

# パワースペクトル解析の応用について

## APPLICATION OF THE POWER SPECTRAL ANALYSIS TO THE DYNAMIC BEHAVIORS OF STRUCTURES

中川建治\*

By Kenji Nakagawa

### 1. まえがき

構造物の動的解析は、多くの学者によって研究されてきた問題であり、最近のディジタル型、あるいは、アナログ型電子計算機の普及によって、固有値の計算をはじめとして、数値解析の手段が簡易化されたために、より多くのすぐれた研究成果が発表されるようになった。しかし、従来の研究は、おもに、構造物の特性に関するもの、あるいは、ある定まった外乱に対する応答に関するものであって、外乱そのものに着目して、ランダムな外乱に対する応答を論じたものは比較的少ないようと思われる。

振動強制力となる外乱は、時間的に、あるいは、空間的にあらかじめ一義的に定まっている場合もあるが、ほとんどの場合は、地震波のように、ある種の制約条件によって拘束されているとしても、ランダムであって確率統計的に取り扱うことによってはじめて理論的に把握されるようなものである。この意味から、最近では、ランダム過程 (random process, stochastic random process) の研究は、工学のあらゆる分野にわたって広く行なわれているのである。

ランダム過程、すなわち、定常確率過程の理論的取り扱いは、N. Wiener<sup>5), 6)</sup> によるものであり、工学の方面では、S.O.Rice<sup>4)</sup> が最初に電子管の散弾雑音を定常過程として、いわゆる、パワースペクトル解析 (Power Spectral Analysis) によって論じている。その後、工学の各分野においてパワースペクトル解析が応用され、あるいは発展され、めざましい研究成果があげられている。たとえば、構造物のランダム振動に関しては、まず、アメリカの NACA (後に NASA) において行なわれている航空機の機体の安全性、および、安定性に関する広範囲な研究があげられよう<sup>30)~43)</sup>。これは、滑走時には滑走路の凹凸を車輪に作用するランダム外力とし、飛行時には空気の密度や流れの乱れを機体に作用するランダム外力とみなして解析したものであって、非常に興味深い研究である。これらのほかに、わが国におけるもの<sup>10)~14)</sup>、あるいは、外国における研究<sup>15)~29)</sup>で、それぞれの分野で注目に値する論文が数多く見受けられる。

さて、ランダム過程としてパワー スペクトル解析法により論すべき問題は、土木工学の分野においても非常に多い。たとえば、地震動をランダム過程とみなした耐震工学の問題があり、そのほかに、構造物の疲労現象、水理学における乱流理論、交通工学における交通量の問題などはその一端であろう。しかし、遺憾ながら、ランダム過程について多くの有意義な情報を与えてくれるパワースペクトル解析は、ほかの工学に比較して、土木工学の分野では、まだ、あまりなじまれていないようである。筆者は、パワースペクトル解析を土木工学の諸分野にも広く応用すべく研究しているが、本文は、パワースペクトル解析の概念の紹介をかねて、ディジタル計算機を使用したシミュレーションによって、非線型振動の簡単な問題に検討を加えてみたものである。すなわち、耐震工学の問題として重要な弾塑性の復元特性をもった1自由度の振動系に、地震波のようなランダムな外力が作用したときに、いかなる残留ひずみが予想されるかについて、パワースペクトル解析により論じた。

### 2. パワースペクトル解析

一般に、ランダム過程 (random process) といつても、対象とする個々の問題の内容によって、それぞれ異なったランダム過程としての性質が考えられるので、本文では、つきのような性質をもったランダム過程を定義する。 $f(t, \zeta)$  をランダムな確率過程として、 $t$  は時間を、 $\zeta$  は確率係数を意味するパラメーターとする。しかし、特に必要な場合以外は、 $f(t, \zeta)$  のかわりに、 $f(t)$  としてランダム過程を表わすことにする。

「ランダム過程  $f(t, \zeta)$  は、エルゴード性を備えた正規定常確率過程で、平均値を 0 として、有限な分散をもつ定常過程である」。この定義を具体的に表現すれば、ランダム過程  $f(t, \zeta)$  は、つきのような性質をもつランダム関数となる。

1° 実験、あるいは、観測によって得られたデータとしてのランダム関数  $f_0(t)$  は、ある実数値ランダム過程  $f(t)$  の見本過程であるとみなす。

2°  $f(t)$  の値は、 $t$  の関数としてランダムであり、平均値 0 の正規分布にしたがい、任意の  $t$  と  $\tau$  に対して、 $f(t)$  と  $f(t+\tau)$  とは全く同一の分布  $N(0, \sigma^2)$  にした

\* 正会員 京大工修 名古屋大学助手 工学部土木工学教室

がうものとする。平均値  $E\{f(t)\}$  が 0 とならない場合は、平均値だけ座標変換することにより、所定のランダム関数となる。もし、 $f(t)$  が、それぞれ有限な平均値と分散をもち、特定の分布にしたがうランダム関数  $f_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) の総和  $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)$  として表わされる場合は、 $n \rightarrow \infty$  にしたがって、中心極限定理によって、 $f(t)$  の分布は正規分布に近づくことが知られている<sup>1), 2)</sup>。

$$3^\circ \quad E\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \zeta) dP(\zeta) \quad (2.1)$$

を空間平均、あるいは、数学平均という。他方、

$$\bar{f}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt \quad (2.2)$$

を時間平均、見本平均、あるいは、経験平均と称し、 $f(t)$  がエルゴード性をもつということは、

$$\bar{f}(t) = E\{f(t)\} \quad (2.3)$$

が成立することである。このエルゴード性は、全く等しい環境条件のもとにつくり返し試行することの不可能なほんどの観測結果の統計的処理に対して、非常に重要な意味をふくんでいる。

さて、このようなランダム関数に対するパワースペクトル解析については、文献 1)~7) などにおいて、非常にくわしく述べてあるので、理論を進めるにあたって必要と思われる関係式のみを引用しつつ、紹介もかねて、つぎのように、パワースペクトル解析について略記する。

$$r(\tau) = E\{f(t)f(t+\tau)\} \quad (2.4)$$

を  $f(t)$  の自己共変量 (auto-covariance) という。 $r(\tau)$  は、Bochner の定理によって、つぎのようにスペクトル分解が可能である<sup>1)</sup>。

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\Gamma(\omega) \quad (2.5)$$

ここで  $\Gamma(\omega)$  を  $f(\tau)$  のスペクトル測度と称し、 $(\tau)$  を  $f(t)$  のスペクトル関数といふ。 $f(\tau)$  のエルゴード性を仮定しているので、つぎの式が成立する。

