

補剛アーチ橋およびつり橋の動的共通解析 (鉛直振動)

DYNAMIC ANALYSIS OF STIFFENED ARCH BRIDGES AND SUSPENSION BRIDGES

吉村 虎藏*・平井 一男**
By Torazo Yoshimura and Itio Hirai

要 旨 この研究は、アーチが補剛桁で偏心結合されたランガー桁の鉛直振動、ランガー トラス、ローゼ桁、タイドアーチ橋、2ヒンジリブアーチ橋などのアーチ橋架およびつり橋の鉛直振動を一括して解析する理論を提案し、さらにこの理論によって得られる値の厳密性を論じるために、動的レスポンスの特別な場合として求めたたわみ・曲げモーメントの静的解が従来の静力学的解法によって求めた値とどの程度の精度で一致するかを数値計算によって示したものである。

1. 緒 言

さきに筆者らは、支承上でアーチが補剛桁と偏心結合されていないランガー桁について、その固有振動数・振動モードの解析の2つの方法を示し、走行荷重によるレスポンスの解析、動的定数を用いた静的たわみ・静的曲げモーメントの解、死荷重によるアーチ推力の効果などについて発表した¹⁾。

ここではまず、ランガー桁***においてそのアーチが補剛桁端で偏心結合されたときの適合条件式・振動数方程式を求めた。また補剛トラスをもつランガートラス***の場合に、トラスの動的断面2次モーメントの新しい換算法とその換算法の正しいことを述べ、この換算断面2次モーメントを用いて、ランガートラスを偏心結合のあるランガー桁として動的に解析できるようにした。

ローゼ桁***の動的解析は、アーチの断面2次モーメントを換算してこれを補剛桁のそれに加算した仮定の補剛桁をもつランガー桁として解析できるようにした。

上の研究結果にいくらか手を加えることによって、逆ランガー橋・逆ローゼ橋・タイドアーチ橋・2ヒンジリブアーチ橋などの動的解析が、ランガー桁と共通な解析法で逐行できることを示した。

つり橋の鉛直振動は、つり橋自身のそれとして従来研究されて来たが、つり橋は補剛桁(またはトラス)をケーブルで補強した構造であり、補剛桁(またはトラス)をアーチで補強したランガー橋とくらべれば、桁(トラス)をアーチまたはケーブルで補強するという意味では同一構造と考えられ、一つの統一した理論のもとで解析できることは当然予想されるのであるが、このような試みは従来なされなかったようである。筆者らはつり橋を、その補剛桁の断面積を換算しなおすことによって、ランガー桁と共通な動的解析ができるようにした。

ここに扱った橋の振動解析については従来 Ritz^{2),3)}のエネルギー法がしばしば用いられているが、ここでは主として筆者らがさきにランガー桁の動的解析において示した一つの解析法すなわち結合法を使って理論を展開した。そしてエネルギー法についてはきわめて簡単な記述にとどめた。この動的解析法が正しいかどうかは、動的解析の特殊な場合としての静的解を、静力学的方法によって得た静的解と比較することによって検討することができる⁴⁾。ランガー トラスやつり橋の補剛トラスの換算断面2次モーメント・偏心結合のあるときの適合条件・動的解析法の厳密さについては、数値計算によって検討を加えた。この論文ではつぎの仮定のもとに解析を進める。

- i) アーチ(ケーブル)の軸線は放物線とする。
- ii) 補剛トラスは定断面桁に換算して扱う。
- iii) アーチ(ケーブル)の断面も同様に定断面に換算して扱う。
- iv) つり材の伸びを無視する。
- v) アーチ(ケーブル)の質量を無視する。

2. 補剛トラスの換算断面2次モーメント

この理論では、補剛トラスをもつランガー橋あるいはつり橋などを解析するとき、まずその補剛トラスをこれと等価な補剛桁におきかえる必要があるため、その換算法について若干記さなければならない。

通常トラスを桁に換算するにあたっては、その桁の断面2次モーメントを式(1)によって決定する方法がとられている。

* 正会員 工博 熊本大学教授 工学部応用力学教室

** 正会員 工修 熊本大学助教授 同上

*** 本邦では通常、補剛桁をもつランガー橋をランガー桁、補剛トラスをもつそれをランガートラスとよんでいる。この論文では両者を総称するときランガー橋とよぶことにする。ローゼとよばれる橋梁についても、上と同様の構造形式が考えられ、これらを総称するとき、ローゼ橋とよぶことにする。

$$I_r = \frac{A_u A_l}{A_u + A_l} h^2 + J \dots\dots\dots (1)$$

ここに A_u : トラスの上弦材の断面積
 A_l : トラスの下弦材の断面積
 h : トラス高
 J : それぞれの弦材の図心軸に対する断面2次モーメントの和

このような換算法は支間が 200~300m 以上の橋トラスには問題は生じないが、これより支間の小さいものに対してこの換算法をそのまま使用すると、静的たわみや固有振動数などについて不都合が生じることがあるので、ここに新しい換算法を提案する。

ランガー トラスあるいはつり橋などが自由振動を行っているとき、その振動モードは一般に次式にて表わされる。

$$\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots (2)$$

この場合補剛トラスは $\sum p_n \sin(n\pi x/l)$, ($n=1,2,\dots$) なる慣性力をうけているはずである。ゆえに、 $p_n \sin(n\pi x/l)$ なる分布荷重を、トラスと置換桁(定断面)とにべつべつに載荷させ、このときの両者の変形を求めた後、これらのたわみを等置することによって、 $n=1,2,3,\dots$ のそれぞれに対してトラスの換算断面2次モーメント $I_{g1}, I_{g2}, I_{g3}, \dots$ が求められる。変形に対応して $I_{g1}, I_{g2}, I_{g3}, \dots$ がどのように変化するかは数値計算のところで示す。なおこの換算法の正しいことの証明のためにはつぎの方法によって検討した。

固有振動数 ω_n と正規化モード $\Phi_n(x)$ を使って静的たわみ $W(x)$ を表現すると次式で表わされる⁴⁾。

$$W(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)}{\omega_n^2} P_0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_n}{\rho}}$

x_i : 測定点の座標

x_j : 荷重点の座標

P_0 : 集中荷重

I_n : $p_n \sin(n\pi x/l)$ の荷重に対応する換算断面2次モーメント

ゆえに $P_0=1$, x_i を固定、 x_j を変数とすると、式(3)から x_i 点のたわみの影響線が動的定数の ω_n や Φ_n を用いて計算できるわけである。したがって前記の方法で換算した断面2次モーメント $I_{g1}, I_{g2}, I_{g3}, \dots$ をもつ桁について式(3)の計算を行ない、これを静力学的方法すなわち仮想仕事法や弾性荷重法によるトラスのたわみの影響線とくらべると、ここに提案する換算法が正しいかどうか検討されるわけである。検討の結果は 6. に示す。

