

粘弾性体の振動

VIBRATIONS OF VISCO-ELASTIC BODY

畑 野 正*
By Tadashi Hatano

1. 緒 言

構造物の耐震問題を取り扱うとき構造物および基礎の材料力学的性質として、弾性と流体粘性とが併立した形を考えるのが一般である。この際、弾塑性の性質を加味することが鋼構造物などについて行なわれているが粘性減衰の点では前述と同じ取り扱いがなされている。弾性と流体粘性が併立した形の力学的性質を採用すると、すなわち Kelvin 模型を採用すると、振動方程式の取り扱いを便にする利益はあるが、これにより構造物の振動を本質的に説明することができるかどうかははなはだ疑問である。

耐震設計上もっとも重要な構造物の固有周期と振幅の大きさは、構造物および基礎の弾性と振動減衰性を的確に想定しなければ知ることができないことであり、特に長大構造物の高次振動をも問題にする場合は、この想定が重要な鍵となるのである。

著者はコンクリートの応力、ひずみ、時間の関係を Maxwell-Kelvin 模型または簡略化した Maxwell-Kelvin 模型を用いることにより相当程度説明できることを実験例について説明してきた¹⁾。岩や土はについても、このような説明ができると考えられるが、この場合にはある程度以上の応力状態では非線型としての取り扱いの必要が生じてくるであろう。しかしこれは計算機の取り扱い技術の問題に還元できるので、ここには線型の範囲のみにつきのべることにする。

以下第一に一般に採用されている Kelvin 体をもふくめて、さらに広範囲の粘弾性体すなわち Maxwell-Kelvin 体、簡略化された Maxwell-Kelvin 体、Maxwell 体の振動を、一端固定他端自由の角柱の単弦地動による強制曲げ振動の場合について解いて見よう。

第二に一般構造物に以上の解を適用できるように、構造物および基礎をもふくめた一自由度系としての解の形に直し、その振動特性を調べて見よう。

第三には実物コンクリート構造物、鋼構造物などの既往の振動実験によって得られた振動減衰の性質を整理し、これら実物構造物をどのような力学模型体として取り扱えば、よい説明を得られるかを考えて見よう。

第四にはコンクリート板、鋼板による室内振動実験の結果をのべ、実物構造物について観測されたデータの補

足をしよう。

そして最後に総括的な考察を加えることにした。

2. 一端固定他端自由角柱の単弦地動による強制曲げ振動の規準振動型による解

(1) 粘弾性体の応力とひずみの関係

振動方程式の基礎になる粘弾性体の応力とひずみの関係は模型の種類にしたがって周知のように次頁の表一のように書くことができる。

(2) 角柱の曲げ振動の解

一端固定、他端自由の粘弾性棒の変位による強制振動の解を求めて見よう。従来この種の解の得られているものは Kelvin 体の棒のみである²⁾。

いま振動方程式を一般的な応力とひずみの比 E_0 を用いて書くと式 (6) のようになる。

$$E_0 I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\rho A}{g} \frac{d^2 g_0}{dt^2} \dots\dots\dots (6)$$

境界条件は式 (7) で表わす。

$$\left. \begin{aligned} x=0 \dots\dots y=0 & \quad \frac{dy}{dx} = 0 \\ x=l \dots\dots \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 & \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

y : 相対変位 g_0 : 地動
 ρ : 単位体積重量 A : 断面積
 I : 断面二次率

a) Maxwell-Kelvin 体に対する解 式 (6) に式 (1) を代入し、地動 $g_0 = Z \sin \omega t$ として解を求める。

いま $y = X \sin \omega t + Y \cos \omega t \dots\dots\dots (8)$

とすればつぎの関係が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \omega B \frac{d^4 X}{dx^4} + B \alpha \frac{d^4 Y}{dx^4} - \omega^3 X + \omega \beta X - r \omega^2 Y \\ = Z \omega^3 - \beta Z \omega \\ - \omega B \frac{d^4 Y}{dx^4} + B \alpha \frac{d^4 X}{dx^4} + \omega^3 Y - \omega \beta Y - r \omega^2 X \\ = r Z \omega^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし $B = \frac{EIg}{\rho A}$ とおく。

このとき

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = m^4 X, \quad \frac{d^4 Y}{dx^4} = m^4 Y \dots\dots\dots (10)$$

とおくと式 (7) を満足した式 (10) の解は規準振動型 $f_n(x)$ を用いてつぎのように得られる。

* 正会員 工博 電力中央研究所技術研究所

表-1

	Relation between stress σ and strain ϵ	$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon}$	
Maxwell-Kelvin Model	$\left(1 + \frac{E_1}{E} + \frac{\eta_1}{\eta}\right)\sigma + \frac{\eta_1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\eta} \int_0^t \sigma dt$ $= E_1 \epsilon + \eta_1 \frac{d\epsilon}{dt}$	$E_0 = E \frac{p + \alpha}{p + \beta p^{-1} + r} \dots\dots\dots(1)$ $\alpha = \frac{E_1}{\eta_1}, \beta = \frac{E E_1}{\eta \eta_1},$ $r = \frac{E}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E}{\eta} \quad \left(p = \frac{d}{dt}\right)$	
Simplified M.K. Model	$\left(1 + \frac{E_1}{E}\right)\sigma + \frac{\eta_1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = E_1 \epsilon + \eta_1 \frac{d\epsilon}{dt}$	$E_0 = E \frac{p + \alpha}{p + r} \dots\dots\dots(2)$ $\alpha = \frac{E_1}{\eta_1}, r = \frac{E}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_1}$	
Kelvin Model	$\sigma = E_1 \epsilon + \eta_1 \frac{d\epsilon}{dt}$	$E_0 = E_1(1 + \delta p) \dots\dots\dots(3)$ $\delta = \frac{\eta_1}{E_1}$	
Maxwell Model	$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = \frac{d\epsilon}{dt}$	$E_0 = E \frac{p}{p + r} \dots\dots\dots(4)$ $r = \frac{E}{\eta}$	
Elastic Model	$\sigma = E \epsilon$	$E_0 = E \dots\dots\dots(5)$	

