

鋼薄肉矩形断面のねじれ実験および理論的検討

SHEARING STRENGTH OF STEEL PLATES UNDER TORSION OF BOX-GIRDERS

島田 静 雄*

By Shizuo Shimada

要 旨 SS 41 と SM 50 A の二種の鋼種で、板厚 6.4 mm、幅 21 cm、高さ 21~66 cm、長さ 175 cm の閉じた矩形断面を溶接で作し、これに純ねじりを加えて耐荷トルクを実験で求めた。耐荷トルクは鋼板のせん断応力度が降伏点に達したときに生じ、SS 41/SM 50 で $\tau_y = 1450/2280 \text{ kg/cm}^2$ を得た。板幅が大きくなると破壊は板の局部座屈で生じた。座屈を生ずる限界の板厚・板幅比は SS 41/SM 50 でそれぞれ $b/t = 72, 58$ である。鋼材のせん断剛性係数は SS 41/SM 50 で、それぞれ $8.0/8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ を得た。見掛けのねじれ剛度は、計算値に対して約 6~9% 大きい。

理論的な検討は、見掛けのねじれ剛度という立場と、板の拘束縁における局部応力の二通りの立場から検討し、実験値との数値的な比較を試みた。

1. 序 説

(1) 問題点の提起

鋼構造物の部材(柱またははり)は、特殊な型鋼を使う場合を除いて、大抵は鋼の薄板を溶接してつくる。普通構造用軟鋼 SS 41 にくらべて強度の大きい溶接性高張力鋼、たとえば SM 50 を使った部材では同じ断面で大きい耐荷力を持ちうるし、同じ耐荷力を持たせるならば、断面により経済的なものを採用しよう。

部材を構成する薄板は、部材が外力に対して耐える極限の耐荷力に達する前に、局部座屈をしないように板幅にある制限を設けて設計するが、これは高張力鋼ほどきびしく考える必要がある。板厚にくらべて板幅を広く取れる断面構成の中でも、閉じた矩形断面は種々の点で性能が良いので使用される頻度も増えているが、最近閉じた矩形断面にすることで、ねじれ剛性がいちじるしく大きくなる性質を積極的に利用するようになってきた。

構造要素の中でも、部材は柱やはりのように圧縮材や曲げ部材として使われることが多く、ねじり部材としての使われ方は比較的少ない。これは、機械要素のように単純なねじりだけの問題として扱えないことに理由があって、構造物という大きな単位でねじれを考えなければならないこと、ねじれ剛性を考えない構造要素を組み合わせても構造物の構成ができるという理由にもよって

いる。

構造物の解析には、最近ねじれの考慮が重要になってきているが、箱橋程度の寸法のものから部材に至るまで、曲げ・圧縮または引張りと一緒に合わせたねじれが設計上の重要な課題となりつつある。ねじれに関連した問題には種々あるが、一応問題点を3つにしぼって検討するのが便利であろう。

第1は材質的な差異に関するものである。著者はさしあたり鋼材だけについて研究するが、弾性定数・降伏点・塑性的挙動等はねじれに相当の影響がある。たとえば、せん断弾性定数 G は鋼種ごとにかかなり差が認められる。これは、同じ断面構成でも鋼種が異なればねじれ剛性に差を生じる。

第2は部材の構成をいかに設計するかである。最初に触れたように、板の局部座屈と関連して板厚と板幅との合理的な寸法が決められなければならない。開いた薄肉断面では、ねじれ変形が大きい割合に、作用するせん断応力は小さいから、ねじれ部材としての対象は閉じた矩形断面で考えるのが良いであろう。

第3は、ねじれ部材の応力と変形との解析についての再検討である。ねじれに関する理論や仮説には諸説あるが、理論に忠実な取り扱いと、設計という実用的な取りきめとのつりあいをどのように処理するかである。

以上の3点に関して著者の行なった理論的および実験的手法はつきに示すような根拠に立っている。

(2) 解析に考えるモデルの選定

著者は1960年頃から、橋梁部材のねじれに関して模範的な実験を行ってきた。初期の実験は粗末なものであり、データは散発的で有意とは認めがたいが、1.(1)にのべた問題点を煮つめるには効果があった。この経験から、閉じた矩形断面の部材をねじるという実験が理論にも乗せやすく、また得られるデータの有用性が多いという判断に落ち着いた。

図-1に示すように鋼薄板を溶接して作った矩形断面の両端に端板をつけ、一端を回転拘束とし、他端をシャフトを介して、カンチレバー状のアーム端に作用させるジャッキでトルクを与える実験的手法は、原理的には簡単でも、二、三の点で疑点を残した。一つは、端支点でそり拘束の条件が不明確になること、純トルクのみなら

* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

ず、いくぶん、曲げが入る危険のあることなどである。しかし、閉じた矩形断面は、そりの影響が小であること、ねじれ剛性が大きいことと、拘束支点では曲げの抵抗性が低いことから実際問題として拘束支点の影響を無視することができる。ただし、開いた断面のねじれを実験したときは、この実験手法は賢明ではなかった。

何よりも、閉じた矩形断面では、ねじれ変形が小であり、薄板に純粋のせん断応力の場合ができるということに魅力を感じた。

ねじれを作用させる機構についても、両端で拘束支持され、中央にトルクを加えるという機構も考えられなかつた。この載荷方法は、純トルクを作用させる装置に多額の費用がかかるし、試験部材の長さも2倍要することを考えると実験手法としては図-1のほうがまさらと考えられた。同時に試験部材の長さをどの程度におさめるべきかも重要な命題であるが、閉じた矩形断面ではそり拘束の影響が小さいことを考えて、かなり短いもので十分であろうと判断された。

理論解析に考えるモデルは、種々の境界条件における矩形板の二次元弾性問題として理想化した。左右の縁でそりを拘束され、上下の縁で接続条件を吟味するという扱いは、同じ寸法の矩形板で両端をそり自由とし、左右の中央に対して対称となるような荷重の作用と本質的に差はない。

ねじれ問題で慣用されるせん断流理論および、これに関連する曲げねじれ剛性等の解釈は、部材を構成する薄板の応力分布に対しては適当ではない。この不適当であることの最大の理由は、薄板の応力とひずみに対する適合条件式が満足されていないことによるのであって、板の応力分布に関しては二次元の弾性問題として扱うのが本筋であると考えられるからである。

そり拘束による応力は、単純な考えにもとづいた応力や変形に対して二次的に生ずるもの、かつ、局所的なものと考えられるから、サンブナンの原理より局所的な部分だけを検討すれば足りる。シアラグの問題、もしくは有効幅の考えなどでは、本来局所的に検討してしかるべき扱いが構造物全体の寸法や荷重条件等に左右されるようにまとめられているのはいたずらに問題を複雑化しているように思われる。

著者の扱った矩形板の理論的モデルは、さしあたり有限の長さの矩形板として解き、長さが無限に大きくなった場合の極限として、拘束縁付近の応力分布がどの程度まで影響があるかという見地から眺めることにした。

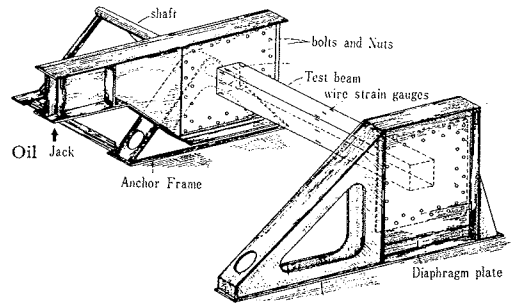
実験のデータから、新たに実験的にも理論的にも改めて検討すべき事項が数多く派生したが、この報文ではできるだけ実験の生の素材を報告して諸賢のご検討を仰ぎたいものと思っている。

2. 鋼薄肉矩形断面のねじり試験とその結果

(1) 実験方法

実験の方法は図-1に示すように簡単な載荷方法であり、応力は抵抗線ひずみ計、回転角はダイヤルゲージを対に使って測定した。

図-1 Equipment for Torque-torsion Test.



試験体は板厚平均 6.4 mm の鋼板を外形寸法 $b_1=210$ mm, $b_2=210\sim 660$ mm に溶接して作った長さ 1.75 m の桁であり、両端部は $760\times 760\times 10$ mm の端板が溶接されている。この端板は $\phi 24$ mm のボルト 30~36 個で載荷フレームに取付けられるようになっている。鋼の材質は SS 41 と SM 50 の 2 種であり、SS 材のほうが板幅・板厚比 (b/t) の大きい断面まで実験するようにしてある。試験体の詳細は表-1 および図-2 に示す。

載荷フレームは固定側と回転側とあり、試験体の端板

表-1 Sectional Features of Test beams.

Beam No.	b_2 cm	$K^{(2)}$ cm ⁴	$C^{(2)}$ cm ⁶	$\tau^{(3)}$ kg/cm ²	$b_2/t^{(4)}$
		$\times 10^4$	$\times 10^6$		
1-S 1-A	21	0.540		188.47	33
2-S 2-A	24	0.662	0.00124	164.26	38
3-S 3-A	27	0.789	0.00592	145.57	42
4-S 4-A	30	0.920	0.0155	130.69	47
5-S 5-A	33	1.053	0.0316	118.58	52
6-S 6-A	36	1.191	0.0558	108.52	56
7-S 7-A	39	1.330	0.0898	100.03	61
8-S 8-A	42	1.471	0.1351	92.78	66
9-S 9-A	45	1.613	0.1936	86.50	70
10-S 10-A	48	1.757	0.2669	81.02	75
11-S 11-A	51	1.903	0.3568	76.20	80
12-A	53.5	2.025	0.4456	72.59	84
13-S	54	2.049	0.4649	71.91	84
14-S 14-A	57	2.197	0.5931	68.08	89
15-S	60	2.345	0.7431	64.64	94
16-S	63	2.494	0.9167	61.53	99
17-S	66	2.644	1.1156	58.71	103

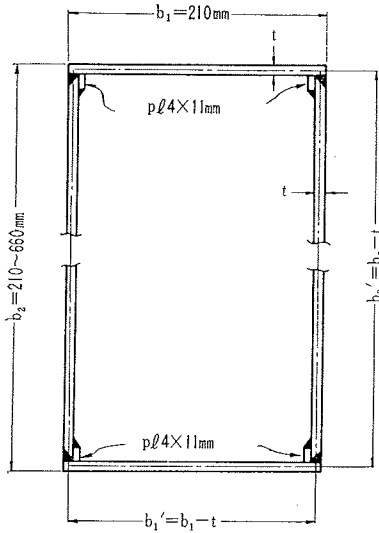
Remarks 1) "S" denotes Structural Steel SS 41, "A" SM 50-A.

2) Mean depth of Plates, $t=6.4$ mm is used in calculation,

3) Shearing Stress by $M_T=1$ t.m= 10^6 kg-cm

4) Length of beam 1.75 m

図-2 Section of Test Beam.