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f(t+\tau) dt \quad (2.6)$$

$$\simeq r(\tau) \quad (2.7)$$

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} s(\omega) d\omega \quad (2.8)$$

$$\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} s(x) dx \quad (2.9)$$

さて、ランダム過程  $f(t)$  に対して

$$G(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-it\lambda} - 1}{-it} f(t) dt \quad (2.10)$$

を定義すれば、つぎの反転公式が成立する。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dG(\lambda) \quad (2.11)$$

$$E\{G(\lambda)\} = 0 \quad (2.12)$$

なお、 $f(t)$  のスペクトル測度  $\Gamma(\omega)$  については、

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} s(\omega) d\omega = |G(\omega_2) - G(\omega_1)|^2 \quad (2.13)$$

$$s(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|G(\omega + \epsilon) - G(\omega - \epsilon)|^2}{2\epsilon} \quad (2.14)$$

$$\varphi(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{|G(\omega + \epsilon) - G(\omega - \epsilon)|^2}{2\epsilon} d\omega \quad (2.15)$$

を得る。 $f(t)$  の分散  $\sigma^2$  は、

$$\sigma^2 = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) d\omega \quad (2.16)$$

となる。 $s(\omega)$  は  $L^2(-\infty, \infty)$  関数族であるから、式 (2.8) の反転公式は、Fourier 変換によってつぎのようになる。

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.17)$$

式 (2.10) で定義した  $G(\lambda)$  は、 $a < b \leq c < d$  に対して、

$$E[\{G(d) - G(c)\} \overline{\{G(b) - G(a)\}}] = 0 \quad (2.18)$$

を満足するものであって、この性質を、無相関増分をもつといふ。 $G(\lambda)$  が無相関増分をもてば、連続関数  $h(\lambda)$  に対して、

$$U = \int_a^b h(\lambda) dG(\lambda) \quad (2.19)$$

が存在して、

$$E(|U|^2) = \int_a^b |h(\lambda)|^2 s(\omega) d\omega \quad (2.20)$$

が成立する<sup>2)</sup>。

ここで、S.O. Rice<sup>4)</sup> にしたがって、 $s(\omega)$  を  $f(t)$  の Power Spectral Density Function、略して、パワースペクトルとよぶことにする。パワースペクトルの物理的意義は、 $f(t)$  の 2 乗平均に対する周期成分の貢献する程度を表わすといえよう。

S.O. Rice<sup>4)</sup> は、電子管の散弾雑音を  $f_0(t)$  として、パワースペクトルのつぎのようによく定義している。

$$F_T(\nu) = \int_0^T f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (2.21)$$

$$S_0(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{21 F_T(\nu)^2}{T} \quad (2.22)$$

反転公式は、つぎのようになる。

$$\varphi_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_0(t) f_0(t+\tau) dt \quad (2.23)$$

$$S_0(\nu) = 4 \int_0^{\infty} \varphi_0(\tau) \cos 2\pi\nu\tau d\tau \quad (2.24)$$

$$\varphi_0(\tau) = \int_0^{\infty} S_0(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu \quad (2.25)$$

ただし、 $f_0(t)$  は、周期成分をもたないランダム過程としている。

ランダム関数  $f(t)$  の時間に関する微分  $f'(t)$  も、 $f(t)$  と同様にランダム関数であり、 $f(t)$  とはそれぞれ独立であるから、上記の諸関係は  $f'(t)$  に対してもそのまま成立する。 $\overline{f'(t)} \neq 0$  となる場合は、 $f'(t)$  のかわりに、 $\{f'(t) - \overline{f'(t)}\}$  を用いればよい。 $f(t)$ 、および、 $f'(t)$  に関するそれぞれの共変量は、つぎのようになる。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f(t+\tau) dt = \varphi(\tau) \quad \dots(2.26)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f'(t+\tau) dt = \varphi'(\tau) \quad \dots(2.27)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f'(t) f(t+\tau) dt = -\varphi(\tau) \quad \dots(2.28)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f'(t) f'(t+\tau) dt = -\varphi''(\tau) \quad \dots(2.29)$$

これらの関係から導かれる簡単な分布関数を求める。

a) 時刻  $t$ において、 $f(t)=\xi$ ,  $f'(t)=\eta$ となる確率密度関数は、つぎのようになる。

$$p_a(t: \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-\varphi(0)\varphi''(0)}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\varphi(0)} + \frac{\eta^2}{2\varphi''(0)} \right\} \quad \dots(2.30)$$

b)  $p_a(t: \xi, \eta)$ は  $t$ に無関係になるので、 $(t, t+dt)$ の区間で  $\xi=0$ となる確率密度関数  $p_b(t: 0, \eta)$ は

$$p_b(t: 0, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-\varphi(0)\varphi''(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| \exp \left\{ \frac{\eta^2}{2\varphi''(0)} \right\} d\eta \quad \dots(2.31)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} \right\}^{1/2}$$

となる。これは、単位時間あたりの  $f(t)=0$ となる回数  $N$ を意味する。パワースペクトルによって表わせば、

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad \dots(2.32)$$

$$\varphi''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega \quad \dots(2.33)$$

であるから、 $N$ はつぎのようになる。

$$N = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right\}^{1/2} \quad \dots(2.34)$$

c) 同様に、 $(t, t+dt)$ の区間で正の勾配をもって  $f(t)=\xi$ となる確率密度関数  $p_c(t, \xi)$ は、近似的につぎのようにして与えられる。

$$p_c(t, \xi) = \int_0^{\infty} \eta p_a(t; \xi, \eta) d\eta = \frac{N}{2} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\varphi(0)} \right\} \quad \dots(2.35)$$

ランダム関数  $f(t)$ を1自由度の線型系の入力関数とした場合の応答  $y(t)$ は、つぎのように  $Y(t)$ のパワースペクトルとして得られる。

$$\ddot{Y} + 2\zeta_1\omega_0 \dot{Y} + \omega_0^2 Y = f(t) \quad \dots(2.36)$$

ここで、 $\zeta$ は critical dampingに対する減衰定数で、 $\omega_0$ は系の固有円振動数である。この系のインパルス応答関数  $h(t)$ のフーリエ変換を  $H(\omega)$ とすれば、

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad \dots(2.37)$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_0} \quad \dots(2.38)$$

$Y(t)$ および、 $Y'(\tau)$ のパワースペクトル  $S_Y(\omega)$ ,  $S_v(\omega)$ は、それぞれ、つぎのようにして求められる。