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \{A_n(\sin m_n x - \sinh m_n x) + (\cos m_n x - \cosh m_n x)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \\ Y &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \{A_n(\sin m_n x - \sinh m_n x) + (\cos m_n x - \cosh m_n x)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \cos m_n l \cosh m_n l + 1 &= 0 \\ A_n &= \frac{\sin m_n l - \sinh m_n l}{\cos m_n l + \cosh m_n l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

式(11)を式(19)に代入し、規準振動の直交性を用いれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{\left(\omega - \frac{\beta}{\omega}\right)(Bm_n^4 \omega - \omega^3 + \omega\beta) + r(Bm_n^4 \alpha - r\omega^2)}{(Bm_n^4 \alpha - r\omega^2)^2 + (Bm_n^4 \omega - \omega^3 + \omega\beta)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \\ b_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{\left(\omega - \frac{\beta}{\omega}\right)(Bm_n^4 \alpha - r\omega^2) - r(Bm_n^4 \omega - \omega^3 + \omega\beta)}{(Bm_n^4 \alpha - r\omega^2)^2 + (Bm_n^4 \omega - \omega^3 + \omega\beta)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

かくして解として

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) (a_n \sin \omega t + b_n \cos \omega t) \dots\dots\dots(14)$$

を得る。

b) Simplified Maxwell-Kelvin 体に対する解 式(6)に式(2)を代入し a) と同様に解を求めればつぎの結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{(B m_n^4 \omega - \omega^3) + r(B m_n^4 \alpha - r \omega^2)}{(B m_n^4 \alpha - r \omega^2)^2 + (B m_n^4 \omega - \omega^3)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \\ b_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{\omega(B m_n^4 \alpha - r \omega^2) - r(B m_n^4 \omega - \omega^3)}{(B m_n^4 \alpha - r \omega^2)^2 + (B m_n^4 \omega - \omega^3)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) (a_n \sin \omega t + b_n \cos \omega t) \dots\dots\dots(16)$$

c) Kelvin 体に対する解 式(6)に式(3)を代入し同様に解けばつぎの結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{(B m_n^4 - \omega^2)}{(B m_n^4 - \omega^2)^2 + (B m_n^4 \delta \omega)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \\ b_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{-B m_n^4 \delta \omega}{(B m_n^4 - \omega^2)^2 + (B m_n^4 \delta \omega)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) (a_n \sin \omega t + b_n \cos \omega t) \dots\dots\dots(18)$$

ただしこの場合 $B = \frac{E_1 I g}{\rho A}$ 。

d) Maxwell 体に対する解 式(6)に式(4)を代入して同様に解けばつぎの解を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{\omega(B m_n^4 \omega - \omega^3) - r^2 \omega^2}{(r \omega^2)^2 + (B m_n^4 \omega - \omega^3)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \\ b_n &= Z \omega^2 \cdot \frac{-\omega(r \omega^2) - r(B m_n^4 \omega - \omega^3)}{(r \omega^2)^2 + (B m_n^4 \omega - \omega^3)^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) (a_n \sin \omega t + b_n \cos \omega t) \dots\dots\dots(20)$$

e) 完全弾性体に対する解 式(6)に式(5)を代入して解けばつぎの解を得る。

$$a_n = Z \omega^2 \cdot \frac{1}{B m_n^4 - \omega^2} \cdot \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} \dots\dots\dots(21)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) a_n \sin \omega t \dots\dots\dots(22)$$

以上の解はすべて地動の加速度 $Z \omega^2 = c_1$ と、材料の物理的性質、棒の形状、地動の振動数により定まる共振係数、および振動モードによって定まるモード係数、の三者の積で与えられる。これら各種粘弾性体の振動特性についてはつぎの章でふれることにしよう。

3. 構造物およびその基礎をふくめて一自由度系として取り扱った場合の各種粘弾性体の振動特性

一般構造物の振動において、その共振周期や振動減衰が構造物の物理的性質と同時にその基礎や支持物の物理

的性質にいちじるしく影響されるものであることはよく知られているところである。特に構造物の振動減衰は、その構造物内部における減衰よりも基礎を通じて生ずる減衰のほうが大きい場合が多いと考えられる。前節にのべた解は基礎完全固定の仮定のもとに求めたけれども、実物構造物にはこのようなことはあり得ないで基礎を通じて振動のエネルギーが消費される。この場合に対する取り扱いは前節のような例では、基礎の粘弾性的性質に応じた境界条件にしたがって解けばよい。しかしこの計算法にはいまここではふれないで、もっとも簡単に構造物と基礎とを一体とした一自由度系を考えて考察を進め

ることとする。後節にのべる実物構造物の起振機による振動実験により得られた共振周期、振動減衰などはすべて構造物と基礎をふくめた一自由度系とした場合の値であり、また複雑な構造物の動学的取り扱いは以上のようにすればはなはだ簡易化されるからである。

構造物と基礎とをふくめて一自由度系とし、かつその系が前述各種の模型体として挙動するものとしたときの振動の解は、前節における棒の解における Bm_n^4 を ω_0^2 とおきかえ、またモード係数を1とすれば得られる。これを基にして単弦地動による強制振動の合成振幅 y 、共振振幅 $y_{res.}$ 、共振円振動数 ω_{or} 、静的慣性力の作用する

場合の変位 $y_{st.}$ 、特性方程式および振動安定の検定、振動の限界条件その他を計算した結果を表-2に示す。

表-2 によって粘弾性体の種類によりその振動特性がいちじるしく異なることがわかる。

通常構造物の振動方程式に採用されている Kelvin 体では $\omega_0 \leq \frac{2}{\delta}$ となっており、振動数に最大限度があり、また共振振幅 $y_{res.}$ は自己振動数の三乗に逆比例する。このため限界減衰に対する割合 $h = \frac{y_{st.}}{2y_{res.}}$ は自己振動数に比例して増大することになる。