Moment Inertia K for Torsion,

$$K = \frac{2(b_1' \cdot b_2')^2 t}{t(b_1' \cdot b_2')} \quad (\text{cm}^4)$$

Warping Coefficient C ,

$$C = \frac{K}{48} (b_2' - b_1')^2 \quad (\text{cm}^6)$$

Shearing Stress τ by Torque M^t

$$\tau = \frac{M^t}{2 b_1' b_2' t} \quad (\text{kg/cm}^2)$$

表-2 材料試験結果

Specimen	yield point (kg/mm ²)	ultimate strgth. (kg/mm ²)	elongation (%)	Poisson's ratio	Young's Modulus ×10 ⁸ (kg/mm ²)	thickness (mm)
SS 41- 1	30.93	45.02	28.7	0.288	2.087	6.1
2	30.90	44.32	34.0	0.283	2.050	6.3
3	29.89	43.17	28.3	0.307	2.250	6.5
4	29.40	42.30	28.3	0.335	2.270	6.5
5	28.70	—	30.5	0.339	2.250	6.0
6	29.20	43.40	28.8	0.318	2.230	6.4
7	30.60	45.50	31.0	0.265	2.090	6.3
8	30.70	44.30	31.8	0.300	2.180	6.5
9	29.70	44.10	31.4	0.345	2.520	6.3
10	31.22	45.90	24.1	0.268	2.070	6.5
11	29.90	45.05	32.5	0.243	1.960	6.5
13	30.50	44.70	29.8	0.286	2.210	6.1
14	30.40	43.90	31.5	0.263	2.160	6.0
15	31.40	45.50	31.4	0.293	2.060	6.3
16	31.60	46.00	31.2	0.294	2.150	6.3
17	29.90	42.50	23.5	0.304	2.090	6.5
SM 50-1A	43.17	57.60	24.2	0.321	2.320	6.5
2A	42.20	56.40	24.9	0.370	2.140	6.3
3A	45.21	59.04	25.0	0.275	2.240	6.3
4A	—	59.62	23.0	0.276	2.280	6.3
5A	44.60	58.75	23.2	0.264	2.150	6.3
6A	45.90	60.10	23.5	0.392	2.200	6.3
7A	43.60	57.40	23.8	0.340	2.180	6.4
8A	41.50	58.30	22.7	0.326	2.372	6.4
9A	42.70	57.40	24.1	0.276	2.040	6.3
10A	44.20	57.25	24.0	0.244	2.200	6.4
11A	45.90	59.00	24.3	0.307	2.330	6.5
12A	45.55	59.20	24.0	0.364	2.120	6.4
14A	43.30	57.50	24.7	0.381	2.160	6.4

の取つく 10 mm 板厚の板をフランジで補剛してある。回転側の板(ダイヤフラム)は中央に φ101 mm の穴があけてあって、外径 100 mm の水平シャフトが通り、このシャフト回りに回転が自由になっている。回転側のダイヤフラムはシャフトの中心から 1.5 m の長さで張り出した片持ばりになっていて、片持ばりの端にオイルジャッキで上向きに荷重を作用させて試験体に純トルクを与えるようにしてある。したがって、シャフトには上向きの力が作用するので、この反力を取るシャフトを固定するフレームはボルトを介して試験室の基礎に固定されている。

回転側の機構は強度的に不十分であったので実験の実際においては別のフレームを作って回転ダイヤフラムを抑える処置が必要であった。

固定端側のフレームも試験室の基礎にボルトで固定されたが、東京大学大型構造物試験室にある試験台は床面に 1 m 方眼で φ51 mm のボルトのタップが設けてあるので、トルクにともなう上揚力を取るのに便利であった。

使用された鋼材の機械的性質は試験の終わった試験体から一号試験片を切り出して使い、ロゼットゲージを併用してヤング率とポアソン比の測定を行なった。結果は表-2 に示した。

(2) 極限耐荷トルク

耐荷トルクは表-3 に一括して示した。当然のことであるが SM 50 A を使用した試験体は SS 41 を使用したものよりも耐荷トルクが大きい。ここでいう耐荷トルクは、これ以上トルクを増大しようとしてもねじれ変形が増加するだけでトルクが上がらなくなった最大の状態で与えた。

矩形断面を形造る鋼板の板厚 t と板幅 b との比 b/t の

表-3 Ultimate Torsional Moments and Shearing Stress

SS 41			SM 50-A		
Beam No.	M^t (t·m)	τ (kg/cm ²)	Beam No.	M^t (t·m)	τ (kg/cm ²)
1-S	>4.5	>850	1-A	12.0	2260
2-S	8.5	1400	2-A	13.7	2250
3-S	9.4	1370	3-A	16.1	2340
4-S	11.0	1430	4-A	16.9	2210
5-S	13.0	1540	5-A	19.5	2320
6-S	13.5	1460	6-A	21.2	2300
7-S	14.4	1440	7-A	22.4	2240
8-S	16.0	1490	8-A	21.6	2000
9-S	17.5	1510	9-A	22.4	1940
10-S	15.0	1220	10-A	22.8	1850
11-S	19.0	1450	11-A	21.9	1670
12-S	—	—	12-A	21.7	1580
13-S	17.2	1240	13-A	—	—
14-S	17.3	1180	14-A	22.4	1520
15-S	18.2	1180			
16-S	17.4	1070			
17-S	17.5	1030			

小さい間は、耐荷トルクが鋼板のせん断応力度 τ の降伏点で定まるが、 b/t が大きくなると鋼板のせん断座屈によって定まる。この限界は SS 41 で $b/t=75$, SM 50 A では $b/t=55$ 付近にある(図-4)。

表-3 の耐荷トルクで興味のある性質は、SS 41 で No. 13・S~17・S の試験体では實際上耐荷トルクが 17.5 t-m でほぼ一定値、SM 50 A では No. 6 A~14 A の試験体で 22 t-m でほぼ一定値を示している。これらの試験体は共通して鋼板のせん断座屈で耐荷トルクが定まっている。この性質が b/t の大きい範囲まで成立するかどうかを断定するには今回だけのデータでは不十分であるが、矩形断面を使う場合、ねじれに対する耐荷トルクを上げるのに矩形断面の幅と高さを大きくしても効果がないというのは興味がある。したがって、今回の試験体についていえば No. 9 S, No. 7 A の断面が耐荷トルクに関するかぎり最も能率の良い断面といえる。

(3) ねじれ剛性

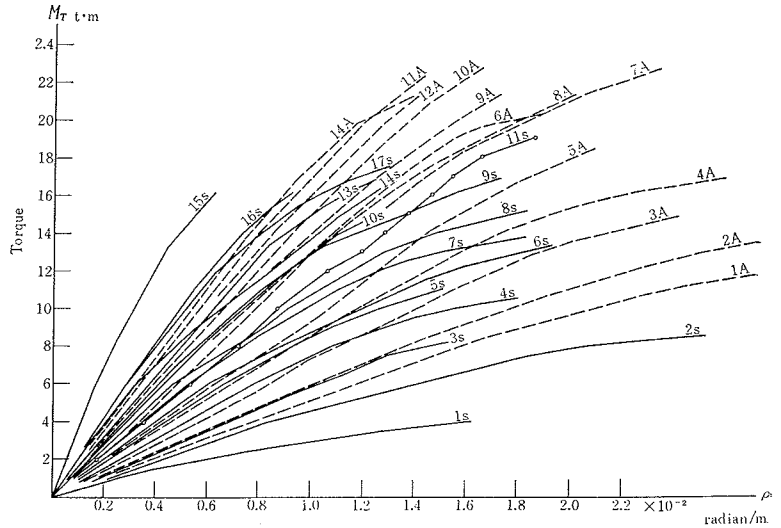
試験体の両端で測定した部材の相対ねじれ角から長さ 1.75 m の部材の平均のねじれ率 ρ を計算し、これと作用させたトルク M^T との関係を図示すると図-3 のようになる。応力・ひずみ曲線と相似と考えた $M^T-\rho$ 曲線の勾配は平均のねじれ剛性になるが、この勾配は作用するトルクによって変わる。一応この勾配を与えるのに平均のせん断剛性係数を G_2 として

$$G_2 = \frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta M^T}{\Delta \rho} \dots\dots\dots(2-1)$$

で計算した結果で判断することにして表-4 に一括して示した。 $M^T-\rho$ 曲線は最初かなりの直線性があるが、途中からそれる。したがって G_2 の値もたとえば $7.75 \sim 5.10 \times 10^5$ のように記入してある。

$M^T-\rho$ 曲線の性質については試験体によって 2 種類の傾向がある。1 つは、あるトルクの値まで $M^T-\rho$ に直線関係があり、それ以上になると滑らかな曲線を描いて $\rho \rightarrow \infty$ に移行するものと、他の 1 つはねじれ率が途中で階段状に変化し、 $M^T-\rho$ 曲線が折線状に変化する。前者の傾向は常識的であるが、後者の挙動は実験結果としてはかんばしくない。後者の挙動が SS 41 の試験体に多く観察され、また $M^T-\rho$ 曲線の勾配の変わる付近で、ストレインゲージの示すひずみも不規則性がある。また特に板の縁に近いゲージに大きな変化が見られることを考え合わせると、おそらく鋼の溶接部が強度的に弱く、

図-3 Torque-Torsion Relation of Thin steel closed section.



すべりが早くから生じることに原因がありそうである。No. 1 S, No. 11 S は、この意味で試験体の溶接が不十分であったかも知れない。

試験体のねじれ剛性を計算値と比較するには式(1)で求めた G_2 の値(表-4)を鋼材のせん断弾性定数の値と比較することで得られる。SS 41 の試験体においては $G_2=9.2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ が平均の値である。鋼材のせん断弾性定数の値は後に説明するが、SS 41 に対して $G=8.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, SM 50 A では $G=8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ が妥当な値であるが、これを使って比較すると、ねじれ剛性の実験値は、理論値よりも SS 材に対して約 6%, SM 材に対して約 9% 大きい。見掛けのねじれ剛度はサンパンのねじれ剛性のほかに曲げねじり剛度の影響があるわけであるが、この実験結果だけでは曲げねじり剛度の影響が見掛けのねじれ剛性の増加に寄与していると結論できる結果ではないが、傾向としては認められる。

図-3 の $M^T-\rho$ 曲線からわかるように同じ断面寸法の試験体でも SM 50 A の鋼種のそれは見掛けのねじれ剛性が相対的に大きい。

(4) せん断強度

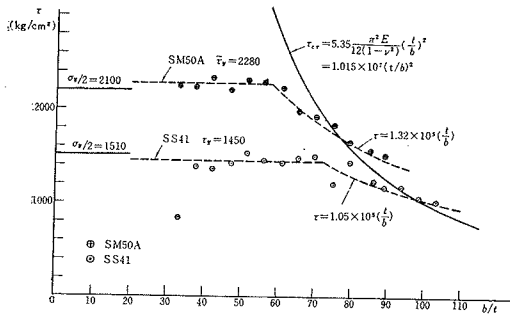
鋼板が局部座屈を起こさないかぎり矩形断面の試験体のトルクによる破壊は、鋼板のせん断応力度が降伏点に達したときに生ずる。SS 41, SM 50 A のせん断応力度の降伏点は表-3 ならびに図-4 に示すとおり $\tau_y=1450 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_y=2280 \text{ kg/cm}^2$ の平均値が得られた。この強度は、鋼板に純粋のせん断応力が作用したときの値と考えて良いであろう。他方、鋼材の一号試験片による降伏応力度は SS 41 と SM 50 A について、それぞれ $\sigma=3160 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma=4280 \text{ kg/cm}^2$ が得られた。 σ_y と τ_y の関連については種々の説があるが、最大ひずみエネルギー一定説によれば

表—4 Shearing Modulus of Elasticity G ($\times 10^8 \text{kg/cm}^2$)

Beam No.	SS 41		Beam No.	SM 50-A	
	G_1	G_2		G_1	G_2
	Measured by wire strain gauge 1)	Measured by Angular change 2)		Measured by wire strain gauge 1)	Measured by Angular change 2)
1-S	7.30±0.4	7.75~5.10	1-A	7.90±0.4	12.29~7.59
2-S	7.80±0.7	7.06	2-A	8.50±0.3	8.95~6.70
3-S	7.40±0.5	7.35	3-A	8.41±0.6	9.11~4.64
4-S	7.60±0.4	8.39	4-A	7.90±0.8	9.70~8.78
5-S	8.00±0.4	8.51	5-A	8.95±1.0	9.11
6-S	8.40±0.6	8.52~5.55	6-A	8.10±1.0	10.62
7-S	8.00±0.4	8.62~6.31	7-A	8.80±1.0	9.00
8-S	8.10±0.5	8.69~6.89	8-A	8.20±1.50	9.20
9-S	8.20±0.3	8.45~3.26	9-A	8.00±0.50	9.24
10-S	8.60±0.6	8.27	10-A	8.70±1.0	8.58
11-S	8.40±0.3	5.82	11-A	8.40±1.0	9.28
12-S			12-A	8.40±1.5	8.35
13-S	7.50±1.5	7.77	13-A		
14-S	8.20±0.5	8.86~4.86	14-A	8.50±1.1	8.48
15-S	8.80±0.5	15.60~11.02 ~6.50			
16-S	7.00±2.0	8.30			
17-S	7.10±0.6	7.95			