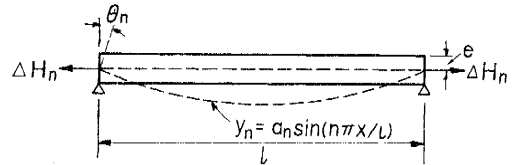
このようにして補剛トラスは桁に換算できるので以下では補剛桁をもつ構造について理論を進める。

3. 支承上でアーチと補剛桁とが偏心結合されているランガー桁の適合条件

ここでは桁端においてアーチと偏心結合されたランガー桁の適合条件式を求める。

いま、はりが図-1に示すように ΔH_n なるアーチからの軸力(引張力)をうけ

図-1



$$y_n = a_n \sin(n\pi x/l) \dots\dots\dots (4)$$

なる変形をしたときを考えると、上突縁の伸び ΔL_n は次式によって示される。

$$\Delta L_n = \frac{l \cdot \Delta H_n}{A_g E} - 2e\theta_n \dots\dots\dots (5)$$

ここに

$$\theta_n = y'_n \Big|_{x=0} = a_n \frac{n\pi}{l} \left| \cos \frac{n\pi x}{l} \right|_{x=0} = \frac{n\pi a_n}{l}$$

A_g : 補剛桁の断面積 (補剛トラスでは上下弦材の断面積の和)

e : 桁の図心軸と上突縁との距離

また、アーチが $a_n \sin(n\pi x/l)$ の変形と ΔH_n なる水平推力をうけたとき、その水平方向の伸び Δl_{an} は次式にて表わされる⁴⁾。

$$\Delta l_{an} = 16 \left(\frac{f}{l}\right) \cdot \frac{a_n}{n\pi} - \frac{\Delta H_n \cdot l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l}\right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l}\right)^4 \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 f : ライズ、 A_a : アーチ断面積、 l : 支間

いま支承上においてアーチが補剛桁の上突縁に取り付けられているとすると、 ΔL_n と Δl_{an} とは等しくなければならないから、この両者を等置して適合条件式を得て、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} n=1,3,5,\dots \text{のとき,} \\ \Delta H_n = \frac{16 E f B}{l^2 \pi} \cdot \frac{a_n}{n} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\} \dots\dots\dots (7) \\ n=2,4,6,\dots \text{のとき,} \\ \Delta H_n = 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに B は前報⁴⁾と同様に、

$$B = A_a A_g \sqrt{A_a + A_g \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l}\right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l}\right)^4 \right\}}$$

このようにアーチは対称変形の時だけ働き、逆対称変形の時には作用しないので逆対称振動では補剛桁のみの振動を考えればよい。

また、式(7)はランガー桁が $a_n \sin(n\pi x/l)$ の変形を生じたときアーチに生じる水平推力を求める式であるから、ランガー桁が

$$y(x) = \sum_n y_n = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(8)$$

なる変形をしたときは、アーチの推力 ΔH は次式により求められる。

$$\Delta H = \sum_n \Delta H_n = \sum_n \frac{16 E f B}{l^2 \pi} \cdot \frac{a_n}{n} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

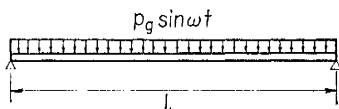
4. 結合法による振動数方程式と振動モードの正規化

(1) 偏心結合のランガー桁・ランガー トラス

結合法は、すでに前報⁴⁾において示したように、まずランガー桁をアーチと補剛桁（単純ばり）とに分離し、この両者を独立に解析した後にこれらを一体として結合し、固有振動数・振動モードを求める方法である。

まず図-2に示すように $p_g \sin \omega t$ なる等分布周期力が単純ばりに作用するとき、そのレスポンス $w_1(x)$ は次式により与えられる^{4),5)}。

図-2



$$w_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left\{ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx \right\} \sin \omega t \dots\dots\dots(10)$$

ここに

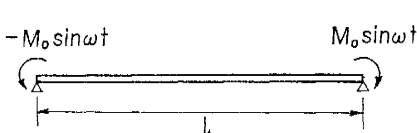
$$\omega_{gn} = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_{gn}}{\rho}} \dots\dots\dots(10')$$

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin(n\pi x/l) \dots\dots\dots(10'')$$

- ω_{gn} : 単純ばりの n 次の固有振動数
- $\Phi_n(x)$: 単純ばりの n 次の正規化モード
- I_{gn} : トラスの n 次の換算断面2次モーメント (桁のときは一定値 I_g)
- M : はりの全質量 (ρl)

つぎに、モーメント荷重 $M_0 \sin \omega t$ が単純ばりの両端に作用するとき (図-3)、そのレスポンス $w_1(x)$ は次式より求められる⁶⁾。

図-3

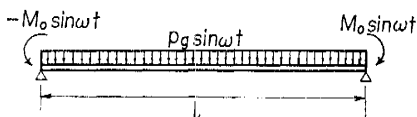


$$w_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \{ \Phi_n'(x_j=0)(-M_0) + \Phi_n'(x_j=l)M_0 \} \sin \omega t = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \cdot \Phi_n'(x_j=0) \cdot M_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(11)$$

ここにモーメント荷重は時計回りモーメントを正とした。単純ばりのときは、 $\Phi_n'(x=0) = -\Phi_n'(x=l)$ の関係がある。

等分布周期力 $p_g \sin \omega t$ および端モーメント荷重 $M_0 \sin \omega t$ が作用するときの解がそれぞれ上記のように与えられるので、この両者が同時に作用するとき (図-4)、そのレスポンス $w(x)$ はこれらを重ね合わせてつぎのように表わされる。

図-4



$$w(x) = w_1(x) + w_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \times \left[\int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2\Phi_n'(x_j=0)M_0 \right] \sin \omega t \dots\dots\dots(12)$$

単純ばりの振動モード $\Phi_n(x)$ は正弦関数であるから、上式は次式のように書きかえられる。

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \times \left[\int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2\Phi_n'(x_j=0)M_0 \right] \times \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \omega t \dots\dots\dots(13)$$