Maxwell 体においては $\omega_0 \geq \frac{\gamma}{2}$ となっており、振動数に最

図-1
Frequency Response

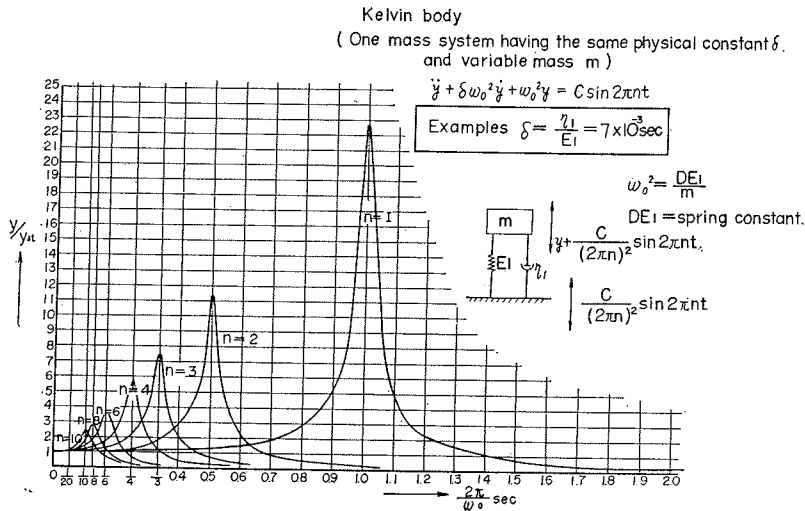


表-2 (1)

	Amplitude in simple harmonic motion $c_1/\omega^2 \sin \omega t$	Characteristic Equation & Stability (Routh's Method)	Critical Condition	Resonant Circular Frequency ω_{or}
M-K body	$y = c_1 \frac{\sqrt{(\omega - \frac{\beta}{\omega})^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 \alpha - \gamma \omega^2)^2 + (\omega_0^2 \omega - \omega^3 + \omega \beta)^2}}$	$\lambda^3 + \lambda^2 \gamma + \lambda(\beta + \omega_0^2) + \omega_0^2 \alpha = 0$ Stable	$\frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{27} \gamma^3 + \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\gamma}{3} \right) - \frac{1}{3} \beta \gamma \right\}^2 + \frac{1}{27} \left(\omega_0^2 - \frac{1}{3} \gamma^2 + \beta \right)^3 \geq 0$	
Simplified M-K body	$y = c_1 \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 \alpha - \gamma \omega^2)^2 + (\omega_0^2 \omega - \omega^3)^2}}$	$\lambda^3 + \lambda^2 \gamma + \lambda \omega_0^2 + \alpha \omega_0^2 = 0$ Stable	$\frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{27} \gamma^3 + \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\gamma}{3} \right) \right\}^2 + \frac{1}{27} \left(\omega_0^2 - \frac{1}{3} \gamma^2 \right)^3 \geq 0$	$2 \omega_{or}^6 - \omega_{or}^4 (2 \omega_0^2 - 4 \gamma^2) - \omega_{or}^2 (4 \omega_0^2 \gamma^2 - 2 \gamma^4) + (\omega_0^4 (\gamma^2 - \alpha^2) - 2 \omega_0^2 \alpha \gamma^3) = 0$ $\omega_0 \geq \alpha, \gamma \dots \omega_{or} \approx \omega_0$ $\omega_0 \ll \alpha, \gamma \dots \omega_{or} \approx \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$
Kelvin body	$y = c_1 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega_0^2 \omega \delta)^2}}$	$\lambda^2 + \lambda \delta \omega_0^2 + \omega_0^2 = 0$ Stable	$\omega_0 \leq \frac{2}{\delta}$	$\omega_{or} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{2}}$ $\delta \ll 1 \dots \omega_{or} \approx \omega_0$
Maxwell body	$y = c_1 \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(\gamma \omega^2)^2 + (\omega_0^2 \omega - \omega^3)^2}}$	$\lambda^3 + \lambda^2 \gamma + \lambda \omega_0^2 = 0$ Stable	$\omega_0 \geq \frac{\gamma}{2}$	$2 \omega_{or}^6 - \omega_{or}^4 (2 \omega_0^2 - 4 \gamma^2) - \omega_{or}^2 (4 \omega_0^2 \gamma^2 - 2 \gamma^4) + \omega_0^4 \gamma^2 = 0$ $\omega_0 \gg \gamma \dots \omega_{or} \approx \omega_0$

表-2 (2)

	Static Displacement $y_{st.} (\omega \rightarrow 0)$	Resonant Amplitude $y_{res.}$	$\frac{y_{res.}}{y_{st.}}$	$\frac{y_{st.}}{2y_{res.}}$	ω_0	α, β, γ	Dynamic modulus of Elasticity E_d
M-K body	Theoretical $y_{st.} = \infty$ Practical $y_{st.} = c_1 \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{\tau}{\alpha}$	$\omega_0 \geq \alpha, \beta, \gamma$ $y_{res.} = c_1 \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{(\gamma - \alpha)}$	$\omega_0 \geq \alpha, \beta, \gamma$ $\frac{y_{res.}}{y_{st.}} = \omega_0 \frac{1}{(\gamma - \alpha)} \frac{\alpha}{\tau}$	$\omega_0 \geq \alpha, \beta, \gamma$ $\frac{1}{\omega_0} \frac{(\gamma - \alpha)}{2} \frac{\tau}{\alpha}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{DE}{m}}$ $D = \text{const.}$	$\alpha = \frac{E_1}{\eta_1}$ $\beta = \frac{E}{\eta} \frac{E_1}{\eta_1}$ $\gamma = \frac{E}{\eta_1} + \frac{E}{\eta}$	$E_d = \frac{E E_1 (1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2})}{E + E_1 (1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2})}$
Simplified M-K body	$\frac{1}{y_{st.}} = c_1 \frac{\tau}{\omega_0^2} \frac{1}{\alpha}$	$\omega_0 \geq \alpha, \gamma$ $y_{res.} = c_1 \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{(\gamma - \alpha)}$ $\omega_0 \leq \alpha, \beta$ $y_{res.} = c_1 \frac{1}{\omega_0^3} \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}$	$\omega_0 \geq \alpha, \gamma$ $\frac{y_{res.}}{y_{st.}} = \omega_0 \frac{1}{(\gamma - \alpha)} \frac{\alpha}{\tau}$ $\omega_0 \leq \alpha, \beta$ $\frac{y_{res.}}{y_{st.}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\alpha}{\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}}$	$\omega_0 \geq \alpha, \gamma$ $\frac{1}{\omega_0} \frac{\gamma - \alpha}{2} \frac{\tau}{\alpha}$ $\omega_0 \leq \alpha, \beta$ $\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{DE}{m}}$	$\alpha = \frac{E_1}{\eta_1}$ $\gamma = \frac{E}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_1}$	$E_d = \frac{E E_1 (1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2})}{E + E_1 (1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2})}$
Kelvin body	$\frac{1}{y_{st.}} = c_1 \frac{1}{\omega_0^2}$	$\delta \ll 1$ $y_{res.} = c_1 \frac{1}{\omega_0^3 \delta}$	$\delta \ll 1$ $\frac{y_{res.}}{y_{st.}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\delta}$	$\delta \ll 1$ $\frac{\delta}{\omega_0^2}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{DE_1}{m}}$	$\delta = \frac{\eta_1}{E_1}$	$E_d = E_1 \sqrt{1 + \delta^2 \omega^2}$
Maxwell body	Theoretical $y_{st.} = \infty$ Practical $y_{st.} = c_1 \frac{1}{\omega_0^2}$	$\omega_0 \geq \gamma$ $y_{res.} = c_1 \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\tau}$	$\omega_0 \geq \gamma$ $\frac{y_{res.}}{y_{st.}} = \omega_0 \frac{1}{\tau}$	$\omega_0 \geq \gamma$ $\frac{1}{\omega_0} \frac{\tau}{2}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{DE}{m}}$	$\tau = \frac{E}{\eta}$	$E_d = E \frac{\omega^2}{\tau^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$