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) \quad \dots(2.39)$$

$$S_v(\omega) = |H(\omega)|^2 \omega^2 S_f(\omega) \quad \dots(2.40)$$

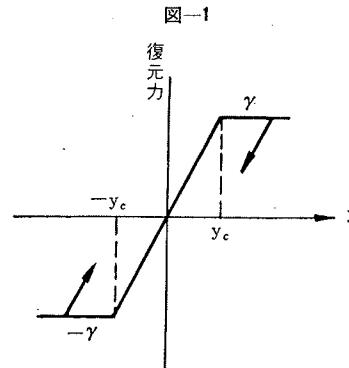
ここで、 $S_f(\omega)$ は入力関数  $f(t)$ のパワースペクトルである。したがって、応答  $Y(t)$ および  $Y'(\tau)$ の2乗平均は、式(2.16)の関係より、つぎのように求められる。

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \quad \dots(2.41)$$

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \quad \dots(2.42)$$

### 3. 非線型振動に対する考察(その1)

パワースペクトル解析の理論を、非線型振動の分野に応用することは、非常に困難であり、この方面的研究は、線型系に対する研究に比較して、きわめて少ない。ここに述べる非線型振動に対する応用例も、いろいろな仮定を設けて、きわめて単純化したものである。



振動系は、1自由度系で、図-1のような弾塑性の復元特性をもつ系であると仮定する。すなわち、弾性限界内では、バネ定数  $K$  の spring-mass 系として応答し、弾性限界を越えた部分では、完全塑性として働き、復元力は  $-Ky_c$  となるものである。一般に、振動方程式は、 $\pm y_c$  を弾性限界として、つぎのようになる。

$$\ddot{y} + 2\zeta_1\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = f(t) \quad |y| \leq y_c \quad \dots(3.1)$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_1\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y_c = f(t) \quad y > y_c \quad \dots(3.2)$$

ここで、 $\omega_0$ は構造物が弾性域で振動する場合の固有円振動数、 $\zeta_1(\zeta_2)$ は弾性域(塑性域)における減衰係数の critical dampingに対する比率を示す。

外乱  $f(t)$ は定常過程であり、 $E\{f(t)\}=0$ を満足し、2乗平均(分散)を  $\sigma_f^2 = E\{f(t)^2\}$ として、正規分布、 $N(0, \sigma_f^2)$ にしたがうものと仮定する。

もし、この系が、完全弾性体として線型振動をするならば、 $f(t)$ に対する応答  $y(t)$ は、前節の理論により、2乗平均  $\sigma_y^2$ をもった正規分布  $N(0, \sigma_y^2)$ にしたがうことになる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \\ H(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\zeta_1\omega_0\omega} \\ S_f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_f(\tau) e^{i\omega\tau} dt \\ \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad \dots(3.3)$$

となる。したがって、この場合、応答  $\xi = y(t)$ 、および、 $\eta = y'(t)$  との確率密度関数  $p(\xi, \eta)$  は、式(2.30)より、

$$p(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_v} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad \dots(3.4)$$

となる。ここで、 $\sigma_v^2$  は  $y'(t)$  の 2 乗平均で、式(2.42)より

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \quad \dots(3.5)$$

である。

しかし、この系は弾塑性の復元特性をもつので、弾性域では上式の関係は成立するが、 $|y_c| < |y(t)|$  の範囲では、初期条件を、 $y(t_0) = \pm y_c$ 、 $y'(t_0) = \eta$  として式(3.2)より応答を求めるべきである。もし、この振動系においては、きわめてまれにしか塑性域へ入ることがないものと仮定するならば、時刻  $t_0$ において、速度  $\eta$  をもって、応答  $y(t)$  が弾性域から塑性域へ入る確率密度関数は、近似的に式(3.4)より、

$$p(y_c, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_v} \exp\left\{-\frac{y_c^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta^2}{2\sigma_v^2}\right\} \quad \dots(3.6)$$

として与えられよう。

式(3.2)を、初期条件  $y(0) = \pm y_c$ 、 $y'(0) = \eta$  として解けば、つぎのようになる。

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta_2\omega_0} \int_0^t \{1 - e^{-2\zeta_2\omega_0(t-\tau)}\} f(\tau) d\tau + \frac{\eta}{2\zeta_2\omega_0} (1 - e^{-2\zeta_2\omega_0 t}) \pm y_c \left\{1 + \frac{1}{4\zeta_2} (1 - e^{-2\zeta_2\omega_0 t}) - \frac{\omega_0 t}{2\zeta_2}\right\} \quad \dots(3.7)$$

$$y'(t) = \int_0^t e^{2\zeta_2\omega_0(\tau-t)} f(\tau) d\tau \pm y_c \frac{\omega_0}{2\zeta_2} (e^{-2\zeta_2\omega_0 t} - 1) + \eta e^{-2\zeta_2\omega_0 t} \quad \dots(3.8)$$

初速  $\eta$  で塑性域へ入り、速度  $y'$  が単調に変化して  $y' = 0$  となるまでに塑性ひずみ  $\varepsilon(\eta)$  を残し、再び、弾性域でランダム振動をくり返すものとする。塑性ひずみは  $\eta$  の関数であり、 $\eta$  は確率変数である。さらに、 $y_c$  で塑性域へ入る確率と、 $-y_c$  で塑性域に入る確率とは等しいとみなしてよいから、正の塑性ひずみの平均値  $\bar{\varepsilon}$  を求める。まず、式(3.8)において、 $y' = \eta$  より、 $y' = 0$  となるまでの平均時間求めることとする。

$$E\{y'(t)\} = E\left\{\int_0^t e^{2\zeta_2\omega_0(\tau-t)} f(\tau) d\tau + y_c \frac{\omega_0}{2\zeta_2} (e^{-2\zeta_2\omega_0 t} - 1) + \eta e^{-2\zeta_2\omega_0 t}\right\} = 0 \quad \dots(3.9)$$

ここで  $E\{f(t)\} = 0$  を考慮すれば、式(3.9)は、

$$y_c \frac{\omega_0}{2\zeta_2} (e^{-2\zeta_2\omega_0 t} - 1) + \eta e^{-2\zeta_2\omega_0 t} = 0 \quad \dots(3.10)$$

となり、速度が 0 となる平均時間はつぎのように求まる、

$$t = \frac{1}{2\zeta_2\omega_0} \log\left(1 + \frac{2\zeta_2\eta}{\omega_0 y_c}\right) \quad \dots(3.11)$$

式(3.11)を式(3.7)に代入して、1回あたりの塑性ひずみの平均値  $\bar{\varepsilon}$  を求める。

$$\begin{aligned} \varepsilon(\eta) &= y(t) - y_c \\ &= \frac{1}{2\zeta_2\omega_0} \int_0^t \{1 - e^{-2\zeta_2\omega_0(t-\tau)}\} f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\eta^2}{\omega_0^2 y_c + 2\zeta_2\omega_0\eta} + \frac{\eta y_c}{2\zeta_2(\omega_0 y_c + 2\zeta_2\eta)} \\ &\quad - \frac{y_c}{4\zeta_2} \log\left(1 + \frac{2\zeta_2\eta}{\omega_0 y_c}\right) \\ &= \frac{1}{2\zeta_2\omega_0} \int_0^t \{1 - e^{-2\zeta_2\omega_0(t-\tau)}\} f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\eta}{2\zeta_2\omega_0} - \frac{y_c}{4\zeta_2^2} \log\left(1 + \frac{2\zeta_2\eta}{\omega_0 y_c}\right) \quad \dots(3.12) \end{aligned}$$