- 1) From the mean Strain $\bar{\epsilon}$ and theoretical τ . $G = \tau/2\bar{\epsilon}$, where gauges are of rosette 45° deviated from the axes of beam on the Surface of steel Plate.
- 2) From the measured Angular change $G = (\Delta M^T / \Delta \varphi) / K \cdot l$

図—4 Ultimate strength of Steel Plate under shearing stress.



$$\tau_y = \sigma_y / \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots(2-2)$$

最大せん断応力度説によれば

$$\tau_y = \sigma_y / 2 \quad \dots\dots\dots(2-3)$$

になるといわれているが、今回の実験で関するかぎり、平均として

$$\left. \begin{array}{l} \text{SS 41,} \quad \tau_y = \sigma_y / 2.18 \\ \text{SM 50 A,} \quad \tau_y = \sigma_y / 1.88 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(2-4)$$

となった。

板厚と板幅との比 (b/t) が大きくなると試験体は鋼板の局部座屈で破壊するが、すでにのべたように耐荷トルクが矩形断面の大小にかかわらず一定値となっている。SS 材で $M^T = 17.5 \text{ t}\cdot\text{m}$, SM 材で $M^T = 22.0 \text{ t}\cdot\text{m}$ となっていることを使って求めたせん断座屈の実験式は

$$\left. \begin{array}{l} \text{SS 41,} \quad \tau = 1.05 \times 10^9 (t/b) \quad b/t > 72 \\ \text{SM 50 A,} \quad \tau = 1.32 \times 10^9 (t/b) \quad b/t > 58 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(2-5)$$

図—4 はこの関係を図示したものである。比較のため

に両端で単純に支持された無限に長い鋼板がせん断座屈するときの理論式を図示した。二種の鋼種の差は、単なるせん断弾性定数の差だけでは説明できない開きが認められる。

(5) せん断弾性定数 G とポアソン比 ν

試験体の鋼板の応力分布を測定する意味でストレインゲージのロゼットが使用された。この位置は図—1に模式的に示したように回転側の板端付近と、部材長のちょうど中央付近とにそれぞれ6カ所ある。ロゼット 45° の方向の成分は部材軸に対して 45° の主引張応力方向を向いていて、このひずみ ϵ は、せん断応力度 τ と

$$\epsilon = \frac{(1+\nu)}{E} \tau \quad \dots\dots\dots(2-6)$$

の関係になるから、計算で求めた τ と測定されたひずみとから

$$G_1 = \tau/2\epsilon \quad \dots\dots\dots(2-7)$$

の関係でせん断弾性定数が求められる。式(7)で求めた G_1 を表—4 に示して、先の G_2 と比較させてある。

計 12 カ所で測定されたひずみはトルクに対して非常に良い直線性を示し、ひずみのトルクに対する増加量も揃っていて、鋼板が平均して純粋のせん断応力度の場になっていることを確認できた。ひずみの直線性が悪くなるのは主に矩形断面の隅角部に顕著であり、SS 材の試験体に多い。このことから判断して SS 材の試験体では溶接部の強度が若干母材より劣るのではないかと考えられた。

先にのべたが、ひずみの直線性が悪くなると $M^T-\rho$ 曲線も直線性が悪くなる。 G_1 と G_2 とを比較すると、一般に $G_1 < G_2$ である。このことは、ねじれ角は板の曲

げの影響や軸応力度の影響が入ってくるので、見掛けの G_2 が大きいのは想像できることである。したがって、鋼材のせん断弾性定数を判断するには G_1 のほうを探るのが適当と思われる。使用された試験体の板厚にいくぶん誤差があることを考えても、せん断弾性係数は SS 41 に対して平均値 $G=8.0 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ 、SM 50 A に対して平均値 $G=8.4 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ が得られた。

一方、表-2 に示すように、一号試験片による強度試験からヤング率とポアソン比は求められているが、このデータはヤング率の値が常識的な値より大きい。この解釈であるが、一号試験片では板厚にくらべて板幅が大きいことから、見掛けのヤング率が $E/(1-\nu^2)$ に近い値を出したものと想像される。鋼種の違いに関係なく $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ としてポアソン比を逆算し、 $E/(1-\nu^2)$ を求めるとつぎの値となり、表-2 の傾向をいくぶん説明することができる。

	E	G	ν	$E/(1-\nu^2)$
SS 41	2.1×10^6	8.0×10^5	0.31	2.32×10^6
SM 50 A		8.4×10^5	0.25	2.24×10^6

(6) 今後の実験のためのあとがき

矩形断面にしてねじるという実験手法は、たびたび説明したように、薄板に純粋のせん断応力の場合ができるということの魅力である。このデータは、一種類の鋼種について b/t を種々に変えて実験しなければ具体的にま

写真-3 トルク載荷のためのオイルジャッキおよびロードセル読み取りメーター

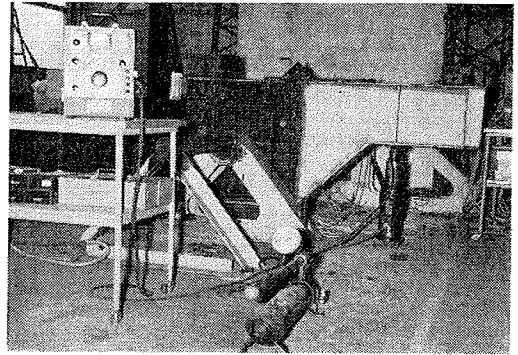


写真-4 ロードセルおよびオイルジャッキ

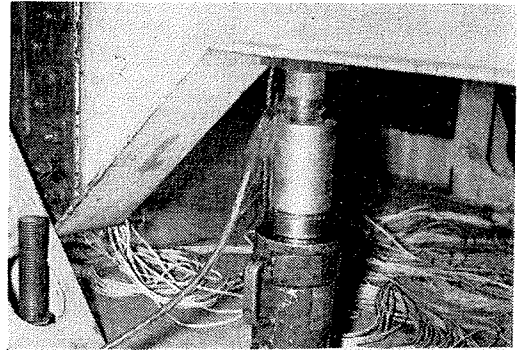


写真-1 ねじれ試験体載荷状態

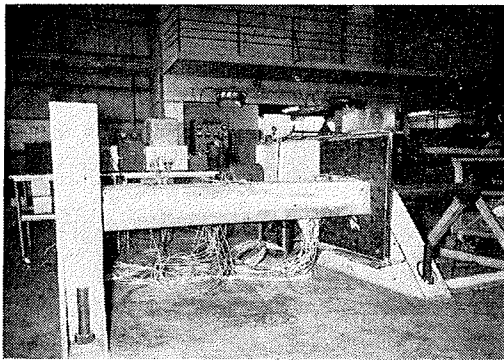


写真-5 試験体

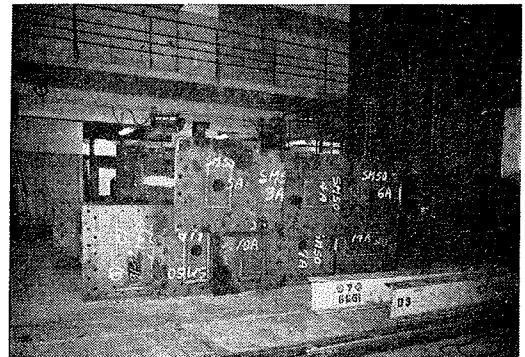


写真-2 ねじれ試験体載荷状態

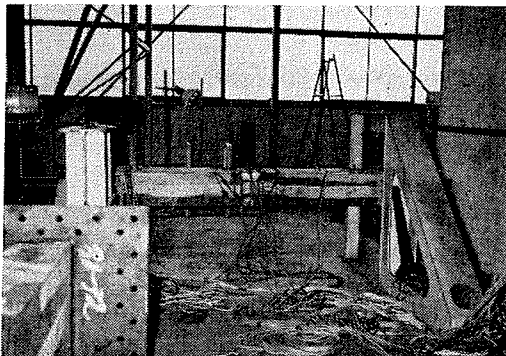
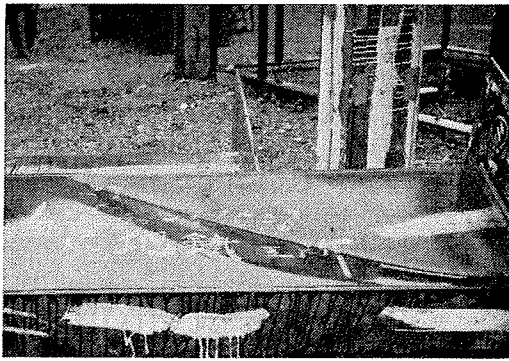


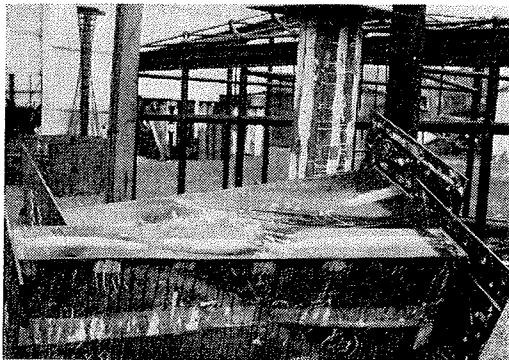
写真-6 座屈した試験体の板



写真一七 座屈した試験体の板



写真一八 座屈した試験体の板



まるほどのデータの有意性があらわれない。今回の実験に先立って、実は2本程度の実験を行なったが、図一四に同時に記載できるほどの有意性がない。

鋼種によって板の弾性座屈値に差がある(図一四)のは今後実験データを相互に比較するときに困る。この点に関しては理論的にも実験的にも今後の研究がある。ねじれの実験を行なって気がついたことは、鋼材の弾性定数について、もっとくわしく測定する方法を開発しなければならないということであった。一号試験片による材料試験程度では弾性定数の正確を期しがたいくらいがある。

なお、実験を行なって得られた経験的な事実ではあるが鋼材がせん断応力で破壊に至る機構は、理想化された塑性変形の機構に実に良く似る。これは、せん断応力度が降伏点に達する前までは完全な直線変形をするが、降伏点に達した直後から、はっきりと塑性流動に移るからである。実験の実際において、降伏点に近づくとも観測値の直線性が悪くなるので普通は事前にそれとわかるものであるが、ねじれ実験の場合は降伏現象が突発的にさえて、あわてたことが少なからずあった。

この性質から速断するのも考えものであるが、実際の構造物において、せん断応力の大きい箱橋等では設計に十分の注意がいるのではないと思われる。

3. 矩形断面の見掛けのねじれ剛性と応力について

(1) 棒のねじれ理論の矛盾点

幅と高さ b_1, b_2 にくらべて薄い板厚 t の中空の矩形断面をねじる場合、慣用されているねじれの理論

$$M^T(x) = GK \frac{d\varphi}{dz} - EC \frac{d^3\varphi}{dz^3} \dots\dots\dots(3-1)$$

を基本にすることは無理がある。しかし、一応式(1)が成立すると考えて導かれるサンプナンのねじれ剛性 GK 、ワグナーの曲げねじれ剛性 EC には一応の根拠もあるので、これらの計算式、ならびにこれらに個有する応力度の分布を 図一五 に示した。

長さ l の部材を両端でそれを拘束し、 $M^T(x) = \text{一定}$ でねじるときの解は、 $z=0$ で $\varphi = d\varphi/dz = 0$ 、 $z=l$ で $d\varphi/dz = 0$ のもとに式(2)のようになる。

$$\varphi = \frac{M^T}{GK} \cdot z - \frac{M^T}{GK \alpha} \times \left[\frac{\sinh \alpha(z \cdot l/2) + \sinh \alpha l/2}{\cosh \alpha l/2} \right] \dots\dots(3-2)$$

ただし、

$$\alpha^2 = \frac{GK}{EC} = \frac{24}{(b_1 - b_2)^2 (1 + \nu)} \dots\dots\dots(3-3)$$

この変形によって、軸応力度 σ_z の最大値は拘束支点上に生じ、矩形断面の隅角部の値は

$$\sigma_{\max} = \tau_0 \sqrt{6(1 + \nu)} \tanh \alpha l/2 \dots\dots\dots(3-4)$$