小限度が規定され、また、 $y_{res.}$ は自己振動数の一乗に逆比例する。

いま Kelvin 体に定義されている限界減衰に対する割合 h を他の模型にも $\frac{y_{st.}}{2 y_{res.}}$ で計算してあてはめるものと仮定すれば、Maxwell 体においては Kelvin 体とは反対に h は自己振動数に逆比例することになる。

Maxwell-Kelvin 体、Simplified Maxwell-Kelvin 体はこの両者の性質を兼ね備えており、その物理定数にくらべて自己振動数が大きい場合は Maxwell 体と同様の振動性状をもち、小さい場合は Kelvin 体と同様の振動性状をもつことになる。

いまこれらの性質を明に示すため、適当な物理定数を想定して Kelvin 体、Maxwell 体、Simplified Maxwell-Kelvin 体のおのおのにつき加速度伝達の割合 $y/y_{st.}$ を構造物の自己周期に応じて計算し図-1~3 に示した。基礎の振動の周波数によりおのおのきわめて異なった結果を示す。またこれらから $\frac{y_{st.}}{2 y_{res.}}$ の値が共振振動数によっていかに変化するかを求めたのが図-4 である。これらの図から模型体の種類により、振動の特性がいちじるしく異なるものであることが知られる。

なお、表-2 の末尾には各模型の見掛け上の動的弾性率の計算式を示しておいた。振動周波数によってこれらの値が変化することが知られる。

4. 実物構造物の振動減衰

従来各種の構造物について振動減衰が実験的に求められ

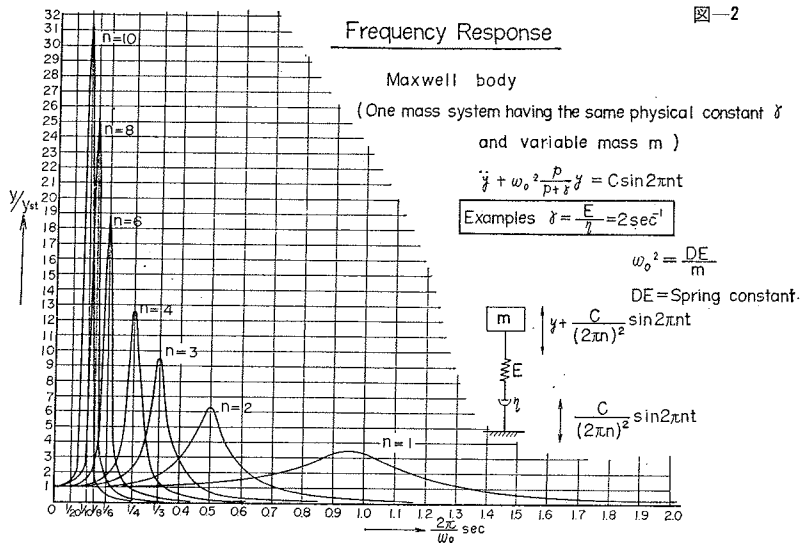


図-3

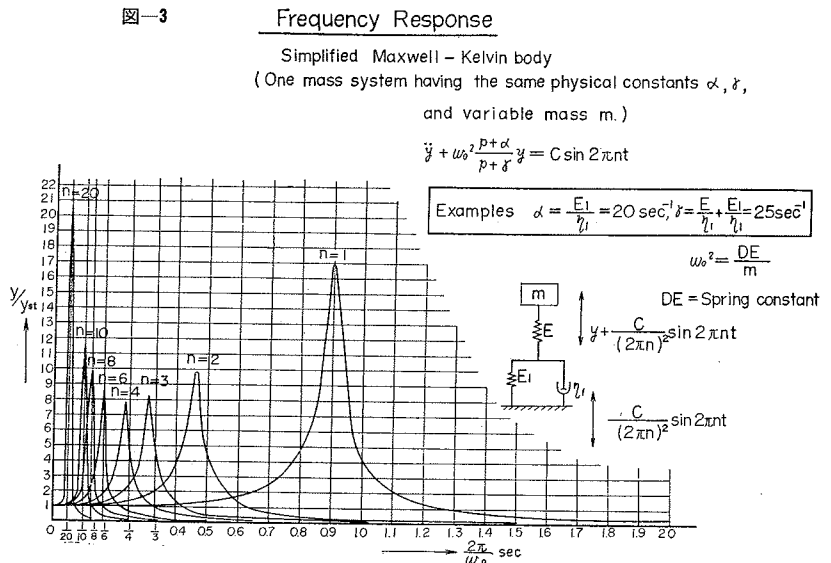
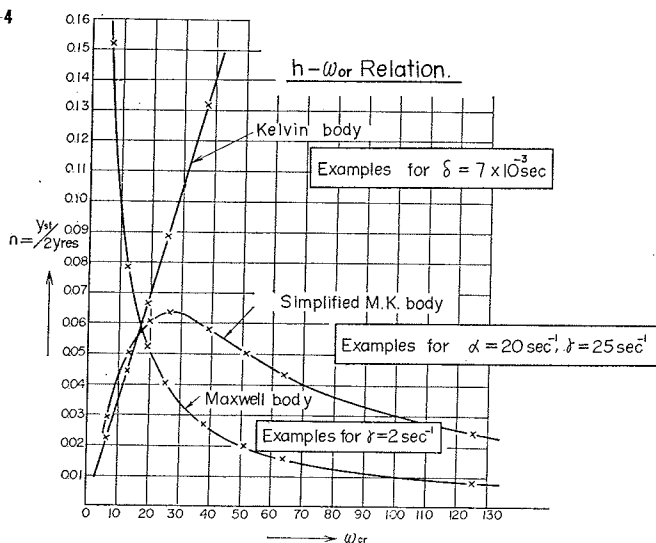