ここで、 $E\{f(t)\} = 0$  に注意して、 $0 < |2\zeta_2\eta/\omega_0 y_c| < 1$  とすれば、級数展開により、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{y_c}{4\zeta_2^2} \log\left(1 + \frac{2\zeta_2\eta}{\omega_0 y_c}\right) &= \frac{\eta}{2\zeta_2\omega_0 y_c} - \frac{\eta^2}{2\omega_0^2 y_c} \\ &\quad + \frac{2\zeta_2\eta^3}{3\omega_0^3 y_c^2} - \frac{\zeta_2^2\eta^4}{\omega_0^4 y_c^3} + \dots \quad \dots(3.13) \end{aligned}$$

したがって、平均値  $\bar{\varepsilon}$  は  $0 < |2\zeta_2\eta/\omega_0 y_c| < 1$  である場合は式(3.14)の級数解で得られる。

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= E\{\varepsilon(\eta)\} \\ &= E\left\{\frac{\eta^2}{2\omega_0^2 y_c} - \frac{2\zeta_2\eta^3}{3\omega_0^3 y_c^2} + \frac{\zeta_2^2\eta^4}{\omega_0^4 y_c^3} - \dots\right\} \quad \dots(3.14) \end{aligned}$$

$\eta$  の確率密度関数は式(3.6)で与えられている。式(3.13)が成立するためには、 $0 < |2\zeta_2\eta/\omega_0 y_c| < 1$  という条件があるが、確率密度関数の性質より、 $|2\zeta_2\eta/\omega_0 y_c| > 1$  となる確率は非常に小さくなるので、 $\bar{\varepsilon}$  の計算では、 $0 < \eta < \infty$  の区間にについて式(3.14)を平均することによって近似計算を行なう。

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \int_0^\infty \varepsilon(\eta) p(y_c, \eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{y_c^2}{2\sigma_Y^2}} \\ &\quad \times \frac{\sigma_v^2}{4\omega_0^2 y_c} \left\{1 - \frac{16\zeta_2\sigma_y}{3\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} + \frac{6\zeta_2^2\sigma_v^2}{\omega_0^2 y_c^2}\right\} \quad \dots(3.15) \end{aligned}$$

$\bar{\varepsilon}$  は、ある時刻に起こるであろうと思われる正の塑性ひずみの期待値である。しかし、 $\left\{2\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{y_c^2}{2\sigma_Y^2}\right)\right\}^{-1}$  は、正の勾配で  $y_c$  を通過する確率密度であるから、弾性域から塑性域へ入るという条件のもとにおけるその時に生ずる塑性ひずみの期待値  $\tau$  は、近似的に

$$\tau = \frac{\sigma_v^2}{2\omega_0^2 y_c} \left(1 - \frac{16\zeta_2\sigma_y}{3\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} + \frac{6\zeta_2^2\sigma_v^2}{\omega_0^2 y_c^2}\right) \quad \dots(3.16)$$

として与えられる。正負の対称性より、 $\tau$  は 1 回の塑性ひずみの生起する場合の絶対平均値を表わしている。

#### 4. 非線型振動に関する考察（その 2）

前節の結果にもとづき、同一な振動系に対して、さらに、つぎのような仮定を想定して、 $T$  時間後の残留ひずみについて論ずる。

すなわち、単位時間あたり、弾性域から塑性域に入る確率は、式(3.6)にもとづき、つぎのようになる。

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad \dots \dots \dots \quad (4.1)$$

塑性域に入った振動は、1回につき  $y(t) > 0$  の部分では、式(3.16)にもとづき、 $\tau$  の塑性ひずみを残し、 $y(t) < 0$  の部分では  $-\tau$  の塑性ひずみを残すものとする。

このような系に、外乱  $f(t)$  が作用してランダム振動をする場合、 $T$  時間後の残留塑性ひずみの分布関数はどうになるであろうか。

塑性ひずみの生起する確率は、 $T$  時間にわたって一様に、 $\nu dt$  となるから、 $T$  時間において塑性ひずみの  $n$  回生起する確率は、Poisson 分布にしたがって、

$$p_1(n) = \frac{(\nu T)^n}{n!} e^{-\nu T} \quad \dots \dots \dots \quad (4.2)$$

となる。生起した塑性ひずみが、 $\tau$  であるか、 $-\tau$  であるかの確率は等しく  $1/2$  とし、正負の対称性から、残留ひずみは正の場合を考える。ひずみの生起回数  $n$  のうち、 $-\tau$  が  $j$  回 ( $n/2 \geq j$ ) 生起する確率は、 $n$  回生起したひずみの総和(残留ひずみ)が  $\tau(n-2j)$  となる確率であり、2項分布にしたがう。

$$p_2(j) = \frac{n!}{j!(n-j)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \quad \dots \dots \dots \quad (4.3)$$

$n-2j=k$  とすれば、ひずみの生起回数  $n$  回という条件のもとにおける残留ひずみの  $k\tau$  となる確率は、

$$p_2(k) = \frac{(k+2j)!}{j!(k+j)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2j} \quad \dots \dots \dots \quad (4.4)$$

となる。したがって、 $T$  時間後に残留ひずみが  $k\tau$  となる確率は、

$$\begin{aligned} p(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{2j+k} p_1(n) p_2(j) \\ &= e^{-\nu T} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\nu T}{2}\right)^{k+2j} \frac{1}{j!(k+j)!} = e^{-\nu T} I_k(\nu T) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (4.5)$$

となり、 $I_k(\nu T)$  は、第一種の変形 Bessel 関数である。すなわち、単位時間あたりの生起確率が  $\nu$  の事象で、その事象が 1, あるいは  $-1$  となる確率は  $1/2$  とするときに、 $T$  時間後の事象の和が  $k$  となる確率  $p(k)$  は、 $-k$  となる確率と等しく、

$$p(k) = e^{-\nu T} I_k(\nu T) = p(-k) \quad \dots \dots \dots \quad (4.6)$$

となる。

この分布関数に関して、多少の検討を加えよう。

$$p(k) = e^{-2x} I_k(2x)$$

とすれば、級数展開の公式より、つぎのようにして  $\sum_{-\infty}^{\infty} p(k) = 1$  が証明される。

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} p(k) &= \sum_{0}^{\infty} e^{-2x} I_k(2x) \\ &= e^{-2x} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^{k+2j} \frac{1}{j!(k+j)!} \\ &= e^{-2x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \left(e^x - \sum_{0}^{j-1} \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= 1 - e^{-2x} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{x^n}{n!} \times \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{n+j}}{n! j!} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{x^{n+j}}{n! j!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(j!)^2}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{x^{n+j}}{n! j!} + I_0(2x)$$

$$\therefore \sum_{0}^{\infty} p(k) = 1 - \frac{e^{-2x}}{2} \{e^{2x} - I_0(2x)\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} I_0(2x)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} p(k) = 2 \sum_{0}^{\infty} p(k) - p(0) = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (4.7)$$