ここに τ_0 はサンプナンのねじれを与えるせん断応力度であって、

$$\tau_0 = \frac{M^T}{2 b_1 b_2 t} \dots\dots\dots(3-5)$$

長さ l の見掛けのねじれ剛性は、

$$\overline{GK} = GK \left[\frac{1}{1 - (2/\alpha l) \tanh \alpha l/2} \right] \dots\dots\dots(3-6)$$

矩形断面では α の値が大きいく、十分 l が長ければ、 $\tanh \alpha l/2 \approx 1$ とみて良く、拘束支点では σ は τ_0 の約 2.8 倍の軸応力度を生ずることになる。見掛けのねじれ剛性は、式(6)だけから考えれば、 l が小になると無限大になるという不都合が残る。

式(2)の解においては、軸応力度の z 軸方向の変化が、一義的に $\exp(\alpha z)$ または $\exp(-\alpha z)$ にしたがって変化し、断面内の方向には 図一五 に示す直線分布を仮定している。しかし、薄板の二次元の応力に関しては、一般化した Airy の応力関数を満たす必要があつて、矩形断面の軸方向 z と板厚の中心に沿って計った矩形断面の座標 s で定める板の各部について、つぎの関係が成立していなければならない。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = 0 \dots\dots\dots(3-7)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \sigma_s = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z} \dots\dots(3-8)$$

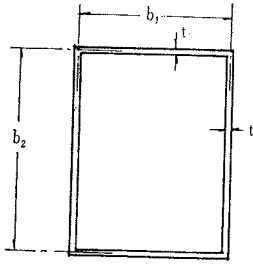


図-5

Moment Inertia K for Torsion

$$K = \frac{2 b_1^2 b_2^2}{(b_1 + b_2)} t$$

Warping Coefficient C

$$C = \frac{K}{48} (b_2 - b_1)^2$$

Shearing stress τ by Saint Venant's

$$\tau = GK \frac{d\phi}{dz} \cdot \frac{1}{2 b_1 b_2 t} = \frac{M_1^T}{2 b_1 b_2 t}$$

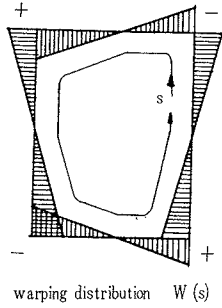
Normal Stress σ by warping

$$\sigma = \left(-EC \frac{d^2\phi}{dz^2} \right) \frac{W(s)}{C}$$

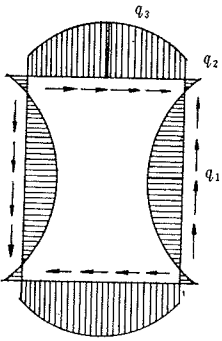
$$|W(s)|_{\max} = \left| \frac{b_1 b_2 (b_1 - b_2)}{4(b_1 + b_2)} \right|$$

Shearing stress τ by Warping

$$\tau = \left(-EC \frac{d^2\phi}{dz^2} \right) \cdot \frac{q(s)}{C} = M_2^T \cdot \frac{q(s)}{C}$$



warping distribution $W(s)$



shearing stress distribution $q(s)$ by warping

$$q_1 = \frac{b_1 b_2 (b_2 - b_1) (2 b_1 + b_2)}{24 (b_1 + b_2)}$$

$$q_2 = -\frac{b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2}{12 (b_1 + b_2)}$$

$$q_3 = -\frac{b_1 b_2 (b_2 - b_1) (b_1 + 2 b_2)}{24 (b_1 + b_2)}$$

式(2)を使い、図-5に示した応力分布を満たす応力関数を定めると、式(8)は満たされるが、式(7)(適合条件)を満たさない。この理由は、図-5に示した応力分布の誘導ではせん断流理論を使用したことに帰因するのであり、せん断流理論は式(8)に相当するつりあい式

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots(3-9)$$

を基本にしているからである。

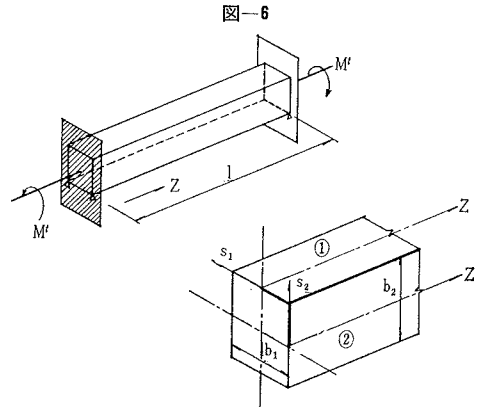
ここで、式(1)の力学的意味を考えると、ねじれ剛性 GK のみの棒と、曲げねじれ剛性 EC のみを持つ棒とを重ねて一体の棒にしたのと同等になるから、2本の棒相互には内的にトルクの受け渡しがなければならぬ。したがって、2つの剛性に個有する応力度相互で応力の移り変わりに無理があれば、式(1)を基本に考えること自体が妥当でなくなる。

構造的な立場から式(1)が良い近似を与えることはある。たとえば、曲げ剛性 EJ 、ねじり剛性 GK の箱桁を2本並列し、比較的剛な横桁を密に並べて2本の箱桁をつなぎ、一体の構造としたものは、単独の桁に換算する場合の挙動は、確かに式(1)が良い近似を与える。H型の部材、C型の部材は巨視的にこの性質があるので、変形を扱う場合には良い近似を示すことは良く知られている。

中空の矩形断面では、板の二次元の応力分布から見直さなければならないから、この立場から眺めることにする。しかし、式(1)の形は工学的には直観的に理解するのに便利であるから、式(1)の値がどのように補正されるべきかという観点で理論を整理することにする。

(2) 応力関数およびその解

図-1に示したねじり実験の理論的扱いを図-6に示すような座標の定義で扱うことにする。いまフランジ部分①とウェブ部分②とにわけて応力関数をつぎの形に置く。



$$\left. \begin{aligned} F_1(z, s) &= \sum_{n=1,3,5,\dots} f_n(s_1) \cos n\pi z/l \\ F_2(z, s) &= \sum_{n=1,3,5,\dots} g_n(s_2) \cos n\pi z/l \end{aligned} \right\} \dots(3-10)$$

作用している一定のねじりモーメント M^T を同じくフーリエ級数で与える。ただし、 $z=0$ 、 $z=l$ における境界条件がフーリエ展開の場合には特異点となることを注意して考える、

$$M^T = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4 M^T}{l} \cdot \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi z}{l} \dots(3-11)$$

$f_n(s_1)$ 、 $g_n(s_2)$ の解はフーリエの各項ごとに求めることとするが、関数は断面の対称性から s 座標の原点をそれぞれ板幅の中央に選び、断面の4半分について解を求め、また奇関数だけが対象となるのでつぎのように置く。さしあたり $n=1$ の場合だけを考えるとして、

$$\left. \begin{aligned} f(s_1) &= A_1 \sinh \lambda s_1 + B_1 s_1 \cosh \lambda s_1, \\ & \quad (-b_1/2 \leq s_1 \leq 0) \end{aligned} \right\}$$

$$g(s_2) = A_2 \sinh \lambda s_2 + B_2 s_2 \cosh \lambda s_2, \quad \left. \begin{array}{l} (0 \leq s_2 \leq b_2/2) \\ \lambda = \pi/l \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3-12)$$

4つの定数は、 $s_1 = -b_1/2$, $s_2 = b_2/2$ の隅角部で、 z 方向のひずみ ϵ_z 、軸応力度 σ_z 、およびせん断応力度 τ が連続するという条件として

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z},$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)$$

に代入すれば3つが定まる。残る1つの条件は、 ϵ_z が矩形断面の隅角部で、断面のそりによって生じたひずみに

等しいと置くことで定められる（この際 $\sigma_s = 0$ を隅角部の条件に入れることはできない。この条件にすると後の式(16)が恒等的に0となる）。

断面のねじれ変形を

$$\varphi(z) = \phi \cos \lambda z \dots\dots\dots(3-13)$$

とすれば、そりによって生ずる断面の隅角部におけるひずみは、そり関数の値を使うことにより、

$$\epsilon_z = W \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{b_1 b_2 (b_1 - b_2)}{4(b_1 + b_2)} \phi \lambda^2 \cos \lambda z \dots\dots\dots(3-14)$$

これらの関数から A_1, B_1, A_2, B_2 の定数が定まる。 A_1, B_1 の解を示すと

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \sinh \lambda (b_1 + b_2)/2 = -B_1 \left[\frac{b_1}{2} \cosh \lambda (b_1 + b_2)/2 + \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda (b_1 + b_2)/2 - \frac{b_2}{2} \cdot \frac{\sinh \lambda b_1/2}{\sinh \lambda b_2/2} \right. \\ E \cdot \frac{b_1 b_2 (b_1 - b_2)}{4(b_1 + b_2)} \cdot \phi \lambda^2 = -B_1 \cdot \frac{\sinh \lambda b_1/2}{\sinh \lambda (b_1 + b_2)/2} \cdot \left[\lambda(1 - \nu) \sinh \lambda (b_1 + b_2)/2 \right. \\ \left. \left. + \frac{b_1 \lambda^2 (1 + \nu) \sinh \lambda b_2/2}{2 \sinh \lambda b_1/2} + \frac{b_2 \lambda^2 (1 + \nu) \sinh \lambda b_1/2}{2 \sinh \lambda b_2/2} \right] \right\} \dots\dots\dots(3-15)$$

(3) ねじれ剛性

一方、断面に作用するせん断応力度の合力を各板ごとに求め、これを Q とすると

$$Q_1 = \int_{-b_1/2}^0 \tau t ds = t \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} \right]_{-b_1/2}^0 = -\lambda t \left(A_1 \sinh \lambda b_1/2 + B_1 \frac{b_1}{2} \cosh \lambda b_1/2 \right) \sin \lambda z$$

$$Q_2 = \int_0^{b_2/2} \tau t ds = t \left[\frac{\partial F_2}{\partial z} \right]_{b_2/2}^0 = -Q_1$$

このせん断力が断面全体としてつぎのねじりモーメントを生ずる。

$$M^T(z) = 4 \left(Q_1 \frac{b_2}{2} + Q_2 \frac{b_1}{2} \right) = E \cdot \frac{t b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2}{2(b_1 + b_2)} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \phi \lambda^3 \sin \lambda z$$

$$\times \left[\frac{\frac{1}{\lambda} \sinh \lambda (b_1 + b_2)/2 - \frac{b_1}{2} \cdot \frac{\sinh \lambda b_2/2}{\sinh \lambda b_1/2} - \frac{b_2}{2} \cdot \frac{\sinh \lambda b_1/2}{\sinh \lambda b_2/2}}{\left(\frac{1 - \nu}{\lambda} \right) \sinh \lambda (b_1 + b_2)/2 + \frac{b_1(1 + \nu)}{2} \cdot \frac{\sinh \lambda b_2/2}{\sinh \lambda b_1/2} + \frac{b_2(1 + \nu)}{2} \cdot \frac{\sinh \lambda b_1/2}{\sinh \lambda b_2/2}} \right] \dots\dots\dots(3-16)$$

結局、このねじりモーメントが曲げねじりによって生ずるねじりモーメントであるので曲げねじり剛性の形で示すことにしよう。

$$M_2^T(z) = -\overline{EC} \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = \overline{EC} \phi \lambda^3 \sin \lambda z$$

とおけば \overline{EC} はつぎのように与えられる。

$$\frac{\overline{EC}}{EC} = k_1 = \frac{3}{\mu_1 \mu_2} \cdot \frac{\sinh(\mu_1 + \mu_2) - \mu_1 \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1} - \mu_2 \frac{\sinh \mu_1}{\sinh \mu_2}}{(1 - \nu) \sinh(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1(1 + \nu) \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1} + \mu_2(1 + \nu) \frac{\sinh \mu_1}{\sinh \mu_2}} \dots\dots\dots(3-17)$$