図-4



ているものを集成して見た。これらはすべて構造物と基礎とをふくめた一自由度系の Kelvin 体を考え、共振曲線から計算された限界減衰に対する割合 h の形で求められている。

図-5 は各種のアーチダムについて求められたものである。上椎葉²⁾、殿山³⁾、佐々並⁴⁾、アーチダムは $35 \times 10^4 \sim 3 \times 10^4 \text{ m}^3$ の堤体積をもつが、これを最大 10~20 t 程度の起振力で一点加振して得られたきわめ微少な振動による共振曲線から h を求めている。同一ダムで数点あるのは、各種の振動モード、貯水時、低水時など数種の場合について得られているからである。

栖又アーチダム⁴⁾は堤体積約 70 m^3 の試験ダムで、起振力 300~800 kg により破壊的な振動を与えて得られた共振曲線から h を求めた。

図には貯水時および空水時の平均的な二点を示したが、起振力を 300 kg から 800 kg に増大するにつれて、 h の値は 10~20% 程度増大している。図の示すように h と ω_{or} との関係は明らかに Kelvin 体としての取り扱いを否定している。

また大きな振動に対して h が大になるということは、Maxwell-Kelvin 体または Maxwell 体を想定すると、 η_1 や η の値が大きな応力に対して減小するという非線型理論を導入して説明すべきことと推定される。

図-6 は各種の性質の基礎の上に築造された、コンクリ橋脚に起振機で振動を与えて得られた共振曲線から計算した h の値⁵⁾を示したものである。 ω_{or} との関係は明らかに地盤の性質にしたがってそれぞれ双曲線を示しており、Kelvin 体としての取り扱いが誤りであることがわかる。なお粘土上の同一橋脚につき大振幅で振動したときの h の値が小振幅で振動したときの h の値の約 2 倍になったことが報告⁵⁾されており、土の場合に非線型性がいちじるしいことが察せられる。

図-7 は火力発電所内の鋼の配管系につき起振機による振動実験から得られた h の値および常時微動の観測値から計算された h の値を示したものである⁶⁾。この場合も h と ω_{or} の関係は明瞭な双曲線を示しており、従来の Kelvin 体としての取り扱いを、まったく否定しなければならないことになる。ただコンクリート、土の構造

図-5 Relations Between the Fraction of Critical Damping (h) and Natural Circular Frequency (ω_{or}) of the Structure

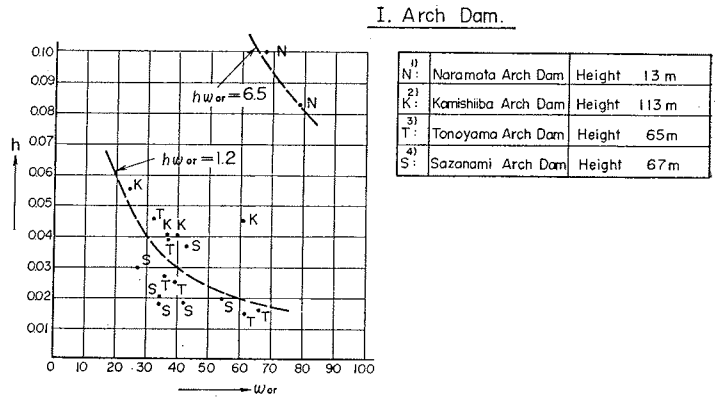


図-6 Relations Between the Fraction of Critical Damping (h) and Natural Circular Frequency (ω_{or}) of the Structure

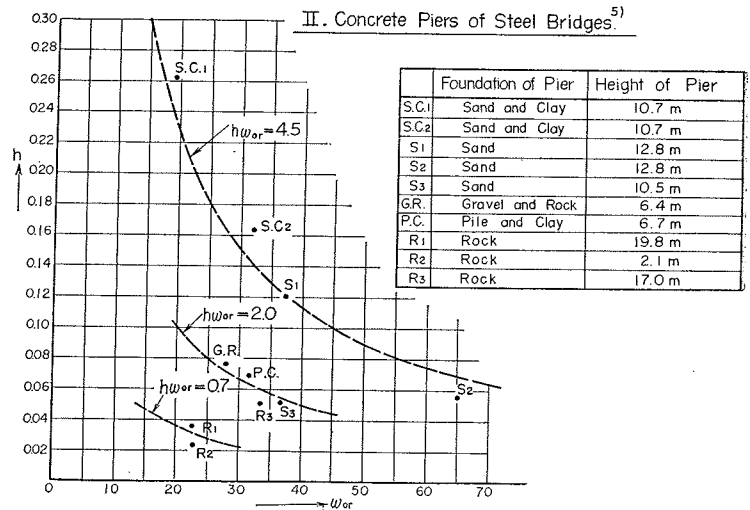
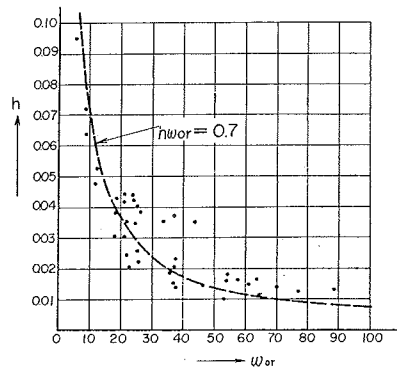