ただし、

$$\{\Phi_n(x)\}_{\max} = \{2/M\}^{1/2}$$

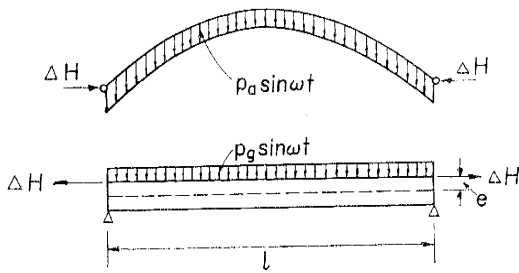
いま、式(13)の示す変形をランガー橋に強制的に与えたとき、アーチに作用する推力 ΔH は式(9)を用いて次式にて与えられる。

$$\Delta H = \frac{16 E f B}{l^2 \pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\} \cdot \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \times \left\{ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2\Phi_n'(x_j=0)M_0 \right\} \right] \sin \omega t \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 $(n=1,3,5,\dots)$

ランガー橋が式(13)の示す変形をして、その結果アーチに作用する推力 ΔH が式(14)で与えられたとき、補剛桁と切り離れたアーチ部に働く等分布周期力 (つり材の部材力/格間長) の強度 p_a (図-5) は次式にて与えられる。

図-5



$$p_a = 8 \Delta H \cdot f / l^2 \dots\dots\dots(15)$$

ゆえに式(14)を用いればこの等分布荷重 p_a は次式となる。

$$p_a = \frac{128 E f^2 B}{l^4 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\} \cdot \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \right] \times \left\{ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2 \Phi_n'(x_j=0) M_0 \right\} \dots\dots\dots(16)$$

いま、このようにして決定した分布荷重 p_a と推力 ΔH とをアーチに作用させながら、一方補剛桁には $p_g \sin \omega t$ なる等分布周期力と ΔH なる水平推力とをその上突縁に作用させながら(これは中立軸について考えると ΔH の軸力と

$$\Delta H \cdot e = M_0 \dots\dots\dots(17)$$

なる端モーメント荷重とが同時に作用しているのと等価である), 両者を重ね合わせて結合すると(図-5), ランガー橋が組み立てられ, しかもこのように結合された橋には

$$p_a + p_g = p_0 \dots\dots\dots(18)$$

なる等分布周期力が作用し, その変形は式(13)により与えられていることになる。式(17)の関係を式(16)に代入すると

$$p_a = \frac{128 E f^2 B}{l^4 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\} \cdot \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \right] \times \left\{ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2 \Phi_n'(x_j=0) \cdot \frac{l e p_a}{8 f} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

さらに, ランガー橋が自由振動しているときには外力は0であるという条件, すなわち

$$p_a + p_g = p_0 = 0 \dots\dots\dots(20)$$

を式(19)に使用すると, つぎの振動数方程式が得られる。

$$1 + \frac{512 E f^2 B}{\pi^2 \rho l^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\}^2 \right] = 0 \dots\dots\dots(21)$$

ただし, $(n=1, 3, 5, \dots)$

式(21)の未知数は ω のみであるから, 試算法によって上突縁で偏心結合されたランガー橋の固有振動数 ω_{em} , すなわち $\omega_{e1}, \omega_{e3}, \dots$ が容易に決定される。 $e=0$ とおけば偏心を無視した場合の振動数方程式⁹⁾となるこ

とは当然である。また, 偏心結合点が任意の場合にも式(21)はそのまま用いられることはただちに知られよう。

振動モードは, 式(21)より求めた固有振動数 ω_{em} , $(m=1, 3, 5, \dots)$ を式(13)に代入し, これに式(17)の関係を用いればただちに得られる。振動モード $\varphi_m(x)$ は, その振幅の大きさは自由に選定できるので定数を省略すると,

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n (\omega_{gn}^2 - \omega_{em}^2)} \times \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\} \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) \right] \dots\dots\dots(22)$$

ただし, $(n=1, 3, 5, \dots)$

となり, このときの正規化した振動モード $\Phi_m(x)$ はつぎのように与えられる。

$$\Phi_m(x) = C_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_{mn} \sin \left(\frac{n \pi x}{l} \right) \right] \dots\dots\dots(23)$$

ここに,

$$C_m^2 = \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^2}, \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

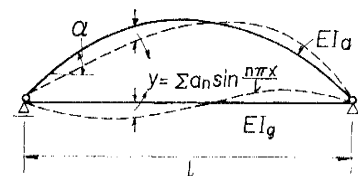
$$b_{mn} = \frac{1}{n (\omega_{gn}^2 - \omega_{em}^2)} \cdot \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\}$$

振動数方程式と振動モードとはともに無限項の級数形の計算を必要とするが, 式(10')よりわかるように ω_{gn}^2 は n^4 に比例して増加するため, これらはいずれも早く収束する。したがって連続した3~5項程度をとれば実用上十分満足できる精算値が得られる。

(2) ローゼ桁

ローゼ桁はランガー橋のアーチ部に曲げ剛性を持たせてアーチを補強したものであるから, ここではランガー橋について述べた解析において, アーチの曲げ剛性をその式中に導入することについて考える。まずローゼ桁のアーチ部の曲げ剛性 EI_a を除去し, ランガー橋と同じ構造にして考える。いまこれに式(8)にて示される変形を与えた場合, アーチと補剛桁との間に作用する力はランガー橋とまったく同じであるから, アーチの水平推力 ΔH を求めるには式(9)の適合条件式がそのまま使用できることは容易に理解できる。つぎにこのようなランガー橋のアーチ部に曲げ剛性をもたせるとローゼ桁となるが, ローゼ桁が式(8)の変形を生じている場合, このアーチ部に作用する曲げモーメント $M_a(x)$ はつぎのようにして求められる。すなわち, いまつり材の伸びを無視しているので, 補剛桁(下弦材)とアーチ(上弦材)とは同一の変形をしているという条件(図-6),

図-6



$$\Delta l = \frac{M_a(x)}{EI_a} \cdot ds = -y''(x) dx$$

$$ds = dx \cdot \sec \alpha(x)$$

ここに、 dx ：補剛桁上の微小長さ
 ds ：アーチ軸線上の微小長さ
 $\alpha(x)$ ：補剛桁とアーチとの角度
 が使用できて次式を得る。

$$M_a(x) = -EI_a y''(x) \cdot \cos \alpha(x) \quad \dots\dots\dots(24)$$

また、補剛桁に作用する曲げモーメント $M_g(x)$ は

$$M_g(x) = -EI_g y''(x) \quad \dots\dots\dots(25)$$

式(24)と(25)との和をつくると

$$M(x) = M_a(x) + M_g(x) \\ = -E\{I_a \cos \alpha(x) + I_g\} y''(x) \quad \dots\dots\dots(26)$$

実際の橋では

$$I_a \cos \alpha(x) \doteq I_{a0} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(27)$$