ただし、 $\mu_1 = \pi b_1/2l$, $\mu_2 = \pi b_2/2l$

ここに EC は通常のせん断流理論で求めた曲げねじれ剛性である。 k_1 はその比であるが、 $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$ の極限が1であり、 μ_1, μ_2 が十分大きければ次式に近似する。

$$k_1 \approx \frac{3}{\mu_1 \mu_2 (1 - \nu)} \dots\dots\dots(3-18)$$

サンブナンのねじれによるねじれモーメントは従来通り

$$M_1^T(z) = GK \frac{d\varphi}{dz} = GK \lambda \phi \sin \lambda z \dots\dots(3-19)$$

ϕ は式(16)と式(19)および式(11)を参照すれば

$$\phi = \frac{4 M^T}{l} \cdot \frac{1}{GK \lambda^2 + \overline{EC} \lambda^4} \dots\dots\dots(3-20)$$

ここで換算のねじれ剛性をつぎの形で求めておく

$$\overline{GK} = GK + \overline{EC} \lambda^2$$

$$= GK \left(1 + \frac{(1 + \nu)(\mu_1 - \mu_2)^2}{6} k_1 \right) = k_2 GK \dots\dots\dots(3-21)$$

(4) そりによる軸応力度

矩形断面の隅角部における軸応力度 σ_z を求めよう。整理した結果を示すと

$$\sigma_z = \frac{Eb_1b_2(b_1-b_2)}{4(b_1+b_2)} \phi \lambda^2 \cos \lambda z \left[\frac{\sinh(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1 \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1} + \mu_2 \frac{\sinh \mu_1}{\sinh \mu_2}}{(1-\nu)\sinh(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1(1+\nu) \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1} + \mu_2(1+\nu) \frac{\sinh \mu_1}{\sinh \mu_2}} \right]$$

式 (20), (21) の両式を参照し, K の値を代入してさらに整理した形にまとめると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2(1+\nu) \cdot \frac{(b_1-b_2)}{l} \tau_0 k_3 \cos \lambda z \\ k_3 &= \frac{1}{k_2} \left[\frac{\sinh(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1 \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1} + \mu_2 \frac{\sinh \mu_1}{\sinh \mu_2}}{(1-\nu)\sinh(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1(1+\nu) \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1} + \mu_2(1+\nu) \frac{\sinh \mu_1}{\sinh \mu_2}} \right] \dots\dots\dots(3-22) \\ \tau_0 &= \frac{MT}{2b_1b_2t} \end{aligned} \right\}$$

(5) ま と め

フーリエ級数の1項についての関係式を使って, 再び各項の和の形にまとめ, 両端でそり自由の部材中央にトルク荷重を作用させたときの表現式に直すことにする。ねじれ変形 ϕ および矩形断面の隅角部における軸応力度 σ_z (正の表式だけを考える) を示せば

$$\phi = \frac{4MTl}{\pi^2 GK} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \frac{1}{k_2(n)} \cos \frac{n\pi z}{l} \dots\dots\dots(3-23)$$

$$\sigma_z = 2(1+\nu) \frac{(b_1-b_2)}{l} \tau_0 \sum_{n=1,3,5,\dots} k_3(n) \cos \frac{n\pi z}{l} \dots\dots\dots(3-24)$$

ここに $k_2(n), k_3(n)$ は式 (17), (21), (22) で与えられる k_2, k_3 の定数において $\mu_1 = n\pi b_1/2l, \mu_2 = n\pi b_2/2l$ を代入して得られる値である。

式 (23) からは, 矩形断面の部材の見掛けのねじれ剛性 GJ_T がつぎのように与えられる。

$$GJ_T = GK \cdot \frac{1}{\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{k_2(n)}} \dots\dots\dots(3-25)$$

拘束縁において, そり拘束によって生ずる軸応力度は

$$\sigma_z = 2(1+\nu) \frac{(b_1-b_2)}{l} \tau_0 \sum_{n=1,3,5,\dots} k_3(n) \dots\dots(3-26)$$

特に幅と高さ b_1, b_2 が支間 l にくらべて大きく, また, フーリエ級数の高階の部分では n が大となって μ_1, μ_2 が大きくなる。このとき $k_2(n), k_3(n)$ はつぎの極値に収束する。

$$\left. \begin{aligned} k_2(\infty) &= 1 + \frac{(1+\nu)}{2(1-\nu)} \cdot \frac{(b_1-b_2)^2}{b_1b_2} \\ k_3(\infty) &= \frac{1}{k_2(\infty)} \cdot \frac{1}{(1-\nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3-27)$$

ここで式 (25) において $k_2(n) = k_2(\infty)$ とおくと, 級数収束の収束性から

$$GJ_T = GK \cdot k_2(\infty) \dots\dots\dots(3-28)$$

式 (28) の意味は, 長さのいちじるしく短い矩形断面をねじるときの見掛けのねじり剛性であって, たとえば $b_2 = 2b_1, \nu = 0.3$ の場合は $k_2(\infty) = 1.46$ と得られる。ねじれに対して基本式 (1) を解くと見掛けのねじれ剛

性が $l \rightarrow 0$ になると無限に大きくなることになるが, 実際には 1.46 倍以上に増加することがないという性質が得られる。

そりによって生ずる軸応力度 σ_z は式 (26) で計算されるが, この級数収束はこのままでは無限大に発散して意味がない。この理由は, $z=0$ は拘束支点であり, 式 (11) の表式からわかるように, ここは特異点である。実際には, この部分に生ずるパルス部分を除いて計算しなければならない。この表現式は

$$\sigma_{z, (z=l/2)} = 2(1+\nu) \cdot \frac{(b_1-b_2)}{l} \tau_0 \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} [k_3(n) - k_3(\infty)] \dots\dots(3-29)$$

式 (29) は収束性があり実際計算に適している。

(6) 数値的な検討

式 (17), (21), (22) 中の k_1, k_2, k_3 の定数は電子計算機を使ってあっさり計算できるから数値的な検討をするときは便利である。 $b_2/b_1 = \mu_2/\mu_1$ の値を 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0 の 6 種類に選び, $\mu_1 = 0.1$ から 2.0 まで

数表—I

		k_1					
μ_1	μ_2/μ_1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0.1	0.999 × 10	0.997 × 10	0.996 × 10	0.993 × 10	0.990 × 10	0.986 × 10	0.986 × 10
0.2	0.996	0.991	0.984	0.975	0.963	0.949	0.949
0.3	0.992	0.981	0.965	0.944	0.920	0.891	0.891
0.4	0.985	0.967	0.939	0.905	0.865	0.822	0.822
0.5	0.976	0.948	0.907	0.854	0.804	0.749	0.749
0.6	0.965	0.924	0.869	0.806	0.741	0.679	0.679
0.7	0.951	0.897	0.827	0.752	0.680	0.614	0.614
0.8	0.933	0.865	0.783	0.699	0.623	0.556	0.556
0.9	0.913	0.831	0.737	0.648	0.571	0.506	0.506
1.0	0.889	0.794	0.692	0.600	0.524	0.462	0.462
1.1	0.863	0.755	0.648	0.556	0.482	0.424	0.424
1.2	0.833	0.716	0.605	0.515	0.445	0.391	0.391
1.3	0.802	0.676	0.565	0.478	0.412	0.361	0.361
1.4	0.768	0.637	0.527	0.444	0.382	0.334	0.334
1.5	0.733	0.599	0.492	0.413	0.354	0.310	0.310
1.6	0.698	0.562	0.458	0.384	0.329	0.288	0.288
1.7	0.662	0.527	0.427	0.357	0.306	0.268	0.268
1.8	0.627	0.493	0.399	0.333	0.285	0.250	0.250
1.9	0.592	0.462	0.372	0.310	0.266	0.233	0.233
2.0	0.558	0.432	0.347	0.290	0.248	0.217	0.217
0							

数表-II

μ	k_2					
	$\mu_2/\mu_1=1.5$	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0.1	0.100×10	0.100×10	0.100×10	0.100×10	0.100×10	0.100×10
0.2	0.100	0.100	0.101	0.103×10	0.105	0.107
0.3	0.100	0.101	0.104	0.107	0.111	0.115
0.4	0.100	0.103	0.107	0.112	0.118	0.125
0.5	0.101	0.105	0.111	0.118	0.127	0.136
0.6	0.101	0.107	0.115	0.125	0.136	0.147
0.7	0.102	0.109	0.119	0.131	0.145	0.158
0.8	0.103	0.112	0.124	0.138	0.154	0.169
0.9	0.104	0.114	0.129	0.145	0.162	0.179
1.0	0.104	0.117	0.133	0.152	0.171	0.190
1.1	0.105	0.119	0.138	0.158	0.179	0.200
1.2	0.106	0.122	0.142	0.164	0.186	0.209
1.3	0.107	0.124	0.146	0.170	0.194	0.219
1.4	0.108	0.127	0.156	0.175	0.201	0.227
1.5	0.108	0.129	0.153	0.180	0.208	0.236
1.6	0.109	0.131	0.157	0.185	0.214	0.244
1.7	0.110	0.133	0.160	0.189	0.220	0.251
1.8	0.111	0.134	0.163	0.195	0.225	0.258
1.9	0.111	0.136	0.165	0.197	0.230	0.264
2.0	0.112	0.137	0.167	0.200	0.234	0.269
	0.115					

数表-III

μ	k_3					
	$\mu_2/\mu_1=1.5$	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0.1	0.100×10	0.999×10	0.997×10	0.994×10	0.990×10	0.984×10
0.2	0.100	0.999	0.990	0.978	0.903	0.945
0.3	0.100	0.998	0.980	0.955	0.925	0.892
0.4	0.101	0.997	0.966	0.927	0.882	0.837
0.5	0.102	0.996	0.955	0.897	0.841	0.787
0.6	0.103	0.994	0.935	0.868	0.803	0.743
0.7	0.104	0.993	0.919	0.841	0.769	0.706
0.8	0.105	0.991	0.904	0.817	0.739	0.674
0.9	0.106	0.990	0.890	0.795	0.714	0.646
1.0	0.108	0.988	0.877	0.776	0.692	0.622
1.1	0.109	0.987	0.865	0.759	0.672	0.602
1.2	0.110	0.985	0.854	0.743	0.655	0.583
1.3	0.112	0.984	0.845	0.730	0.639	0.567
1.4	0.113	0.983	0.836	0.718	0.626	0.553
1.5	0.114	0.982	0.829	0.708	0.614	0.541
1.6	0.115	0.981	0.822	0.699	0.604	0.530
1.7	0.116	0.980	0.816	0.690	0.595	0.521
1.8	0.117	0.980	0.811	0.683	0.587	0.513
1.9	0.118	0.979	0.807	0.677	0.580	0.505
2.0	0.119	0.979	0.803	0.672	0.574	0.499

変化させて計算した数値を参考までに数表-I, II, IIIに示した。この数表を使って計算例を示す。

板厚一定で、幅 $b_1=20$ cm, 高さ $b_2=60$ cm の矩形断面を長さ 1.6 m で両端をそり拘束したまま一定のトルクでねじるとする。関連する定数は $b_1\pi/2l \approx 0.2$ としてつぎのようになる。

n	$(n \mu_1)$	$k_1(n)$	$k_2(n)$	$k_3(n)$
1	0.2	0.975	1.034	0.978
3	0.6	0.806	1.252	0.869
5	1.0	0.601	1.521	0.776
7	1.4	0.444	1.755	0.719
9	1.8	0.333	1.936	0.684
∞	∞	0.000	2.238	0.638

式 (25) で見掛けのねじれ剛性を、式 (29) で拘束点における最大軸応力度を求める。計算はつぎのように表計算で求める。

n	$1/n^2 k_2(n)$	$k_3(n) - k_3(\infty)$
1	1.034	0.340
3	0.089	0.231
5	0.026	0.138
7	0.012	0.081
9	0.006	0.046
d	0.006	0.060
Σ	1.173	0.896

ここに d は $n=11$ 以上の級数和の推定値であり、 $n=7, n=9$ の 2 数値から、 $n=11$ 以上の級数が等比級数になるものと仮定したときの推定値である。これより

$$GJ_T = GK \frac{1}{\frac{8}{\pi^2} \times 1.173} = 1.05 GK$$

$$\sigma_z = 2(1+\nu) \cdot \frac{b_2 - b_1}{l} \tau_0 \times 0.896 = 0.292 \tau_0$$