つぎに Bessel 関数の漸化式より、

$$x\{I_{n-1}(2x) - I_{n+1}(2x)\} = nI_n(2x)$$

$$x(I_{n-2} - I_n) = (n-1)I_{n-1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x\{I_0(2x) + I_1(2x)\}$$

$$- I_1(2x) - I_{n+1}(2x)\} = \sum_{0}^n kI_k(2x)$$

を得る。なお、Bessel 関数の性質より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(2x) = 0$  となるから、

$$\sum_{0}^{\infty} kp(k) = e^{-2x} x\{I_0(2x) + I_1(2x)\}$$

$$\therefore \sum_{-\infty}^{\infty} kp(k) = E(k) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (4.8)$$

となる。式(4.7)および、式(4.8)は、分布関数として当然な結果である。

分散  $\sigma^2$  はつぎのようにして求められる。漸化式より、

$$n^2 I_n(2x) = x\{nI_{n-1} - nI_{n+1}\}$$

$$(n-1)^2 I_{n-1} = x\{(n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{0}^n k^2 I_k(2x) = x\{2 \sum_{0}^{n-1} I_k(2x) - I_0(2x)\}$$

$$- (n-1)I_n(2x) - nI_{n+1}(2x)\}, \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n(2x) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{-\infty}^{\infty} k^2 p(k) &= 2 \sum_{0}^{\infty} k^2 p(k) \\ &= 2x\{2 \sum_{0}^{\infty} p(k) - e^{-2x} I_0(2x)\} = 2x \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (4.9)$$

$\nu T = 2x$  であるから、 $k$  の分散は、

$$\sigma^2 = \nu T \quad \dots \dots \dots \quad (4.10)$$

となる。

この分布関数も、確率論における中心極限定理によつて、 $T$  の増加にともなつて、限りなく正規分布  $N(0, \nu T)$  に近づくことが予測される。

$x$  が大きい場合、第1種変形 Bessel 関数は、近似式によって

$$I_k(2x) \div \frac{e^{2x}}{\sqrt{4\pi x}} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{(4x)^n} \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-n+\frac{1}{2}\right)} \quad \dots \dots \dots \quad (4.11)$$

となるから、 $\nu T = 2x$  として、 $p(k)$  は近似的に、つぎのように変形される。

$$p(k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}x^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4x}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-n+\frac{1}{2}\right)} \quad (4.12)$$

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m} m!}{(2m)!} \sqrt{\pi}$$

$k > n$  の場合,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-n+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{1}{2^{4n}} \times \frac{(2k+2n)(2k+2n-1)\dots}{(k+n)(k+n-1)\dots} \\ &\quad \dots \frac{(2k-2n+1)}{(k-n+1)} = k^{2n} \prod_{m=0}^n \left\{ 1 - \frac{(2m-1)^2}{k^2} \right\} \end{aligned}$$

したがって,  $k \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{\Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-n+\frac{1}{2}\right)} \rightarrow k^{2n} \quad (4.13)$$

となる。

$k < n$  の場合,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-n+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{(-1)^{n-k} (2n+2k)! (2n-2k)!}{2^{4n} (n+k)! (n-k)!} \\ &= (-1)^{n-k} \left(n+k-\frac{1}{2}\right) \left(n+k-\frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \\ &\quad \times \left(n-k-\frac{1}{2}\right) \left(n-k-\frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \quad (4.14) \end{aligned}$$

このようにして,  $k < n$  の場合は式(4.14)は  $k^{2n}$  に近づくとは断定にくいが,  $x$  の大きい場合は式(4.11)の級数は非常に收れんがよく,  $n$  の大きな項は無視してよい。したがって式(4.11)は,  $\nu T = 2x$  として,

$$p(k) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi}x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4x}\right)^n \frac{k^{2n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu T}} e^{-\frac{k^2}{2\nu T}} \quad (4.15)$$

となり, 正規分布  $N(0, \nu T)$  に近づくことが証明される。

結論として, つぎのことを得る。

単位時間あたりの塑性ひずみの生起確率を  $\nu$  とし, 生起した塑性ひずみが  $r$  である確率と  $-r$  である確率を等しく  $1/2$  とする場合,  $T$  時間のランダム振動の後に残存塑性ひずみが  $kr$  となる確率密度関数は, 第1種の変形 Bessel 関数によって,

$$p(kr) = e^{-\nu T} I_k(\nu T) \quad (4.16)$$

として与えられる。この分布関数において, 平均値, および, 分散はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} E(kr) &= 0 \\ \sigma^2 &= \nu T r^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

なお,  $T \rightarrow \infty$  にしたがって, 分布関数は正規分布  $N(0, \nu T r^2)$  に限りなく近づく。

ここに得た結果は, 種々の非常に強い制約を振動系

に与えて導いたものであるから, ただちに実用に供し得るとは断言しがたい。しかし, 構造物がランダム荷重を受けて破壊に至る過程において, 予測される残留ひずみの大きさで安全性の検討を行なうことは, 構造物の設計上重要なことであると思われる。このような場合において, この章の研究は, なんらかの手引きとして役立つことと思う。

## 5. 計算例 I (パワースペクトル解析)

ランダム振動に関する前述の理論を実証する一手段として, ディジタル型電子計算機を用いてランダム関数を発生させ, ランダム振動のパワースペクトル解析を行なった。

### (1) ランダム関数

まず, それぞれ独立な初期乱数  $R_{10}, R_{20}$  を決定し,  $R_{ij}$  ( $i=1, 2$ ) より Neumann の2乗挿入法によって矩形分布にしたがう擬似乱数  $R_{ij}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) を順次決

定する。この擬似乱数を乱数とみなして, パラメータ  $\tau - 10$  の Poisson 分布にしたがう乱数  $m_{ij}$  ( $i=1, 2$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ) を求め。つぎに, 一对の乱数  $m_{1j}, m_{2j}$  に対して図-2に示すような三角形パルスを対応させ, パルスの正負は上記の乱数とは全く独立な乱数によって決定する。こ