(I_{a0} ： $I_a \cos \alpha$ の平均値)と仮定しても、その誤差は数%程度であるから、このような近似を行なうと、式(26)は次式となる。

$$M(x) = -E(I_{a0} + I_g) y''(x) \quad \dots\dots\dots(26')$$

ゆえにローゼ桁は、上弦材の曲げ剛性 EI_a を下弦材の曲げ剛性にくり入れて、補剛桁が見かけ上 $E(I_{a0} + I_g)$ なる曲げ剛性をもったランガー桁と考えられ、前報⁹⁾あるいは(1)にのべたランガー橋の解析がローゼ橋に対してもそのまま適用できることがわかる。

(3) その他のアーチ橋

これまでの理論の展開にならえば、その特殊な場合として、その他のアーチ橋の動的解析についてつぎの結論が容易に得られる。

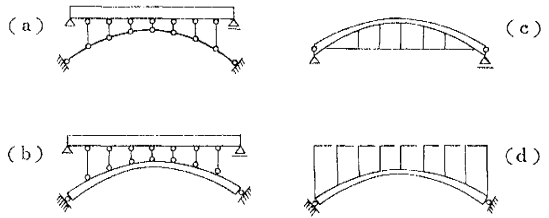
逆ランガー橋(図-7a)では、アーチの支間が不動であるから、下路ランガー橋の式において、 $A_g \rightarrow \infty$ とおけばよい。このとき式(21)などの B は次式となる。

$$B' = A_a \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right\}$$

逆ローゼ橋(図-7b)では、下路ランガー橋の式において、桁の断面2次モーメントを $(I_{a0} + I_g)$ に置きかえ、かつ $A_g \rightarrow \infty$ (すなわち $B \rightarrow B'$) とおけばよい。ただし、 $I_{a0} \doteq I_a \cos \alpha$ の平均値。↗

タイドアーチ橋(図-7c)では、下路ランガー橋の式において、 $A_g \rightarrow A_t$ (A_t ：タイの断面積)、 $I_g \rightarrow I_{a0}$ とおけばよい。

図-7

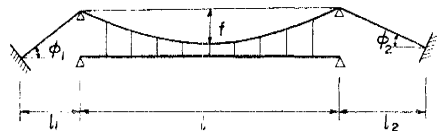


2 ヒンジ リブ アーチ橋(図-7d)では、下路ランガー橋の式において、 $A_g \rightarrow \infty$ (すなわち $B \rightarrow B'$)、 $I_g \rightarrow I_{a0}$ とおけばよい。

(4) つり橋(弾性理論)

つり橋とランガー橋とは構造上緊密な相関関係があるので、ここではこれらの関係をもとにして、ランガー橋について求めた基礎式をつり橋にそのまま適用することを考えよう。ただし、ケーブルと補剛桁とが直接結合(セルフアンカー)されていないつり橋では、ケーブルと補剛桁との偏心結合についてはまったく考慮しなくてよいので、ここでつり橋に対応させて考えるランガー橋は偏心 $e=0$ のものを取りあげ、図-8のつり橋について記す。

図-8



ランガー橋はアーチの端部を補剛桁によって水平方向に弾性支持されているが、つり橋ではケーブルの両端を背控ケーブルによって弾性支持されている。またランガー橋ではアーチ部に ΔH なる水平推力が生じたとき補剛桁に ΔH の軸力が作用し、つり橋では背控ケーブルに $\Delta H \sec \phi_1$ または $\Delta H \sec \phi_2$ なる軸力が作用する。これら両者の相互関係を表-1にまとめた。

表-1

	ランガー橋	つり橋
アーチまたは中央ケーブルの弾性支持部	補剛桁	背控ケーブル
アーチ(ケーブル)支持部に作用する力	ΔH	$\Delta H \sec \phi_1$ と $\Delta H \sec \phi_2$
アーチ(ケーブル)支持部の水平方向の伸び	$\Delta l_g = \frac{\Delta H \cdot l}{A_g E_g}$	$\Delta l_s = \frac{\Delta H}{E_a A_a} \cdot (l_1 \sec^3 \phi_1 + l_2 \sec^3 \phi_2)$

ここに、 E_a ：ケーブルの弾性係数
 A_a ：ケーブルの断面積
 E_g ：補剛桁の弾性係数
 A_g ：補剛桁の断面積

このようにつり橋とランガー橋はそれぞれケーブル、アーチの両端を弾性支持するという共通点を持ち、しかもその対応関係が上表のように与えられるので、つり橋の場合背控ケーブルの水平伸び Δl_s (表-1) を用いて

式(9)に対応する適合条件式が導かれ、これをもとにしてランガー橋における解析手法をくり返せば固有振動数・振動モードの基礎式を誘導することができる。しかし、このようにしてつり橋の動的解析の基礎式を改めてつくりなおすと、ランガー橋について求めた基礎式をすべて書きかえる必要が生じるので、ここではランガー橋について求めた基礎式がそのままつり橋にも共通して使用できるように、背控ケーブルの働きを取り入れて新たにつり橋の補剛桁の換算断面積を求めることについて考える。

ランガー橋のアーチあるいはつり橋の中央ケーブルが式(8)の変形を行なった結果 $ΔH$ の水平力が生じたとき、アーチまたはケーブルの支持部の水平伸び $ΔL_g$ (ランガー橋)、 $ΔL_s$ (つり橋) はそれぞれ表-1のように与えられるので、この関係を使って式(9)の適合条

$$A_g' = \frac{E_a}{E_g} \cdot \frac{lA_a}{l \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right\} \left\{ 1 - \frac{E_a}{E_g} \right\} + \{ l_1 \sec^3 \phi_1 + l_2 \sec^3 \phi_2 \}} \dots\dots\dots(29)$$

ゆえに、つり橋の弾性理論的動的解析の場合には、その背控ケーブル部と等価に扱うことのできる仮定の補剛桁断面積 A_g' を式(29)より決定して、(1)あるいは前報⁴⁾にのべたランガー橋の基礎式をそのまま適用すればよいことが知られる。

(5) つり橋(たわみ度理論)

線形化したたわみ度理論によりつり橋の解析を行なうときには、死荷重によるケーブルの水平張力 H_0 を考慮する必要があるが、この影響は以下の手法により取り入れる。いまの場合つり材の伸びは無視しているので、ケーブルと補剛桁とは一体となって振動する。ケーブルと補剛桁とを一体の振動系と考えれば、ケーブルに生じている水平張力 H_0 を補剛桁に移行して考えても力学的に矛盾は生じない。したがって結合法では、 H_0 の働く補剛桁とケーブルとの動的結合を考えればよいわけである。このとき補剛桁の固有振動数は式(30)の ω'_{gn} となることは周知⁶⁾のとおりで、

$$\omega'_{gn} = \omega_{gn} \left\{ 1 + \frac{\zeta_n}{n^2} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(30)$$