図-7

Relations Between the Fraction of Critical Damping (h) and Natural Circular Frequency (ω_{or}) of the Structure

III. Steel Piping in the Steam Power Station⁶⁾



物と異なり振動の大小によって h の値が変化することはあまり見られず、非線型性は小さいと見なされる。

5. コンクリート板および鋼板による振動実験

共振振幅および振動減衰を正確に比較するためコンクリート板と鋼板を用いて振動台上の強制振動およびコンクリート床上の自由減衰振動の二種の実験を行なった。その概要は 表-3 および 写真-1, 2 に示すとおりである。

強制振動においては共振振幅 y_{res} を求めるため振動台の加速度とコンクリート板、鋼板の上端の加速度を記録し、その両者に 90° の位相差のある点を採用した。事実振動台単位加速度当たりの版上端加速度は 90° の位相差のあるときが最大となった。図-8, 9 はコンクリート板および鋼板についてのそれぞれの記録である。これらの結果から振動台単位加速度当たりの $y_{res} \cdot l$ の値はつぎのように考えられる。

$$\frac{\ddot{y}_{res} \cdot l}{c_1} = \omega_{or}^2 \frac{y_{res} \cdot l}{c_1} \dots\dots\dots(23)$$

また式 (15), (17), (19) および 表-2 の y_{st} から

$$y_{st} \cdot l = c_1 \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \cdot P \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} f_n(x=l) \quad (24)$$

ここに P は模型により定まる物理定数とする。
以上から

$$h = \frac{y_{st} \cdot l}{2 y_{res} \cdot l} = \frac{c_1}{\omega_0^2} P \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} f_n(x=l) \frac{\omega_{or}^2}{2 \frac{\ddot{y}_{res} \cdot l}{c_1} \cdot c_1}$$

いま $\omega_{or} \approx \omega_0$ とおけば

$$h = \frac{y_{st} \cdot l}{2 y_{res} \cdot l} = \frac{P}{2 \frac{\ddot{y}_{res} \cdot l}{c_1}} \frac{\int_0^l f_n(x) dx}{\int_0^l f_n^2(x) dx} f_n(x=l) \dots\dots(25)$$

本実験では空気抵抗のあまり大きくなる範囲を避けるために最低次の振動のみを取りあげたので $n=1$ として $\frac{\int_0^l f_1(x) dx}{\int_0^l f_1^2(x) dx} f_1(x=l) = 1.565$ となるから

表-3

		Forced Vibration	Free Vibration
	Apparatus	Hanged shaking Table excited by Electro-magnetic Shaker	
	Measurement	Wire Resistant type Accelerometer on the top of the plate and on the table	Wire Resistant type displacement meter between the top of the plate & fixed point.
	Vibration	Constant Acceleration, sinusoidal	Damped free vibration given by the hand & by the hammer.
Concrete plate	Test piece	(1) 150 cm × 5 cm × 20 cm Vertical plate, lower end fixed on the table. (2) 120 cm × 5 cm × 20 cm plate This was made from Test piece (1) Cutting its upper part. (3) 105 cm × 5 cm × 20 cm plate This was made from Test piece (2) Cutting its upper part.	(2) 120 cm × 5 cm × 20 cm Vertical plate, Natural frequencies were changed by the added weights of steel block.
Steel plate	Test piece	(1) 780 mm × 7 mm × 200 mm Vertical plate, lower end fixed on the table. (2) 650 mm × 7 mm × 200 mm plate. (3) 530 mm × 7 mm × 200 mm plate.	(2) 650 mm × 7 mm × 200 mm plate, Natural frequencies were changed by the added weights of steel blocks