結局、結論として閉じた矩形断面のねじれ剛性は、計算例で示した程度の寸法（これは実験に使用した矩形断面の寸法にほぼ等しい）では、そり拘束の影響はほとんど無視できる程度のものとなる。また、そりによる軸応力度の最大値は、せん断応力度の約 30% 程度である。この程度の大きさの応力度では、実験に際して相当の精度を上げて測定しなければ誤差と区別しにくくなるので注意が要るであろう。また、4. で説明するが、この局部的な軸応力度は $\exp(-\pi z/b)$ の割合で収束するので実際問題として測定に乗るかどうかは怪しい。要するに 2. で行なった実験報告にも説明するが、矩形断面でねじりの実験を行なえば、大部分の板は純粋のせん断応力の場になっていると判断しても良さそうである。また、見掛けのねじれ剛性が 5% 程度大きいという計算結果は実験の傾向とは一致する値である。

4. シアラグに対する検討

(1) 板の応力分布に対する別の見方

3. では、閉じた矩形断面のねじれ剛性という立場から板の応力分布を定めた。この際、薄板の縁における境界条件が必ずしも厳密にははいていないままで、最終的に見掛けのねじれ剛性という形で集約して考えた。矩形板の二次元の応力状態を周辺の境界条件とともに解析的に厳密にあらわすのはむずかしいから、問題の取り扱う道程にはいく通りもあってしかるべきであろう。

考え方の筋道は、この節ではつぎのように取る。すでに 3. (1) で触れたように、ねじれの基本式 (3-1) は、力学的にはねじれ剛性 GK だけの棒と、曲げねじれ剛性 EC だけの棒との重ね合わせであると考えられるから、それぞれについての独立な解は簡単に求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_1^T &= GK d\varphi_1/dz = \text{const.} \\ M_2^T &= -EC d^3\varphi_2/dz^3 = \text{const.} \\ M_1^T + M_2^T &= M^T = \text{const.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-1)$$

式(1)において M_1^T, M_2^T =一定のときの応力分布の解は、応力関数が代数関数となるから薄板の応力分布に関する Airy 関数は満たされる。したがって、 φ_1, φ_2 の解には

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_1^T}{GK} z \\ \varphi_2 &= \frac{M_2^T}{EC} \left(\frac{l}{4} z^2 - \frac{z^3}{6} \right) + Az \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-2)$$

がそれぞれ得られる。ここに式(2)において A の定数は不定である。重ね合わせ棒のトルクの配分 M_1^T と M_2^T との大きさは、最小仕事の原理を使えば良い。この際、定数 A は関係しない。 M_2^T のほうの表式、すなわち曲げねじれによって伝えられるトルク分を示すと、

$$\left. \begin{aligned} M_2^T &= \frac{1}{1+X} M^T \\ X &= GKl^2/12 EC \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-3)$$

全弾性仕事量から見掛けのねじれ剛性を求めると、

$$\overline{GK} = GK[1+2X/(1+X^2)] \dots\dots\dots(4-4)$$

式(4)の結果はつぎの意味がある。見掛けのねじれ剛性は、曲げねじれの影響があると増えるが、 X の関数からわかるように最大2倍を越えることはない。実験に供した最大の試験体の寸法で計算して見ると、約8% という結果になる。

軸応力度のほうを求めて見ると、矩形断面の断面定数を代入し、拘束縁における最大値を式で示すと、

$$\sigma = \tau_0 \cdot \frac{6I/(b_1-b_2)}{1+2l^2/(b_1-b_2)^2(1+\nu)} \dots\dots\dots(4-5)$$

となり、実験に供した最大寸法の断面についていえば、単純なせん断応力の約95%程度の軸応力度が、拘束縁で生ずる計算になる。式(4-6)は $l/(b_2-b_1)$ を一つのパラメータとしているから、 σ の最大値は $l/(b_2-b_1) \approx 0.8$ のとき σ は τ_0 の約2倍という数値が得られる。

もし、以上の仮定、すなわち重ね合わせ棒のような応力分布が妥当であれば、軸応力度の分布が、試験体の長手方向に直線分布しているはずである。実験的な事実の中には、確かにこのような分布らしいものが測定されたのであるが、今回の実験ではそり分布に主眼を置かなかったので実験的に確認することはできなかった。

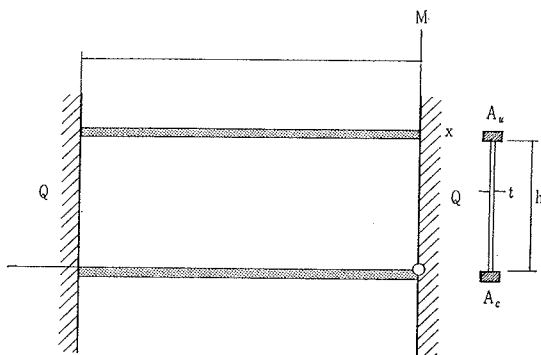
(2) 拘束縁のシアラグに関する薄板の境界条件

重ね合わせ棒の解釈にしたがえば、矩形断面の応力分布は大部分の薄板で Airy 関数を満足し、そり拘束の保持も平均的に満足される。不適合性は、そり拘束縁の局部的な部分に限られ、これは図-5の最下段の図に示すように、そりによって二次的に生ずるせん断力による二次的なせん断変形だけである。したがって、そり拘束縁では、このせん断変形を補正するような局部応力だけ

を別に考えれば良い。これはいわゆるシアラグの問題である。

シアラグとして局部応力を考えるならば、薄板の二次元の応力状態を理想化して、板厚 t 、高さ h のウェブプレートの上下縁に、等価断面積 A_U, A_L のフランジが接している長さ l のプレート ガーダーを考えれば良い。両桁端は直線を保ち(そり拘束)、この区間に外力がなく、外力は両桁端で曲げモーメント、軸力、せん断力を受けていると考えれば良い。純曲げならびに軸方向力の作用はシアラグに無関係であり、これらによる応力は重ね合わせができるから、理論のモデルとしては図-7に示すように、長さ l の桁の中央に対して逆対称の場合を解析すれば足りる。

図-7



薄板に生じている応力度のつりあいには、一般化した二次元の応力関数を満たすとし、境界条件を考えてつぎのように置く(図-7)。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots(4-6)$$

$$F = F_0(x, y) + F_1(x, y) + F_2(x, y) \dots\dots\dots(4-7)$$

$$\begin{aligned} F_0(x, y) &= \left[\frac{a_1}{12} (2y-3h)y^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2}{8} (2y-h)^2 + a_3 y \right] \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots(4-8)$$

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_n \left[C_n \left(y - \frac{h}{2} \right) \sin \alpha_n y + D_n \sin \alpha_n y \right] \\ &\quad \times \sinh \alpha_n \left(x - \frac{l}{2} \right) \dots\dots\dots(4-9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= \sum_m \left\{ M_m \left[\cosh \frac{\beta_m h}{2} \sinh \beta_m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{h} \left(y - \frac{h}{2} \right) \sinh \frac{\beta_m h}{2} \cosh \beta_m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + N_m \left[\sinh \frac{\beta_m h}{2} \cosh \beta_m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{h} \left(y - \frac{h}{2} \right) \cosh \frac{\beta_m h}{2} \sinh \beta_m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad \times \cos \beta_m x \dots\dots\dots(4-10) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= n\pi/h, & n &= 1, 3, 5, \dots \\ \beta_m &= m\pi/l, & m &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-11)$$

ここに $F_0(x, y)$ は通常の単純な曲げ理論によるもの解を与え、作用する曲げモーメント、せん断力、および断面定数で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M &= Q \left(x - \frac{l}{2} \right) \\ a_1 &= \frac{Q}{J} = \frac{12}{h^3} \cdot \tau_0 \cdot \frac{1 + \varphi_U + \varphi_L}{1 + 4(\varphi_U + \varphi_L) + 12 \varphi_U \varphi_L} \\ a_2 &= \frac{Q}{J} \delta = \frac{6}{h} \cdot \tau_0 \cdot \frac{\varphi_U - \varphi_L}{1 + 4(\varphi_U + \varphi_L) + 12 \varphi_U \varphi_L} \\ a_3 &= -3 \tau_0 \cdot \frac{\varphi_U + \varphi_L + 4 \varphi_U \varphi_L}{1 + 4(\varphi_U + \varphi_L) + 12 \varphi_U \varphi_L} \\ \varphi_U &= \frac{A_U}{t \cdot h}, \quad \varphi_L = \frac{A_L}{t \cdot h}, \quad \tau_0 = \frac{Q}{t \cdot h} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-12)$$

$F_1(x, y), F_2(x, y)$ はともに二次的な応力度を与える応力関数の一般形を与え、 $y=0, y=h$ において $\sigma_y=0$ の境界条件を満たし、 $x=l/2$ に対して奇関数となるものを示した。 $F_1(x, y)$ は y 方向に対してフーリエの展開式を用い、 $x=0, x=l$ におけるそり拘束の条件で定数を定める。 $F_2(x, y)$ は x 方向にフーリエの展開式を用い、フランジとの接続条件を吟味した係数を定めることにする。

いま、薄板の面内変形の成分を u, v とすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma = \frac{2(1-\nu)}{E} \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-13)$$

$x=0, x=l$ において、そりが拘束されるという条件を、 u が y の一次式で表わせられることで与えれば、 $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ の関係となる。式(13)の第2式を x で微分し、第3式を y で微分したものを比較すれば、式(6)を使って

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] = 0, \quad x=0, x=l \dots\dots\dots(4-14)$$

ウェブプレートの上下縁での条件は、フランジが接続しているということから、フランジの軸応力度の変化分がウェブにせん断流の流入となつてつりあうのでつぎの条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_U \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \tau t = 0 & \quad y=0 \\ A_L \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \tau t = 0 & \quad y=h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-15)$$

(3) シアラグの解

はじめに式(14)の条件を満たすように $F_1(x, y)$ の関数形を定める。 $F_2(x, y)$ は、この場合は恒等的に式(9)を満たしている。式(8), (9)を式(14)に代入すると

$$\begin{aligned} & (2+\nu)a_1 \left(y - \frac{h}{2} \right) + (2+\nu)a_2 \\ &= \sum_n C_n \alpha_n^2 \cosh \frac{\alpha_n l}{2} \\ & \times \left[(1+\nu)\alpha_n \left(y - \frac{h}{2} \right) \sin \alpha_n y - 2(2+\nu) \cos \alpha_n y \right] \\ & + \sum_n D_n \alpha_n^3 \cosh \frac{\alpha_n l}{2} (1+\nu) \sin \alpha_n y \dots\dots(4-16) \end{aligned}$$

ここで C_n, D_n の係数を定めるに当たって、左辺の y の一次式をフーリエ展開する方法を考えて見る。この与え方はつぎに示すように2通りの表式が考えられる。

$$\left. \begin{aligned} & (2+\nu)a_1 \left(y - \frac{h}{2} \right) \\ &= (2+\nu)a_1 \left(y - \frac{h}{2} \right) \sum_n \frac{4}{h \alpha_n} \sin \alpha_n y = f_1(y) \\ & (2+\nu)a_1 \left(y - \frac{h}{2} \right) \\ &= (2+\nu)a_1 \sum_n \frac{4}{h \alpha_n^2} \cos \alpha_n y = f_2(y) \\ & n=1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-17)$$

および定数項に関して

$$\begin{aligned} & (2+\nu)a_2 = (2+\nu)a_2 \sum_n \frac{4}{h \alpha_n} \sin \alpha_n y \dots(4-18) \\ & n=1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