ここに、 $\zeta_n = H_0 l^2 / EI_{gn} \pi^2$ 、 ω_{gn} は式(10')

このときの振動モードは

$$\Phi_{gn}(x) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(31)$$

式(30)、(31)のように補剛桁が水平張力 H_0 の作用をうけると $H_0 = 0$ なるときにくらべ、補剛桁単独の固有振動数 ω'_{gn} は $\left\{ 1 + \frac{\zeta_n}{n^2} \right\}^{1/2}$ 倍増加するけれども、振動モード自体に変化は生じない。ゆえに、式(21)にならって線形化したたわみ度理論でのつり橋の振動数方程式は式(32)となる。

$$1 + \frac{512 E f^2 B''}{\pi^2 \rho l^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\omega'_{gn^2} - \omega^2)} = 0 \dots\dots(32)$$

件式を求めると次式となる。

$$\frac{\Delta H \cdot l}{E_g A_g} = \frac{16 f}{l \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} - \frac{\Delta H \cdot l}{E_g A_a} \times \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right\} \dots\dots \text{ランガー橋} (e=0) \dots\dots(28a)$$

$$\frac{4 H}{E_a A_a} \{ l_1 \sec^3 \phi_1 + l_2 \sec^3 \phi_2 \} - \frac{16 f}{l \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} - \frac{4 H \cdot l}{E_a A_a} \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right\} \dots\dots \text{つり橋} \dots\dots(28b)$$

これらの式を比較して、つり橋の補剛桁の仮想断面積として式(29)の A_g' を用いれば、ランガー橋の適合条件式がそのままつり橋の適合条件式として適用できることがわかる。

ただし、 $(n=1, 3, 5, \dots)$ 、

$$B'' = \frac{A_a A_g'}{A_a + A_g'} \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right\}$$

A_g' は式(29)より決定。

対称振動モード $\varphi_m(x)$ は次式にて与えられる。

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\omega'_{gn^2} - \omega_m'^2)} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots(33)$$

ただし、 $(n=1, 3, 5, \dots)$

ここに ω_m' は式(32)を解いて得られるつり橋の m 次の固有振動数である。

つり橋のたわみ度理論における逆対称振動時には、 H_0 の働く補剛桁のみの自由振動となるから、固有振動数と振動モードは式(30)、(31)によりそれぞれ与えられる。

上述のように、線形化したたわみ度理論によるつり橋の解析のときも、式(29)の A_g' を考慮することと、補剛桁の固有振動数を補正するだけで、ランガー橋の動的解析理論がそのまま使用できるわけである。

5. 運動方程式と動的・静的レスポンスの解について

上記の理論によれば、アーチ形式の諸橋およびつり橋などの固有振動数 ω_m 、正規化した振動モード $\Phi_m(x)$ が決定できる。 ω_m と Φ_m とが決定できれば、種々の移動荷重などに対する基礎方程式は容易にたてることができ^{4),5)}、これを解いて走行荷重による動的レスポンスあるいは静的たわみや曲げモーメントの影響係数を計算することができる。これらに関する記述および計算例は文献^{4),5)}を参照されたい。

6. 数値計算

前報⁴⁾では、支承上でアーチと補剛桁との間に偏心が

ないと仮定できるランガー桁を扱い、その仮定が通常のランガー桁に対して十分成立することが検討されている。しかしランガー トラスでは補剛トラスの 構高がアーチのライズにくらべてかなり大きいので、これを上記の仮定を用いて解析してみると、いくつかの疑問の持たれる結果が得られた。ゆえに、偏心結合の影響を新たに考慮した基礎式がまず立てられ、トラスの動的換算断面 2 次モーメントに新しい提案がなされ、つづいてローゼ橋・つり橋などの解析に理論の展開がなされたが、これらの理論の正しいことをここで検討してみたい。

ここで述べた解析理論は、ランガー桁・補剛桁をもつつり橋に対しては、はじめに設けた仮定以外になら近似を行っていないので厳密解となるが、補剛トラスをもつときには、トラスを I_{gn} ($n=1,2,3,\dots$) なる桁に換算しているし、またローゼ桁その他のアーチ橋では式 (27) によって上弦材の断面 2 次モーメントの近似を行っているのので、その厳密性を検べる必要がある。

数値計算はつぎの諸橋について行なった。

- ① ランガー トラス (梶別橋^{?)}
天草 2 号橋 (熊本県)
- ② つり橋……………二軒橋 (宮崎県)
- ③ ローゼ桁……………泰平橋 (熊本市)

これらの橋の諸元を表-2 に示す。

まず 2. にのべた補剛トラス単独の換算断面 2 次モーメントについてのべる。上のランガー トラス 2 橋とつり橋の補剛トラスについて換算断面 2 次モーメント I_{g1} , I_{g2} , I_{g3} , I_{g4} と従来の換算断面 2 次モーメント I_r との

比較を表-3 に示した。この表に示すように I_{g1} , I_{g2}, \dots は、必ずしも一定でなくいちじるしい変化をすることおよび I_r と大きい差のあることが知られる。なお、この換算法が妥当なことを示すために、式 (3) により補剛トラス単独の $l/2$ 点のたわみの影響係数を動的定数を用いて算定し、これとトラスそのものに静力学的方法を適用して求めた影響係数とを比較して表-4 を得た。これ

図-9 The Natural Modes of Vibration (The Amakusa Bridge)