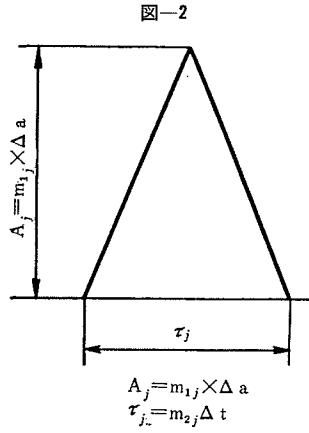


図-2

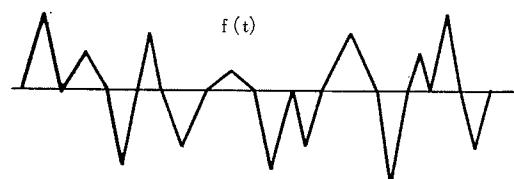


図-3

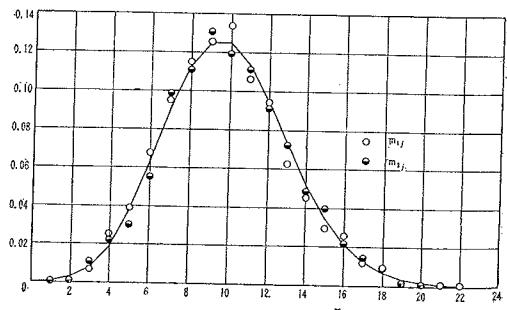
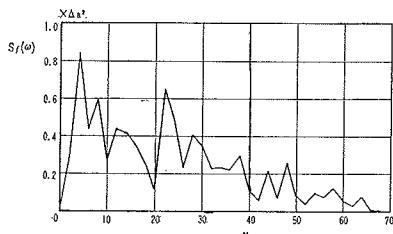


図-4

これらの一連のパルスをランダム関数  $f(t)$  の第  $j$  番目のパルスとして、図-3 に示すようなランダム関数を得る。この計算例においては、パルス数  $j=400$  として、初期乱数  $R_{10}, R_{20}$  を種々変化させて、8例のランダム関数  $f_k(t)$ , ( $k=1, \dots, 8$ ) を得た。これらの関数において

図-5



て、パルス幅  $\tau_j$ 、および、振幅  $A_j$  の分布が実際に Poisson 分布にしたがっているかどうか検討するため、分布状態を

集計した結果を図-4、および、表-1に示す。結果は、これらのランダム関数  $f_k(t)$  は振幅、および、パルス幅とともに、パラメーター 10 の Poisson 分布に非常によく一致していることを示している。

表—1

	正 (%)	負 (%)	平 均	絶対平均	分 散
振 幅 $m_{1j}$	51.4	48.6	0.318	10.021	10.203
パルス幅 $m_{2j}$	100.0	0	9.896	9.896	10.044

## (2) パワー スペクトル

前章で定義したパワー スペクトルを上記のランダム関数  $f_k(t)$  に対して求めるために、式(2.4)～式(2.25)のかわりにつぎの表現を用いてランダム関数  $f_k(t)$  のパワースペクトル  $S_f(\omega)$  を計算した。

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{A+B} \int_{-A}^B f(t) f(t+\tau) dt \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-A}^B \frac{|F_B(\omega)|^2}{A+B} e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \dots \dots \dots (5.1) \end{aligned}$$

$$F_B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^B e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \dots \dots \dots (5.2)$$

$$S_f(\omega) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{|F_B(\omega)|^2}{A + B} \quad \dots \dots \dots \quad (5.3)$$

$f_k(t)$  ( $k=1, 2, \dots, 8$ ) に対して平均したパワー スペクトルを 図-5 に示す。パルス幅の単位  $\Delta t$  を  $\Delta t = 1/100$  sec としているので、パワー スペクトルの単位は振幅の単位  $\Delta a$  を用いて、 $\Delta a^2$  となる。

### (3) 1自由度系の振動

図-5 のパワー スペクトルをもつランダム関数を、式(2.36)で表わされる1自由度の線型系の入力とした場合の応答  $Y(t)$ 、および  $Y'(t)$  のパワー スペクトルを、式(2.39)、式(2.40)によって計算した。結果は、式(2.41)、式(2.42)を用いて、 $Y(t)$ 、および、 $Y'(t)$  の2乗平均  $V_Y$ 、 $V_{Y'}$  として表-2に示す。式(2.34)によって表わされる  $N$  は、単位時間内に  $y(t)$  が0となる回数を意味しているので、式(2.36)における固有円

振動数  $\omega_0$  とはつきの関係にある。

$$\omega_0 = N\pi = \sqrt{V_v/V_Y} \quad \dots \dots \dots \quad (5.4)$$

表-2

$\omega_0$	$V_y$	$V_v$	$\sqrt{V_v/V_y}$
10	0.1826	18.2320	9.99
15	0.0172	3.870	14.93
20	0.0238	9.4832	20.00
40	0.0005	—	—

したがって、式(5.4)

によって、固有円振動数を予測できる。表一  
2において、 $\zeta=0.01$ と固定して、 $\omega_0$ を種々変化させた場合の

## 6. 計算例 II (数値積分および比較検討)

### (1) 数值積分

ランダム振動のパワー スペクトル解析による結果と、ランダム関数に対する応答を、実際に、数値積分法によって解析した結果とを比較検討するために、パワー スペクトルの場合と全く等しいランダム関数  $f_k(t)$  ( $k=1, \dots, 8$ ) と振動系に対して、応答  $Y(t)$  を数値積分法によって求めた。ただし、パワー スペクトル 解析の場合は式 (2.36) によって表わされる振動系を採用したが、この数値積分法の場合は、式 (3.1)、および、式 (3.2) によって表わされる bi-linear 系の振動系を採用して、ランダム関数のパルス振幅の単位  $4a$  によって塑性ひずみが発生するように考慮した（図-1 参照）。

$Y_c=1.0$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=0.10$  として,  $4a$ ,  $\omega_0$  の種々の組み合わせに対して解析した結果を, 応答  $y(t)$  の分布として確率紙上に集計して, 図-6(a)～図-6(d) に示す。

$\Delta a$  が小さく線型振動のみの場合は、正規分布に非常によく一致して、 $\Delta a$  の増加とともに分布が乱れていることがわかる。この図より、それぞれの場合の  $y(t)$  の標準偏差  $\sigma_Y$  を求めて表-3 に示す。単位は  $\Delta a$  である。表中の No. は、ランダム関数のパルス 100 個平均（すなわち、時間  $1000 \Delta t$ ）あたりの塑性ひずみの発生回数であり、 $\Delta a$  の増加とともに大きくなっている。比較のために、パワー スペクトル解析によって求めた標準偏差  $\sqrt{V_Y}$ 、 $\sqrt{V_p}$  を  $\Delta a$  で除して正規化して列挙し