写真-1

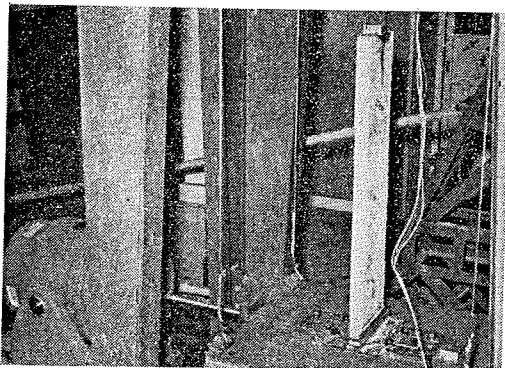


写真-2

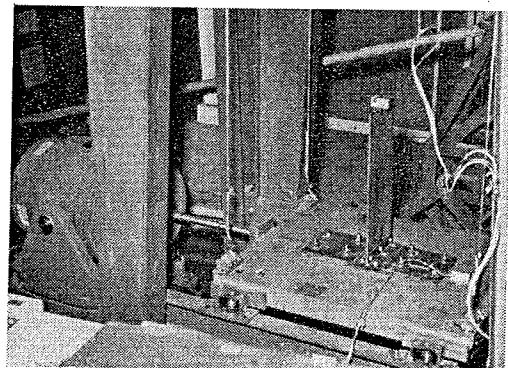


図-8

Resonance Test of Vertical Concrete Plate
on the Shaking Table

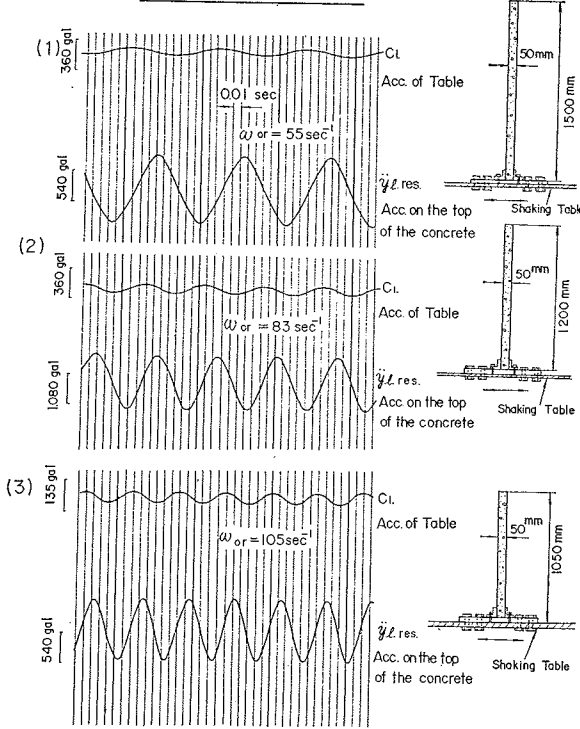
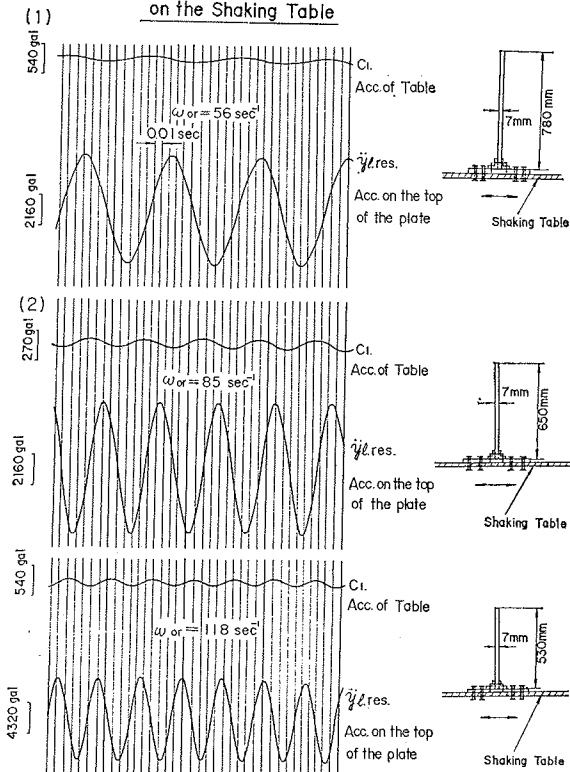


図-9

Resonance Test of Vertical Steel Plate
on the Shaking Table



$$h = \frac{y_{st} \cdot l}{2 y_{res} \cdot l} = \frac{1.565 P}{2 \frac{y_{res} \cdot l}{c_1}} \dots \dots \dots (26)$$

となる。

P の値は1または r/α であり、図-12 には1としたときの h の値を描いておいた。

コンクリート板、鋼板のいずれの場合も振動台加速度は50 gal程度で共振時上端加速度は1000~5000 gal程度となつてきわめて大きな値である。

これと対照的にきわめて微小な振動においての状態を知るための自由減衰振動を実験した例が図-10, 11に示してある。手で軽い衝撃を与えた場合、ハンマーでこれよりやや大きい衝撃を与えた場合の二者を示したが、最大振幅は前者で0.1 mm程度、後者で0.3 mm程度である。いずれも対数減衰率から Kelvin 体としての h の値を求め、これを図-12に強制振動から得られた計算値と併記してある。

これらの実験を通じて知られることはおよそつぎのとおりである。

(1) コンクリート板の場合、大きな振動になるにつれて h は増大し、共振振動数 ω_{or} は低下する。また実物構造通物に見られたのとまったく同様に h は ω_{or} に逆比例しており、Kelvin 体としての取り扱いをまったく否定している。自由減衰振動の場合 ω_{or} が大きいとき h の減少はあまり見られないが、これは空気抵抗の多いためであるかもしれない。 ω_{or} が小さいときは ω_{or} が減少するにつれて h の値が増大する傾向を示している。この場合は空気抵抗も小さく、また振幅が非常に小さいことから基礎からのエネルギーの消散も小さいと考えられるから、コンクリート板中の内部粘性により主として減衰が生ずると考えてよいかも知れない。コンクリート材料はすでに著者が示したように²⁾ Maxwell-Kelvin 体として取り扱ったほうがよくその動挙動を説明できるのであるから、ここに示した結果は本質的にコンクリート材料の性質から来たものと考えられる。強制振動により得られた h の値は自由振動により得られた値よりきわめて大きく、これは基礎からのエネルギー消散が大きいということとコンクリートの力学的性質の非線型性の二者によって説明されるべきことであろう。しかし図-6に示したように基礎の材質の差によって h の値がいちじるしく異なる点を考えれば、基礎からのエネルギー消散がその主要な原因であると見なしてよいことかも知れない。

(2) 鋼板については強制振動と自由振動の場合で h と ω_{or} の関係が明瞭な差異を示している。強制振動の場合は図-7の配管系とまったく同じ傾向を示して Kelvin 体でないことがわかるが、自由振動では ω_{or}