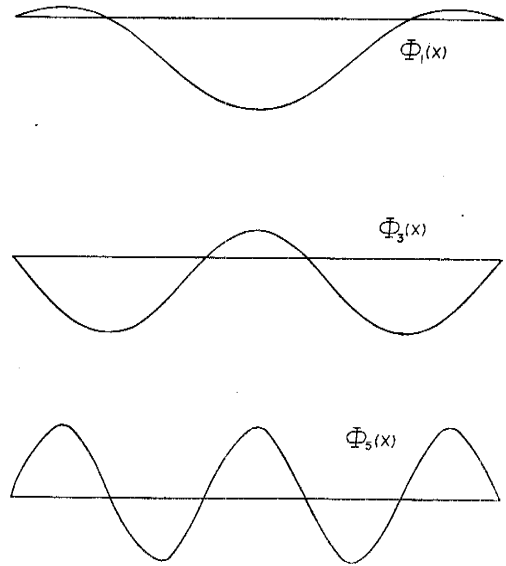


表-2 各 橋 の 諸 元

橋 の 形 式		梶 別 橋	天 草 2 号 橋	二 軒 橋	泰 平 橋
		ランガー トラス	ランガー トラス	つ り 橋	ロ ー ゼ 桁
支 間	l (m)	64.00	156.00	158.40	78.40
ラ イ ズ	f (m)	8.00	22.00	15.84	13.00
全 質 量	ρl (kg·sec ² /cm)	230.93	642.71	336.93	420.97
ト ラ ス 高	h (m)	3.00	4.00	3.50	
ア ー チ 断 面 積	A_a (cm ²)	270.20	467.90	212.87	723.65
ト ラ ス 上 弦 材 断 面 積	A_u (cm ²)	167.50	205.90	107.07	
ト ラ ス 下 弦 材 断 面 積	A_l (cm ²)	307.80	227.99	121.93	
補 剛 桁 断 面 積	A_g (cm ²)				644.80
桁 (トラス) 断面 2 次モーメント	I_r (cm ⁴)	9.8415×10^6	17.311×10^6	6.984×10^6	3.3139×10^6
ト ラ ス (桁) ヤ ン グ 率	E_g (kg·cm ⁻²)	2.1×10^6	2.1×10^6	2.1×10^6	2.1×10^6
ア ー チ (ケ ー ブ ル) ヤ ン グ 率	E_a (kg·cm ⁻²)	2.1×10^6	2.1×10^6	1.6×10^6	2.1×10^6

注：二軒橋側径間諸元 (図-8 参照)
 l_1 (m) : 44.65 l_2 (m) : 39.45
 sec ϕ_1 : 1.07551 sec ϕ_2 : 1.06165
 断面積は平均値を示す。

表-3 補剛トラスの換算断面 2 次モーメント

	I_{g1}	I_{g2}	I_{g3}	I_{g4}	I_r	l (m)	h (m)
	$(\times 10^6 \text{ cm}^4)$						
梶 別 橋	8.785	6.660	4.744	4.426	9.842	16@4.000=64.0	3.00
天 草 2 号 橋	15.180	14.890	10.580	10.750	17.310	32@4.875=156.0	4.00
二 軒 橋	7.023	6.675	6.751	5.088	6.984	44@3.600=158.4	3.50

注： I_r ：従来の換算法による値 {式 (1)}

表-4 1/2点たわみの影響係数(補剛トラス)

概 別 橋	W(T)	1/8	2/8 l	3/8 l	4/8 l
		cm/ton			
天草2号橋	W(T)	1.057	1.973	2.649	2.982
	W(G)	1.060	2.016	2.721	2.984
	W(R)	0.971	1.816	2.417	2.641
二軒橋	W(T)	0.8988	1.695	2.270	2.499
	W(G)	0.8998	1.695	2.274	2.493
	W(R)	0.7993	1.495	1.990	2.174

注: W(T): トラスとして静力学的に求めた値
 W(G): I_{0n} を使用して求めた値。式(3)
 W(R): I_r を使用して求めた値。式(1)

らの表-3,4よりここに提案したトラスの換算法の正しいことおよび従来の換算法が中小支間のトラスに対しては不当なことが理解できると思う。

振動数方程式は対称振動時には式(21)あるいは式(32), 逆対称振動時には式(10')あるいは式(30)によりそれぞれ与えられるので, これらを用いて各橋の固有振動数を求めこれを表-5に示した。また実測値の知っているものは表中に記した。振動モード $\phi_m(x)$ は式(23)より計算されるが, その一例として天草2号橋のモードを示すと図-9となる。

補剛トラスの桁への換算の正しさ, ローゼ桁のアーチの断面2次モーメントの取り扱いの精度をさらによくくらべるために, 上記の諸橋の静的たわみ・静的曲げモーメントの影響線を, 前報⁹⁾の式(46),(43)あるいは式(50), (51)により求め, これを従来の静力学的解析より求めたものと比較すると, 図-10~図-13の結果が得られた。

図-10

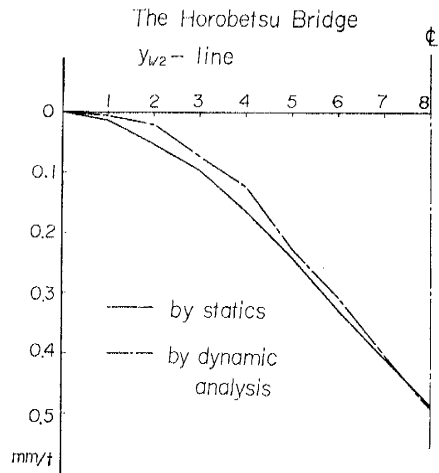
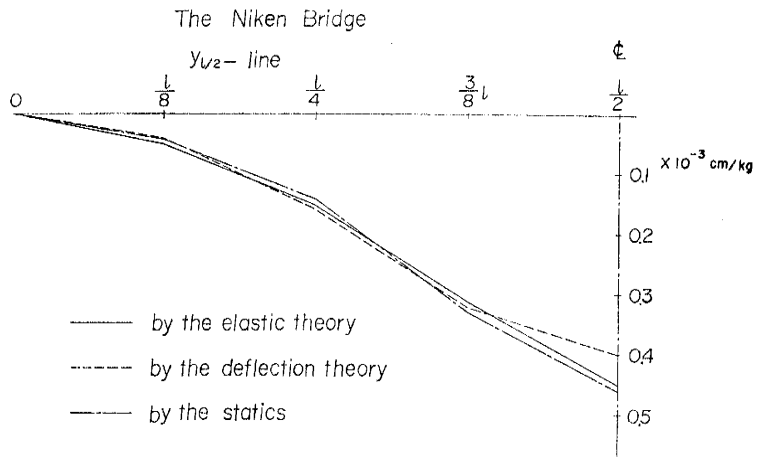


図 11



7. エネルギー法について

これまで, トラスの桁への新しい換算法, 偏心結合の

表-5 固 有 周 期

(sec)