表—3

記号	$\omega_0$	$\Delta\alpha$	$\sigma/\Delta\alpha$	$N\delta$	$\sqrt{V_y}/\Delta\alpha$	$\sqrt{V_v}/\Delta\alpha$
A 1	10	4	0.40534	6.0	0.42730	4.2699
A 2		6	0.41135	10.5		
A 3		10	0.38804	16.0		
B 1	15	4	0.13106	1.5	0.13127	1.9614
B 2		5	0.13008	3.4		
B 3		6	0.12708	8.0		
C 1	20	4	0.08753	0	0.07698	1.5397
C 2		6	0.07065	0.8		
—		7	0.07147	5.0		
C 3		8	0.07169	7.8		
D 1	40	10	0.02301	0.5	0.02210	—
D 2		20	0.01920	4.5		
D 3		30	0.01923	16.0		

図-6 (a)

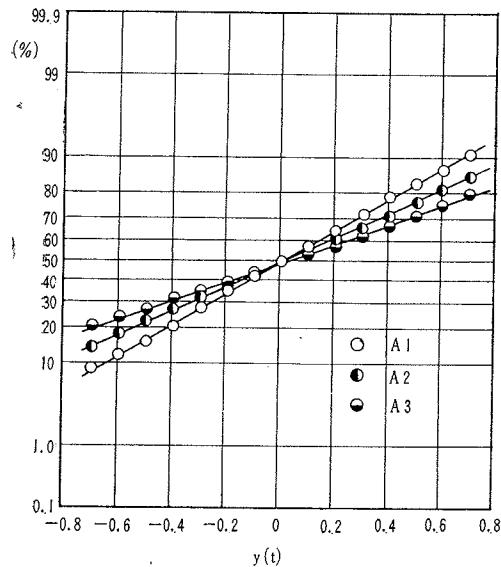


図-6 (b)

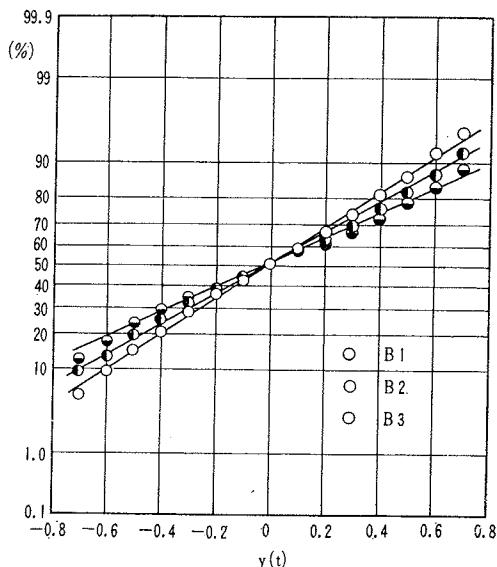


図-6 (c)

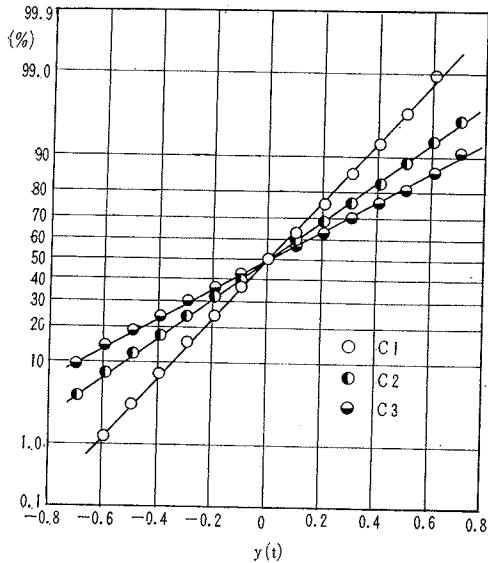
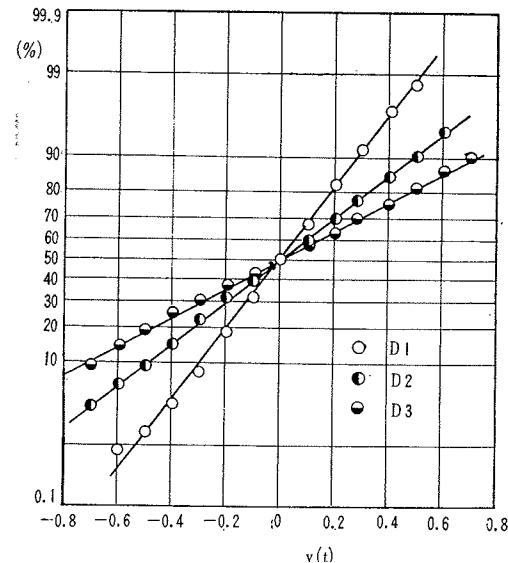


図-6 (d)



た。

## (2) 比較検討

a) 図-5 に示したパワー スペクトルは、 $\omega$  の間隔が大き過ぎたことを意味している。しかし、式 (2.36) における減衰定数  $\zeta$  が 0.01 であるために、表-2 に示した  $\sqrt{V_y}/V_y$  の値が非常に  $\omega_0$  に一致した。

b) 前にも述べたように、 $y(t)$  の分布は、 $4a$  が小さくほとんど弾性域で振動する場合は、非常によく正規分布に近づいている(図-6 参照)。これは、ランダム関数のパルス数が増加するにしたがってパルス波形のいかんにかかわらず、 $y(t)$  の分布は中心極限定理により正規分布に近づくことを立証している。 $4a$  が大きく、塑性

ひずみの発生する回数が多くなるにしたがって、 $|y(t)| < y_c$  内における  $y(t)$  の分布は矩形分布に近づいていく。

c) パワー スペクトル解析による結果  $\sqrt{V_y}/4a$  と、数値積分による結果  $\sigma_y/4a$  とは非常によく一致した(表-3 参照)。数値積分による場合の  $y'(t)$  の集計は行なっていないので、 $V_y$  の比較はできなかった。

d) パワー スペクトルを計算するために採用した式 (5.3) の收れんについては、この計算例では、パルス数  $j=400$  としているので、検討を加えることはできないのは残念である。

e) 本文では、塑性ひずみの分布、および、期待値ま

で検討できなかった。ほとんどまれにしか塑性ひずみが生じないような計算例を数多く収集し、解析してはじめて可能なのであり、パルス数 100 個あたりの塑性ひずみの発生回数 10 以上の場合は、式 (2.30) の確率密度関数が、すでに、意味をなくしてしまうことがわかった。したがって、遺憾ながら、3, 4. の数値計算による検討は次回にゆづる。

