).
- 4) 光田寧: Gust factor and analysis time of gust, 気象集誌, Ser. II, Vol. 40, No. 4, pp. 242-244 (1962).
- 5) Rice, S.O.: Mathematical analysis on random noise. Bell System Tech. J., Vol. 23, p. 282 (1944), Vol. 24, p. 46 (1945).
- 6) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: The statistical distribution of the maxima of a random function. Proc. Roy. Soc. Vol. 237, pp. 212-232, (1956).
- 7) Cartwright, D.E.: On estimating the mean energy of sea waves from the highest waves in a record. Proc. Roy. Soc. Vol. 247, pp. 22-48, (1958).
- 8) Smith, F.B.: The effect of sampling and averaging on the spectrum of turbulence. Quart. J. Roy. Met. Soc. Vol. 88, No. 376, pp. 177-180 (1960).
- 9) Batchelor, G.K.: The theory of homogeneous turbulence, p. 56, Cambridge Univ. Press. (1953).
- 10) Davenport, A.G.: The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds. Quart. J. Roy. Met. Soc. Vol. 87, pp. 194-211 (1961).
- 11) Priestley, C.H.B.: Turbulent transfer in the lower atmosphere. The University of Chicago Press. p. 60 (1959).
- 12) 谷一郎: 乱流理論. p. 148, 金原出版, (1950)
- 13) 相馬清二: 強風のスペクトル構造について, 気象研究所 (1964):

(1964. 9.11・受付  
一部修正 1964.11.11)