概 別 橋	m	1	2	3	4	5	備 考
		0.31~0.33					
天草2号橋	理 論 値	0.381	0.322	0.1550	0.1040	—	$e=194.3$ (cm)
	実 測 値	0.31~0.33					
	集 中 Mass 法	0.383	0.333	0.1760	0.1280	—	
二軒橋	理 論 値	1.05	1.41	0.5950	0.4140	0.2370	$e=210.2$ (cm)
	実 測 値	—	—	—	—	—	
泰 平 橋	弾 性 理 論	1.419	1.560	0.6764	0.4455	0.2564	$H_0=302.4$ (ton)
	たわみ 度理論	1.398	1.480	0.6576	0.4358	—	
	実 測 値	—	—	0.6670	—	—	
	比 (%)	—	—	101	—	—	
泰 平 橋	理 論 値	0.446	0.859	0.3200	—	—	
	実 測 値	0.354	0.600	0.2100	—	—	
	比 (%)	79.5	70.5	66.0	—	—	

注: 二軒橋における実測値との比較にはたわみ度理論による値を使用。

図--12

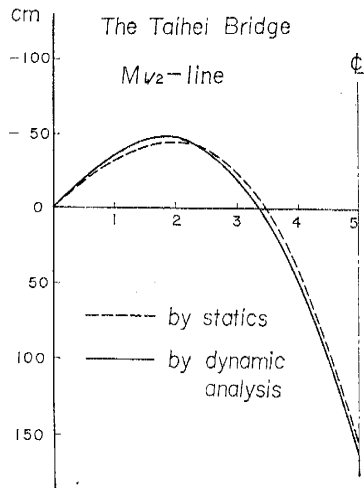
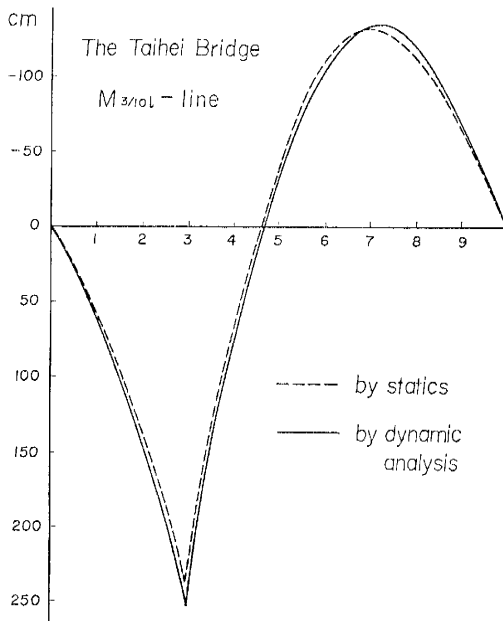


図--13



あるときの適合条件式、結合法による振動数と振動モードの理論のべ、数値計算の結果について記したが、振動数・振動モードの解析はエネルギー法においても可能なのである。筆者らは結合法、エネルギー法の2つの方法で6.の諸橋について動的数値計算を行なったが、両者の結果はよく一致するけれども結合法によるほうが計算が容易なことを経験している。とくに補剛トラスをもつ場合に計算労力が少ない。その計算に用いたエネルギー法についてここで簡単に触れたいと思う。これらの式の中には、従来発表されてない式もあるし、従来発表された式と多少相違する式もあるし、また別の方向から筆者らが導いた式が従来の式と一致するものもあるか

ら、これらのことについて簡単にのべたいからである。

(1) 適合条件式について

この式は結合法・エネルギー法にはまったく無関係で、エネルギー法にもそのまま適用できることは前報においても知られるとおりである。ただ、ランガー桁と同様にして導いたつり橋における式(28b)の内容は、BleichのCable Equation⁹⁾とまったく同じものとなっていることを付言しておきたい。

(2) ランガー トラスについて

ランガートラスの自由振動時の最大位置エネルギー(V_{max})は前報と同様に

$$V_{max} = V_a + V_g + V_{gM}$$

として表わされるが、トラスの桁への新換算法を用いれば、

$$V_M = \frac{\pi^4 E}{4 L^8} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 I_{gn}$$

となる。 I_{gn} については2.においてのべたが、一般に I_{gn} は n の次数によって一定でないため Σ の中に入っている。このことと適合条件式が式(7)のようになることが前論文と異なる。振動数方程式・正規化モードについては省略する。表-5のうち幌別橋の、文献⁹⁾による1次の固有周期⁹⁾は $T_1=0.322$ secである。これに対して、筆者らの式では $T_1=0.381$, $T_2=0.322$, また筆者らが集中Mass法を本橋に適用し自由度7の振動系として解いた結果は表-5に併記したように $T_1=0.383$, $T_2=0.333$ である。幌別橋の実験では $T=0.31\sim 0.33$ secが観測されている⁹⁾。前報においても示したように安部理論では振動数が筆者らのものより高く出る傾向にある。

(3) ローゼ桁について

ローゼ桁は4.(2)でのべたように $(I_{a0}+I_g)$ と等価な補剛桁をもつランガー桁とまったく同様に解析すればよいわけである。筆者らの適合条件式の内容およびエネルギー式の内容は、文献⁹⁾の解と多少相違する。

(4) つり橋について

適合条件式と称している式(28b)の内容は、BleichのCable Equationとまったく同じ内容のものであることは前述のとおりである。したがってこれ以下の解析をエネルギー法で進めればBleichの式⁹⁾と同じこととなる。

以上でエネルギー法に関する記述を終えたいが、上記6.の諸橋については、エネルギー法によっても数値計算が行なわれ、その結果は結合法によるそれと一致していることを付言する。

8. 結 論

ここにのべた解析理論は、筆者らがききに「ランガー桁の動的解析」(アーチと補剛桁端とで偏心結合のない場合)において提案した理論を、偏心量のある場合に発

展させ、これに補剛トラスの桁への新しい換算法を組み合わせてランガー トラスの動的解析を可能にし、さらにローゼ橋・タイド アーチ橋・2 ヒンジ リブ アーチ橋などのアーチ橋梁およびつり橋の振動問題を共通して解析できるようにしたものであり、おもに結合法についてのべ、エネルギー法についても記した。またつり橋については、線形化したたわみ度理論における動的解析法をも記述したが、同様の解析手法が補剛アーチ橋にも適用できよう。