式(17)で与えられる $f_1(y), f_2(y)$ はともに同じ関数形の異なる表現式であるが、厳密には $y=0, y=h$ の境界では性質が異なる。この部分を別とすれば、式(17), (18)を式(16)と比較することにより C_n, D_n の定数が定まる。

$$C_n = - \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} a_1 \cdot \frac{4}{h \alpha_n^4 \cosh \alpha_n l / 2}, \quad n=1, 3, 5, \dots \dots\dots(4-19)$$

$$D_n = \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} a_2 \cdot \frac{4}{h \alpha_n^4 \cosh \alpha_n l / 2}, \quad n=1, 3, 5, \dots \dots\dots(4-20)$$

$F_2(x, y)$ の関数形を定めるに当たって、 $y=0, y=h$ の縁における軸応力度 σ_x 、せん断応力度 τ の分布を求めよう。表現式が重複するので、式中の複号は上の場合は $y=0$ 、下の場合は $y=h$ での表式とすると、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(\mp \frac{h}{2} a_1 + a_2 \right) \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) \\ & \mp \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \left\{ \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot a_1 \cdot \frac{8}{h \alpha_n^3} \cdot \frac{\sinh \alpha_n (x-l/2)}{\cosh \alpha_n l / 2} \right\} \\ & \pm \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \left\{ M_m \cdot \frac{4 \beta_m}{h} \left(\frac{\sinh \beta_m h}{2} \right)^2 \cos \beta_m x \right\} \\ & - \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \left\{ N_m \cdot \frac{4 \beta_m}{h} \left(\frac{\cosh \beta_m h}{2} \right)^2 \cos \beta_m x \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(4-21)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \pm \frac{h}{2} a_2 - a_3 \\ & - \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \left\{ \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} a_1 \frac{2}{\alpha_n^2} \cdot \frac{\sinh \alpha_n (x-l/2)}{\cosh \alpha_n l / 2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mp \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \cdot a_2 \cdot \frac{2}{h \alpha_n^2} \cdot \frac{\sinh \alpha_n(x-l/2)}{\cosh \alpha_n l/2} \right\} \\ & + \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ M_m \beta_m \left[\beta_m - \frac{\sinh \beta_m h}{h} \right] \sin \beta_m x \right\} \\ & \pm \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ N_m \beta_m \left[\beta_m + \frac{\sinh \beta_m h}{h} \right] \sin \beta_m x \right\} \\ & \dots\dots\dots(4-22) \end{aligned}$$

式(21), (22)は式(15)に示すようにフランジ部分との接続が条件となる。係数 M_m, N_m を求めるに際して、式(21), (22)を便宜上 x に関するフーリエ表式に直すことを考えよう。このための予備的な操作としてつぎのような変換を考える。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{\alpha_n^2} \cdot \frac{\cosh \alpha_n(x-l/2)}{\cosh \alpha_n l/2} \right\} \\ & = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[\frac{\beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cdot \frac{4}{l} \sin \beta_m x \right] \right\} \\ & = \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \right] \cdot \frac{4}{\beta_m l} \sin \beta_m x \right\} \\ & = \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h \sinh \beta_m h/2}{\beta_m \cosh \beta_m h/2} \right) \cdot \frac{1}{\beta_m l} \sin \beta_m x \right\} \\ & \dots\dots\dots(4-23) \end{aligned}$$

および

$$1 = \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{4}{\beta_m l} \sin \beta_m x \right\} \dots\dots\dots(4-24)$$

式(23), (24)のフーリエ変換を使って式(21), (22)

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \mp \frac{a_1 h}{2} \left(x - \frac{l}{2} \right) \\ & \mp \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot \frac{4 a_1 h^2}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{(\beta_m h \cosh \beta_m h/2 - 2 \sinh \beta_m h/2)^2 \cos \beta_m x}{[\sinh \beta_m h - \beta_m h + 4 \varphi \beta_m h (\sinh \beta_m h/2)^2] \beta_m^3 h^3} \right\} \\ & \mp \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{(8 a_1 h^2 \varphi + 16 a_2) \cdot (\sinh \beta_m h/2)^2 \cos \beta_m x}{[\sinh \beta_m h - \beta_m h + 4 \varphi \beta_m h (\sinh \beta_m h/2)^2] \beta_m^2 l h} \right\} \dots\dots\dots(4-26) \end{aligned}$$

式(26)はウェブの上下縁すなわち上下のフランジの軸応力度分布をフーリエ展開で与えたものである。第1項は単純理論によるものの解であるので、第2項と第3項の表式が両端でそり拘束されることによる2次のな軸応力度を与える。

式(26)の誘導に当たって、 a_1, a_2, a_3 の定数にはまだ式(12)を代入していない。もしフランジが幅の広いものであれば、有効幅がフーリエの各項ごとに異なり、当然 φ の値がフーリエの各項ごとに変化することを慮ったからである。いまフランジの有効幅の減少を考える必要がなければ、式(26)の第3項は恒等的に0となり、つぎの簡略な表現式に落ち着く。上下のフランジについて複号で示せば

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_{x0} \mp & \frac{48(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot \frac{\tau_0}{(1+6\varphi)} \\ & \times \frac{h}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ k_1(m\mu) \cos \frac{m\pi x}{l} \right\} \dots\dots(4-27) \end{aligned}$$

ただし、 $k_1(m\mu)$ はつぎのように決めた数値である。

$$k_1(\mu) = \frac{(\mu \cosh \mu - \sinh \mu)^2}{\sinh 2\mu - 2\mu + 8\varphi\mu(\sinh \mu)^2} \cdot \frac{1}{2\mu^3} \dots\dots\dots(4-28)$$

を式(15)に代入し、係数 M_m, N_m を比較するように与えたとつぎようになる。ここに $y=0$ の縁では複号の上を、また φ_U, φ_L の複表示は $y=0$ では φ_U を使い、 $y=h$ では複号の下を使い φ_L を代入すると約束して示すと、フーリエの各項ごとに

$$\begin{aligned} & M_m \left\{ \beta_m \left[\beta_m - \frac{\sinh \beta_m h}{h} \right] - \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) 4 \beta_m^2 \left(\frac{\sinh \beta_m h}{2} \right)^2 \right\} \\ & \pm N_m \left\{ \beta_m \left[\beta_m + \frac{\sinh \beta_m h}{h} \right] \right. \\ & \left. + \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) 4 \beta_m^2 \left(\cosh \frac{\beta_m h}{2} \right)^2 \right\} \\ & = \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot 2 a_1 \left[1 + 4 \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) \right] \\ & \times \left[\frac{h^2}{2} - \frac{h \sinh \beta_m h/2}{\beta_m \cosh \beta_m h/2} \right] \cdot \frac{1}{\beta_m l} \\ & \pm \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{2 a_2}{h} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{h \sinh \beta_m h/2}{\beta_m \cosh \beta_m h/2} \right] \cdot \frac{1}{\beta_m l} \\ & + \left\{ 2 a_1 h^2 \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) \mp 2 a_2 h \left[1 + 2 \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) \right] + 4 a_3 \right\} \frac{1}{\beta_m l} \\ & \dots\dots\dots(4-25) \end{aligned}$$

式(25)は M_m, N_m に関する連立方程式であるので解ける。この解を示すと冗長になるし、また後で説明するが、数値的にも大して重要ではないから、簡単な場合として $\varphi_U = \varphi_L = \varphi$ とした場合の解を求め、ウェブの上下縁での軸応力度分布を式(21)から求める。

$$\mu = \pi h/2l, \quad \varphi = A/th$$

$k_1(\mu)$ は μ に関する係数でありつぎの性質がある。

$$\left. \begin{aligned} \mu \rightarrow 0 \quad k_1(\mu) & \rightarrow \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1+6\varphi} \\ \mu \rightarrow \infty \quad k_1(\mu) & \rightarrow \frac{1}{16\mu^2\varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-29)$$

(4) 数値的な検討

式(26)もしくは式(27)が、具体的に実用的な計算式であるかどうかは $k_1(\mu)$ の数値的な性質に左右される。 φ の値を種々に変え、 μ の値を実際のプレートガーダーに起こりうる寸法で決めて電子計算機を使って数値計算を試みて見たが、数値的に $k_1(\mu)$ の収束度はいじむしく悪い。フーリエ級数の展開式の性質から、 $k_1(\mu)$ が μ^{-2} の割合で収束するものは数値計算に乗るが、式(29)に示すように μ の小さい範囲で定数になるものはフーリエの各項を相当の多項取らないと良い結果を示さない。

たとえば、 $\varphi=1$ の場合、 $\mu=0.1$ のとき $k_1(\mu)=5.9 \times 10^{-3}$ 、 $\mu=1.0$ のとき $k_1(\mu)=5.3 \times 10^{-3}$ 、 $\mu=4.0$ のとき $k_1(\mu)=2.1 \times 10^{-3}$ 程度であってお話しにならない。

ひるがえって、式(26)または式(27)は、理論的には意味があっても実際に役に立たない形であるから、有意の表現になるように吟味する。この立場に立つには、高さ h にくらべて l がいちじるしく大きい極限を考えるのが妥当である。というのも、本来、そり拘束による応力は局部的なものであるから、 l が十分大きければ急速に減少する性質のものである。(2) で得られた結果をもとにして $l/h \gg 0$ の表式を論ずることとする。

(5) 桁長 l が h にくらべて大きいときの表式

(3) でシアラグの解を定めたそのままの形で、 $l/h \gg 0$ とし、すなわち β_m が十分微小である極限を考えよう。式(25)において β_m が十分小でもつりあうためには

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \left(\mp \frac{h}{2} a_1 + a_2 \right) \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) \pm \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot \frac{8 a_1}{h} \cdot \frac{1}{\alpha_n^3} e^{-\alpha_n x} \right\} \\ & + \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot \frac{a_1 h^3}{6 K^2} [(\varphi_U - \varphi_L) \mp 3(1+3\varphi_U + 3\varphi_L + 8\varphi_U \varphi_L)] \frac{\cos \beta_m x}{l} \right\} \\ & + \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{a_2 h^2}{6 K} [\pm 3(\varphi_U - \varphi_L) - (1+3\varphi_U + 3\varphi_L)] \frac{\cos \beta_m x}{l} \right\} \dots \dots \dots (4-31) \end{aligned}$$

ただし

$$K = 1 + 4(\varphi_U + \varphi_L) + 12\varphi_U \varphi_L \dots \dots \dots (4-32)$$

ここで式(23)のフーリエ展開の関係が β_m を十分微小にしてもつりあうと考えると、 $x \geq 0$ の近傍で

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{\alpha_n^2} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (x-l/2)}{\cosh \alpha_n l/2} \right\} \rightarrow \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n x} \right\}$$

および

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h \sinh \beta_m h/2}{\beta_m \cosh \beta_m h/2} \right) \frac{1}{\beta_m l} \sin \beta_m x \right\} \rightarrow \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{h^4}{24} \cdot \frac{\beta_m}{l} \sin \beta_m x$$

すなわち、 l が十分大きければ、形式的につきの置き換えが可能である。

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{h^4}{24} \cdot \frac{\beta_m}{l} \sin \beta_m x \rightarrow \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n x} \dots \dots \dots (4-33)$$

式(33)を x で形式的に積分した形にして式(31)に代入することにより、ウェブの上下縁での軸応力度の大きさを与える一般的な表式が得られる。 x の小さい範囲で、

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \left(\mp \frac{h}{2} a_1 + a_2 \right) \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) + \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot \frac{4 a_1}{h} \left[\frac{(\varphi_U - \varphi_L) \pm (1+\varphi_U + \varphi_L)}{1+4(\varphi_U + \varphi_L) + 12\varphi_U \varphi_L} \right] \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{e^{-\alpha_n x}}{\alpha_n^3} \\ & + \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{4 a_2}{h^2} \left[\frac{\pm 3(\varphi_U - \varphi_L) - (1+3\varphi_U + 3\varphi_L)}{1+4(\varphi_U + \varphi_L) + 12\varphi_U \varphi_L} \right] \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{e^{-\alpha_n x}}{\alpha_n^3} \dots \dots \dots (4-34) \end{aligned}$$

a_1, a_2 を式(7)で与えた形にすると

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \sigma_{x_0} + \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot \frac{48 \tau_0}{\pi^2} \left[\frac{(\varphi_U - \varphi_L) \cdot (1+\varphi_U + \varphi_L) \mp (1+\varphi_U + \varphi_L)^2}{(1+4\varphi_U + 4\varphi_L + 12\varphi_U \varphi_L)^2} \right] \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi x}{h}} \\ & + \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{24 \tau_0}{\pi^2} \left[\frac{\pm 3(\varphi_U - \varphi_L)^2 - (1+3\varphi_U + 3\varphi_L)(\varphi_U - \varphi_L)}{(1+4\varphi_U + 4\varphi_L + 12\varphi_U \varphi_L)^2} \right] \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi x}{h}} \dots \dots \dots (4-35) \end{aligned}$$