## 7. むすび

本文では、振動系を定めたものとして、外乱  $f(t)$  をランダム過程として論じたが、これとは全く逆に、構造物自体があるランダム パラメーターをふくむ構造物である場合も考えられる。たとえば、不均一な弾性体を伝播する波、すなわち、地震波のようなもの、あるいは、不等断面をもつ棒やはりの確率論的な取り扱いなどである。このようにして、確率統計的考え方、あらゆる分野において、dynamic のみならず、static の問題に関しても、重要な意義をもっている。構造力学の分野においては、疲労現象の問題に関連しては古くから統計的な取り扱いがなされていたが、さらに範囲を広げて、衝撃、および安全率の問題にまでパワースペクトル解析を推し進めるならば、いかなる応答を得るかというアナリシス (analysis) から、最適応答を得るために構造物をいかに設計すればよいかという、いわゆる、シンセシス (synthesis) の段階へ一步近づくものと信ずる。

他方、実際の応用面では、ランダム過程の見本値として得た観測値（連続値、あるいは、離散値）から、パワースペクトルを求める場合、いかにしたら最も信頼性の高い情報を得られるかという Sampling の問題が現われる。

このように、今後研究すべき分野が広く残されているので、微力ながら、逐次この方面的研究を重ねてゆきたいと思う。本文が、多少とも、土木工学において貢献するところがあれば幸いである。

## 参考文献

- 1) 伊藤 清：確率論、岩波現代数学、14、1953.
- 2) 国沢清典：近代確率論、岩波全書、1951.
- 3) 洲之内源一郎：フーリエ解析、共立出版、1956.
- 4) Rice, S.O. : The Mathematical Theory of Random Noise, Bell Telephone Journal, 1944-1945
- 5) Wiener, N. : Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, Wiley, 1949.
- 6) Wiener, N. : Generalized Harmonic Analysis, Acta Math., 55 (1930), pp. 117-258.
- 7) Crandall, S.H. : Random Vibration, MIT Press and Wiley, 1958.
- 8) 河田竜夫：確率過程論の応用、岩波現代応用数学講座、13、1957.
- 9) 統計数理研究所：工業統計講座、1961.
- 10) 武田 峻：飛行機の走行荷重の解析、運輸技術研究所報告、10, 5 (1960.7), pp. 91-134.
- 11) 武田 峻：路面凹凸のモデルによる検討、同上、11.4, (1961.5), pp. 113-141.
- 12) 兼重一郎：パワースペクトル解析の自動車への応用、いすゞ技報、33 (1960), pp. 1-9.
- 13) 佐藤寿芳：機械構造物の耐震問題、1961.
- 14) 佐藤寿芳：地震に対する機械構造物の応答について、日本機械学会誌、65, 520 (1962.5), pp. 686-696.
- 15) 谷 一郎：乱流理論、金原出版、1950.
- 16) Bogdanoff, J.L. and Goldberg, J.E. : Response of a Simple Structure to a Random Earthquake-Type Disturbance, Bull. of SSA, 51 (1961), pp. 293-310.
- 17) Eringen, A.C. : Response of Tall Buildings to Random Earthquake, Proc. of 3rd U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1958, pp. 141-151.
- 18) Crandall, S.H. and Yieldiz, A. : Random Vibration of Beams, JAM, 28 (1961), pp. 1-9.
- 19) Bodgianoff, J.L. and Goldberg, J.E. : On the Bernoulli-Euler Euler Beam Theory with Random Excitation, JAS, 27 (1960), pp. 371-376.
- 20) Boyce, W.E. : Random Vibration of Elastic Strings and Bars, Proc. of 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1962, pp. 77-85.
- 21) Kozin, F. : On the Probability Densities of the Output of Some Random Systems, JAM, 28 (1961), pp. 161-164.
- 22) Caughey, T.K. and Stumpf, H.J. : Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation, JAM, 28 (1961), pp. 563-566.
- 23) Diaz, J.L. and Payne, L.E. : Mean Value Theorems in the Theory of Elasticity, Proc. of 3rd U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1958, pp. 293-303.
- 24) Saunders, K.D. : A Power Spectrum Equation for Stationary Random Gusts Including a Simple Problem, JAS, 25 (1958), pp. 295-300.
- 25) Etkin, B. : A Theory of the Response of Airplanes Random Atmospheric Turbulence, JAS, 26 (1959), pp. 409-420.
- 26) Thorson, K.R. and Bohne, O.R. : Application of Power Spectral Methods in Airplane and Missile Design, JAS, 27 (1960), pp. 107-116.
- 27) Bogdanoff, J.L. and Kozin, F. : Moments of the Output of Linear Random Systems, Journal of the Acoustical Society of America, 34 (1962), pp. 1063-1066.
- 28) Trubert, M.R.P., Kizerer H.G. and Nash, W.A. : Experimental Determination of a Statistical Representation of the Noise Field of a Subsonic Air Jet, Engineering Progress of the Univ. of Florida, 16, 1 (1962. 1), pp. 9-32.
- 29) Nash, W.A. : Response of an Elastic Plate to a Distributed Random Pressure Characterized by a Separable Cross Correlation, Technical Note No. 1 for Contract No. AF 49 (638)-328, September 1961.
- 30) Curfman, H.J. and Gradiner, R.A. : NACA Report. 984 (1950).
- 31) Press, H. and Mazersky, B. : NACA Report, 1172 (1954).
- 32) Houblot, J.C. and Kordes, E.E. : NACA Report. 1181 (1954).
- 33) Eggleston, J.M. and Mathews, C.W. : NACA Report, 1204 (1954).
- 34) Laverne, M.E. and Boksenhom, A.S. : NACA TN, 1935 (1949).
- 35) Chilton, R.G. : NACA TN, 3313 (1954).
- 36) Houblot, J.C., Walls, J.H. and Smiley, R.S. : NACA TN, 3484 (1955).

- 37) Press, H. and Meadows, M.T. : NACA TN, 3540  
(1955).  
38) Huss, C.R. and Donegan, J.J. : NACA TN, 3598  
(1956).  
39) Donegan, J.J. and Huss, C.R. : NACA TN, 3701  
(1956).  
40) Shinbrot, M. : NACA TN, 3791 (1956).  
41) Donegan, J.J. and Huss, C.R. : NACA TN, 3897  
(1956).  
42) Diederich, F.W. : NACA TN, 3960 (1957).  
43) Thompson, W.E. : NACA TN, 4303 (1958).  
雑誌の略記号の説明  
SSA-Seismological Society of America  
JAM-Journal of Applied Mechanics  
JAS-Journal of Aeronautical Science, Journal of Aero/  
Space Science  
NACA-National Advisory Committee for Aeronautics.  
(at present NASA) (1964.1.31・受付)