この理論はランガー桁・補剛桁をもつつり橋では、最初にのべた仮定以外には何ら近似を行っていないので厳密解となるが、補剛トラスをもつ場合にはこれを桁に換算しているのが近似解となる。数値計算によれば、中小支間の補剛トラスの換算断面2次モーメント I_{gn} は振動変形に応じて大きく変化することが知られた。表—3よりわかるように、この傾向はスパンの小さい場合特にいちじるしくなり、幌別橋 ($l=64.0\text{m}$) の場合、 I_{g2} と従来の換算法による I_r との比は $I_{gn}/I_r=0.68$ となる。表のように n の次数が増加するにつれて I_{gn} が減少するのは、補剛トラスの斜材の変長と弦材応力の不連続性が原因するものと思われるが、これらは固有振動数にも当然影響を与えるものである。逆対称振動(弾性理論)の時には、アーチはまったく作用しないから、幌別橋の2次の固有振動数は従来の換算法による場合と比較して、約20%相違することになる。また、新しい換算断面2次モーメントを用いて $l/2$ 点のたわみの影響係数を動的定数を使って求めると、トラスの静力学的的方法による解とよく一致する(表—4)から、この換算法の妥当なことがよく理解できると思う。ここにのべた解析理論の厳密性を総括して検べるために、動的レスポンスの特別の場合として静的レスポンス(たわみ・曲げモーメントの影響係数)を6.の諸橋について求めたところ良好な結果が得られた。補剛トラスを表—4において示す程度の精度において桁に換算することができなければ、静的レスポンスによって固有振動数・振動モードの正しいことを検討することはできないと思う。図—10~13からわかるように、動的解析より求めた静的レスポンスと従来の静力学的解法によって求めた値とはかなりよく一致している。もっとも補剛トラスでは弦材・斜材が格間によって変化する変断面構造であり、その変断面の程度も橋梁によってはかなり大きく変化するものである(断面は同種の材で2倍以上変化することがある)から、上に示した結果をもって直接この解析法の精度と断定することはできないが、本法によって得られる値の精度に対する一応の目安は示されたといつてよいと思う。これらの解析は結合法およびエネルギー法によって計算され両者はよく一致した。

従来の研究では、理論的に求めた固有振動数を実測値

と比較することにより、その理論の妥当なことを示す方法がよく採られて来た。実在橋は一般に理論で取り扱う仮定よりも剛にできているために(たとえば静的試験を行なっても実測値と理論値とのたわみ比は70%前後であることが多い)、実測値は解析理論の前提となる仮定以外の要素をふくむものであるから、実験値との比較によって理論を証明するだけでは適当でないように思われる。事実、秦平橋の場合、固有周期の実測値と理論値との間には30%前後の大きな相違が見られるにもかかわらず、理論的に求めた曲げモーメントの影響線には数%程度の誤差しか見られない(図—12, 13)。本橋の場合実験値との比較だけでは理論の妥当性を論じることではできない。このような橋に対してはこの論文の最初に設けた仮定以外の要素の検討を必要とすることになる。

ランガー橋・ローゼ橋・つり橋はもともとはりをアーチまたはケーブルで補強する意味ではまったく同種のものであるにもかかわらず、これらを共通的に解析しようとした研究はなかったようである。ランガー橋・ローゼ橋の固有振動数・振動モードの解析はこれまで Ritz のエネルギー法または集中 Mass の方法などによって試みられてきたが、それらのすべての理論が必ずしも正しかったとはいえない。このために筆者らによるエネルギー法についても抄記したが、これらは主題の諸形式橋にそのまま適用できる。しかしエネルギー法では精算値を得ようとすれば、行列の次数が増加して数値計算に手数を要すること、特に補剛トラスの換算断面2次モーメントが次数 n によって異なるときはさらに計算労力が増えることを筆者らは経験している。またその得られた結果の精度の吟味も容易に行なうことができない。これに対してここで主としてのべた結合法はつぎの特長をもっている。

(1) 式(21), (23)あるいは式(32), (33)に示されるように固有振動数・振動モードともに級数の計算より求めることができ、級数の項数を増加させるだけでいくらでも精度をよくすることができる。

(2) 得られた結果の精度を吟味するには、その値を原式すなわち式(21), (23)あるいは式(32), (33)に代入して数値計算に使用した項のつぎの項がどの程度の大きさを持つものであるかを検討すれば、その精度がただちに吟味できる。

(3) 級数の収束性はよいから、3~5項程度の級数項の計算を行えば実用的には十分の精算値が得られ、項数をさらに少なくすればきわめて容易に略算値が得られる。

この結合法は、補剛桁とアーチ(またはケーブル)との変形と荷重との関係より直接基礎式を誘導する方法であって、エネルギー法とは対照的である。

つり橋の場合に、Center diagonal stay の影響を考

える必要のある場合についても、同様に基礎式の誘導ができよう。またこの論文で扱ったつり橋は、側径間無載荷のものであったが、しからざる場合にも容易にこの解析法が適用できることは理解されると思う。

この論文では鉛直振動の固有振動数と振動モードの解析法とその精度についてのべたが、これらの動的定数が求まればその動的レスポンスはただちに求めることができるわけで、その方法については前報と重複するから記述を省略した。

この論文の数値計算に協力された平島健一、増見豊彦、田中康男、内山修三、安藤雅成、曾我部泰良の諸君ならびにこの研究にご厚意を寄せられた日本道路公団天草架橋工事事務所 栗原利栄所長および建設省土木研究所構造研究室の方々に謝意を表わす。

文献の注

- 1) Bleich, F外: The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, U.S. Government Printing Office, Washington, 1950
- 2) 安部: ランガー橋の振動に関する研究, 土木学会論文集第14号, 昭27. 9.
- 3) 山崎: ローゼ桁の固有周期について, 土木学会第13回年次学術講演会, 昭33. 5.
- 4) 吉村・平井: ランガー桁の動的解析, 土木学会論文集第101号, 昭39. 1.
- 5) 平井: 種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用, 土木学会論文集第90号, 昭38. 2.
- 6) 平井: 結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析, 土木学会論文集第104号, 昭39. 4.
- 7) 猪瀬: ランガー橋設計法, 森北出版, 昭30.11.
- 8) Timoshenko: Vibration Problems in Engineering, Van Nostrand.

後記: この論文の投稿のあと、論文集編集委員会から、つり橋の線形化したたわみ度理論における本論文の式(32)については、結果的に同じ形の式が、D.B. Steinman の論文 (J. Franklin Institute, Sept. 1959) にあるとの教示をうけた。もちろん筆者らの研究は Steinman とは独立に展開されたものであり、式の誘導・理論の進め方も根本的に相違する。つり橋における本論文の式(32)は、Steinman の式よりも内容的に広義につくられているものの、彼の式と類似の式であるためにいくらかその新鮮味を損じることになるが、Steinman が常時つり橋の実際の設計に使用していると称するこの種の式が筆者らによって別に誘導されたこと、およびこの種の式が補剛アーチ橋とつり橋の動的共通解として適用できることが知られたことは、少なくともアーチ系橋梁の動的解析には新しい有用で価値ある研究であり、またこの理論の進め方が正しいものであることを示すものと考え。貴重な教示を与えられた編集委員会に謝意を表したい。

(1964. 4. 1・受付)