式(35)の σ_{x_0} を除く項は、シアラグによってウェブの上下縁の軸応力度、すなわちフランジの応力を与える関係式である。 $x=0$ でそりが拘束され、桁長が十分長いときの表式である。 σ_{x_0} はその部材が構造物として受ける任意の応力度(単純理論による)である。二次的な応力度の符号は、せん断応力度 τ_0 の符号によって判断される。

二次的な応力度の減少は式(35)からわかるように対数的に減少することがわかり、桁高 h と同じ距離離れば4%程度に減少する。また数値計算上からも級数は n^{-3} の収束であり実用的である。

$$\begin{aligned} & - \frac{\beta_m^4 h^2}{6} \left[1 + 6 \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) \right] M_m \pm 2 \beta_m^2 \left[1 + 2 \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) \right] \cdot N_m \\ & = \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot 2 a_1 \left[1 + 4 \left(\frac{\varphi_U}{\varphi_L} \right) \right] \cdot \frac{h^4}{24} \cdot \frac{\beta_m}{l} \\ & \pm \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{2 a_2}{h} \cdot \frac{h^4}{24} \cdot \frac{\beta_m}{l} \dots \dots \dots (4-30) \end{aligned}$$

式(25)から式(30)を求めるに当たって、 M_m, N_m の係数は β_m に関するテイラー展開の初項を取り、また式(25)の右辺の最後の項は省略する。この理由は、 l が十分大きいときは、フランジの有効幅の減少を考慮する必要がないからである。式(30)を解いて、 M_m, N_m を定め、これを式(21)に代入すると、 β_m が十分微小であるときの表式がつぎのようになる。フランジの上下縁での応力度は

なお補足的に説明するが、最初から l が無限大であるとして応力関数を $F_1(x, y)$ の形だけを考えると、境界条件の式(15)を常に満たす解がない。まわりくどいようであるが有限の長さの l としての解から導きだすこととなった。

(6) 二、三の特別は場合のシアラグ

a) 上下対称なプレート ガーダーのウェブ縁 スパン l のプレート ガーダーの支間中央に P の集中荷重が作用しているときの荷重作用点のウェブ上下縁の応力度を考える。この場合、支間中央はそり拘束端と同性質であり、また荷重は剛な垂直補鋼材を介して働くとする。

$\varphi_U = \varphi_L = \varphi$ として式 (35) を整理すると

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} \mp \frac{(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot \frac{48}{\pi^3} \cdot \frac{\tau_0}{(1+6\varphi)^2} \times \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi x}{h}} \dots\dots\dots(4-36)$$

図-1 の符号を考え、これを支間中央から右半分の座標を $(0 \leq x \leq l/2)$ の間に考えて σ_{x_0} と τ_0 とを定めると

$$\begin{cases} \sigma_{x_0} = \mp 3 \left(\frac{l}{h} \right) \cdot \frac{P}{2th} \cdot \frac{1}{(1+6\varphi)} \\ \tau_0 = -\frac{P}{2th} \end{cases}$$

$n=1$ の第一項を取り、 $\nu=0.3$ として $x=0$ では

$$\therefore \sigma_x = \sigma_{x_0} \left[1 - 0.36 \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{1+6\varphi} \right] \dots\dots\dots(4-37)$$

ガーダのウェブでは、フランジ部分を簡単に考えるかぎり、せん断ひずみを拘束することによって生ずる軸応力度は、単純理論のそれを打ち消す方向に生ずる。数値的には大したことはないが、たとえば $\varphi=0.17$, $h/l=1/3.6$ では約 5% である。荷重作用点から $h/2$ 程度離れると、その影響は 1% にまで下がってしまうから、ほとんど問題とするには至らないであろう。

b) 曲げを受ける T ビームのウェブ 先の 5. の場合と同じように、支間 l の T ビームの支間中央に P の集中荷重が作用するとして荷重直下の応力を定めてみる。フランジのあるほうが圧縮側(上縁)として、 $\varphi_U = \varphi$, $\varphi_L = 0$ とすれば、
 $y=0$,

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} \mp \left[\frac{2(2+\nu)}{(3+\nu)} \cdot (1+\varphi) + \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \varphi \right] \times \frac{24\tau_0}{\pi^3} \cdot \frac{1}{(1+4\varphi)^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi x}{h}} \dots\dots\dots(4-38)$$

$y=h$,

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \left[\frac{2(2+\nu)}{(3+\nu)} (1+\varphi)(1+2\varphi) - \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} \varphi(1+6\varphi) \right] \frac{24\tau_0}{\pi^3} \cdot \frac{1}{(1+4\varphi)^2} \times \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi x}{h}} \dots\dots\dots(4-39)$$

先の場合と同じく支間 l の T ビームの支間中央に P の集中荷重が作用するとして定めると

$$\begin{cases} \sigma_{x_0} = \left(\frac{P}{2th} \right) \cdot \frac{3l}{h} \cdot \frac{\mp(1+\varphi) + \varphi}{1+4\varphi} \\ \tau_0 = -\frac{P}{2th} \end{cases}$$

数値的な比較のために $\varphi=1$, $n=1$, $\nu=0.3$ とすると

$$\begin{cases} y=0, & \sigma_x = \sigma_{x_0}(1-0.23h/l) \\ y=h, & \sigma_x = \sigma_{x_0}(1+0.05h/l) \end{cases}$$

T ビームのウェブに生ずるシアラグは、フランジに接続するほうの側は曲げによる軸応力度のピークを打ち消

すように生じ、下縁では逆に応力度の増加となるように作用する。

c) 幅の広いフランジの有効幅 幅を h , 板厚 t のフランジプレートが左右の端にウェブを等価した断面積 A_U, A_L をつければ、式 (34) はそのままフランジのシアラグの解である。この際、板の周辺条件として $\sigma_y=0$ が立式の際の最初の仮定になっているので、対象は矩形断面のフランジ、または逆 L 型のフランジを対象とするときに限られる。式 (34) に代入する定数は $a_1=0$ 。 a_2 はフランジの中立軸からの距離 δ , 全体の桁の断面二次モーメントと全せん断力 Q より

$$a_2 = -\frac{Q}{J} \delta \dots\dots\dots(4-40)$$

ウェブの等価断面積は $A_U + A_L = th$ となるので、

$$\varphi_U + \varphi_L = 1 \dots\dots\dots(4-41)$$

したがって、式 (34) は

$$\sigma_x = a_2 \left(x - \frac{l}{2} \right) - \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)} 4a_2 \cdot \frac{4 \pm (1-2\varphi_U)}{(5+12\varphi_U-12\varphi_U^2)} \times \frac{h}{\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi x}{h}} \right\} \dots\dots\dots(4-42)$$

左右対称なフランジの場合、ウェブの線上の軸応力度を求めると $\varphi=0.5$ として

$$\sigma_x = a_2 \left(x - \frac{l}{2} \right) - \frac{2(2+\nu)}{(1+\nu)} \times \frac{h}{\pi^3} a_2 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi x}{h}} \dots\dots\dots(4-43)$$

長さ l の単純桁の支間中央に集中荷重 P が作用するとしてウェブ線上の軸応力度を求めると、

$$\sigma_x = \sigma_{x_0}(1+0.23h/l) \dots\dots\dots(4-44)$$

逆 L 型のフランジの場合、ウェブ線上の軸応力度に関しては、

$$\sigma_x = \sigma_{x_0}(1+0.46h/l) \dots\dots\dots(4-45)$$

フランジの自由端では

$$\sigma_x = \sigma_{x_0}(1-0.27h/l) \dots\dots\dots(4-46)$$

の値となる。

幅の広いフランジ プレートを持つプレート ガーダーではフランジのウェブ接続点でシアラグにより軸応力度が増加する。この増加量は、せん断応力が急変する箇所のそり拘束によって生ずる局所的なものであるから、曲げによる軸応力度には本来無関係である。曲げ応力度とともにこの局所的な応力度を考えたものが、いわゆる有効幅である。式(39)~(41)からわかるように、曲げ応力度とともに考えると、局部応力度によって単純理論のそれよりも増加する割合は板幅 h とスパン l との比によって見掛け上変化する。ダブル ウェブの場合、ウェブ間隔を h とし、スパンを l とすれば $h/l=0.2$ の寸法で応力度の超過率は約 5% である。この大きさは $h/2$ だけ載荷点からそれると指数関数的に減少して 1% 程度の影響

しかない。

なお、ウェブとフランジとの両方の相互の影響で、フランジとウェブの接続線上では単純理論の軸応力度とは異なった局部応力が生ずることが考えられるが、式(37)からわかるように、ウェブのシアラグは応力度を減少させフランジのシアラグは応力度を増加させるから、適当なフランジ・ウェブの断面積比を選べば局部応力の影響を最小に止めることが可能になる。

(7) 結語ならびに総括

4. はシアラグという立場から拘束縁の局部応力だけを考えて、ねじれの問題よりさらに一般化して理論的展開を行なったために、有効幅に対する解決、プレートガーダーのウェブのシアラグの問題までも整理された。再び実験に供した矩形断面のそり拘束縁の応力について考えるとき、この場合の単純なせん断応力度 τ_0 は、矩形断面においては式(4-3)の M_2^T によるものであるから、幅 b_1 のほうに働くせん断応力度の平均値が

$$\tau_0' = \frac{M_2^T}{(b_2 - b_1)tb_1} \dots\dots\dots(4-47)$$

で与えられることになる。矩形断面の定数を入れて整理すると

$$\tau_0' = \tau_0 \cdot \frac{2b_2}{(b_2 - b_1) + 2l^2/(b_2 - b_1)(1 + \nu)} \dots\dots\dots(4-48)$$

数値的には $b_1 = 21$ cm, $b_2 = 66$ cm, $l = 175$ cm とすると、

$$\tau_0' \approx 0.12 \tau_0$$

ここに τ_0 は単純ねじれと考えたときのせん断応力度である。式(4-36)からわかるように、軸応力度の最大値は $\varphi = 0$ としても、軸応力度の最大は

$$\sigma' = 0.13 \tau_0$$

また、この応力度は 4. (6) a) からわかるように、軸応力度のピークをやわらげるように符号が逆になるから、拘束縁では式(4-5)で計算された軸応力度よりも小さくあらわれる傾向になる。

5. 補 遺

本報文は橋梁部材のねじれに関連して著者が 1960 年頃から行なってきた実験のデータおよび理論研究の一部である。研究の端著は、首都高速道路公団より東大 奥村研究室に依託された曲線箱桁橋の実験的研究および引続いて橋梁部材のねじれ試験とした委託研究である。

ねじれに関する実験はデータが少なく、実験方法としても研究すべき点も多いが、ここに発表した報文中のデータは比較的まとまった形で得られたので、理論的解釈を混えて取りまとめた。

この実験の実施は東大 奥村研究室の佐々木利視氏を始めとする方々の協力を得た。また、昭和 38 年度の卒業実験のテーマとして、上野康之、鳥井邦夫の両君がデータの整理に労を取ってくれた。数値計算のプログラム等は大学院の深沢泰晴君の尽力を得た。これらの方に感謝の意を表したい。また、データとして不揃いなのは実験実施にともなう諸種の過誤によるが、試験体そのものの製作は入念であった。製作者の宮地鉄工所 K K の入念な工作に感謝したい。また本報文作製に当って終始ご助言と適切な指導を仰いだ奥村教授に感謝の意を表したい。なお、参考文献に関しては今回は載せていないが、文献についての調査がつきしだい別の機会にまとめた。

(1963. 6. 20・受付)