図-10

Free Vibration Test of Vertical Concrete Plate on the Floor

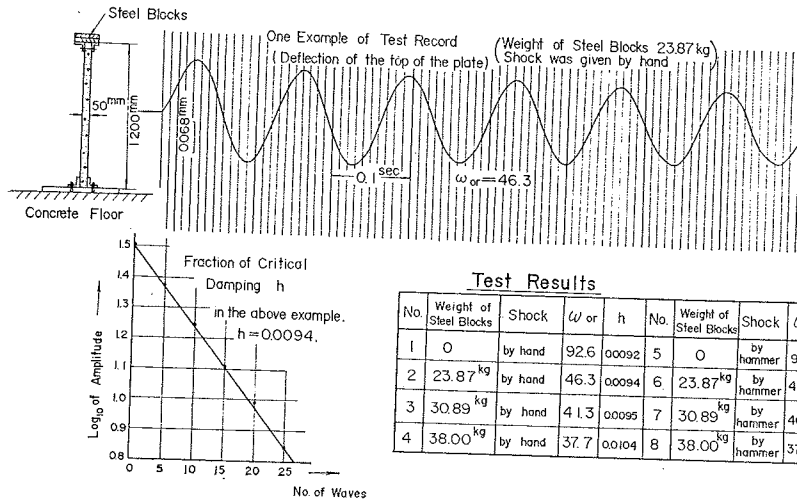
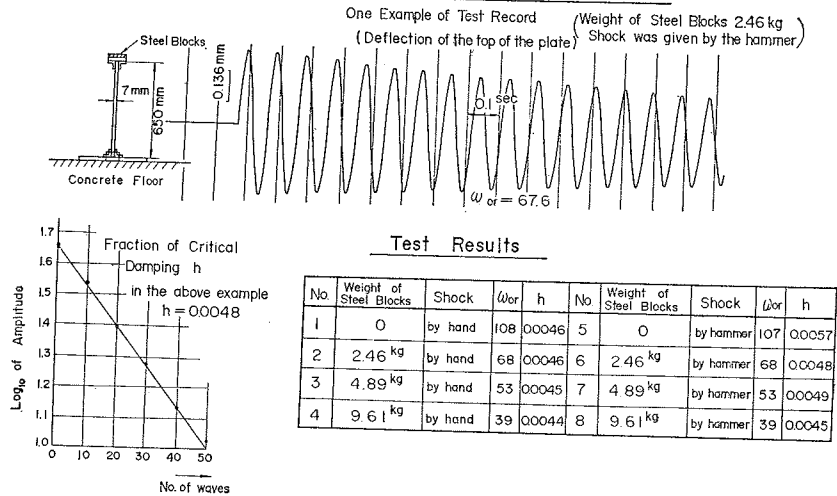


図-11

Free Vibration Test of Vertical Steel Plate on the Floor



が増大すると h の値が増大する傾向を示しており、かつ ω_{or} が大になると強制振動から得られた h の値にほとんど近い値を示している。

自由減衰振動ではきわめて小さい振幅で基礎からのエネルギー消散は小さいと考えられるので、減衰が鋼材の内部粘性と空気の抵抗によるものと考えれば鋼材が本質的に Kelvin 体であることを示すものかも知れない。しかし構造物として支持点からの振動エネルギー消散が考えられる場合には Maxwell 体のように低い周波数で大きな減衰を生ずるものと解釈されるのかも知れない。しかしこの場合でも非線型性によって説明されるべき要素はコンクリートや土の構造物にくらべて非常に少ないと思われる。

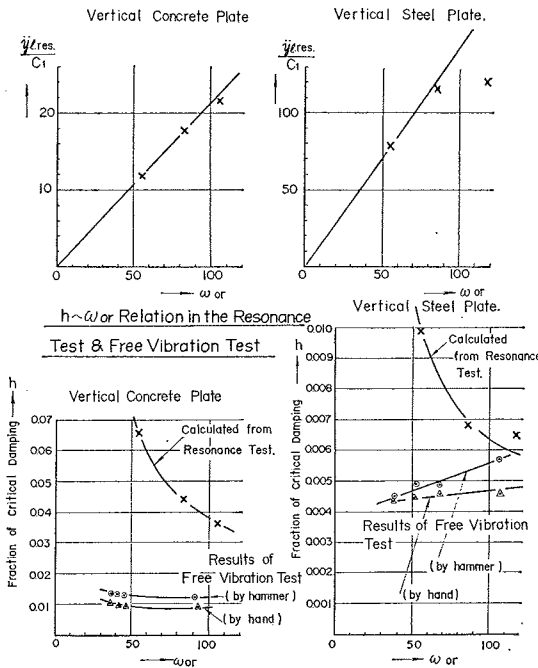
6. 考察ならびに結論

以上のべたところによって従来構造物の耐震問題に全面的に仮定されてきた、バネとダッシュポットの併立模型すなわち Kelvin 体は、現実の構造物の振動を説明する模型体としては適当でないことが明らかになった。

動的設計に採用されている加速度スペクトラム、速度スペクトラムなどは、すべて Kelvin 体を基礎にして計算されているが、これらはすべて適切な模型体に直して用いられるべきであろう。ただ便法として Kelvin 体によるスペクトラムにおいて h の値を ω_{or} に逆比例した値に採り、近似的に使用することは可能であろう。

また Kelvin 体による地震波の速度スペクトラムの値

図-12

$$\frac{y_{l.res.}}{C_1} \sim \omega \text{ or Relation in the Resonance Test}$$


がある一定の h の値に対してほぼ一定であることから構造物の耐震設計をある速度を基にして行なえばよいとの議論があるが、このような考えは Kelvin 体, Maxwell 体のいずれに対しても誤りであることが上述の議論から明らかである。同一地盤上に同一材質の構造物があっても h の値はその固有周期によって変化するのであるから速度一定となり得ないのである。

コンクリート岩土などの材料力学的性質はすでにのべたように Maxwell-Kelvin 体として取り扱えばより良い説明をなするのであるから、このような材料でできた構造物やこのような性質の基礎上の構造物は, Maxwell-Kelvin 体として取り扱えば実際の振動現象に関して従来よりは正確な説明ができるであろうと考えられる。

しかし鋼材料による構造物, 特に本文にあげた配管系のようなものの場合, Maxwell 体として取り扱ったほうが Kelvin 体として取り扱うより実際の説明に近くはなるにしても, 本質的になぜそうなるのか, さらによい模型体として何か別のものを考えた方がよいかなどは今後に残された問題であろう。

以上の論述を結論として要約すればおよそつぎのようになる。

(1) 粘性棒の曲げ振動の解は Kelvin 体に対するものが得られているが, ここに Maxwell-Kelvin 体, Maxwell 体などに対する解をも規準振動型による解法によ

って得ることができた。

(2) 構造物をその基礎をもふくめた一自由度系として取り扱い, Maxwell-Kelvin 体, Maxwell 体, Kelvin 体としたときの振動特性を (1) にのべた解を利用して吟味した。この結果, 従来耐震設計に想定されている Kelvin 体では, 共振振幅 $y_{res.}$ が自己振動数 ω_0 の三乗に逆比例しており, 限界減衰に対する割合 h は ω_0 に正比例して増加するのに対し, Maxwell 体では $y_{res.}$ は ω_0 の一乗に逆比例し, h は ω_0 に逆比例して減少すること, Maxwell-Kelvin 体では ω_0 の大小によって Kelvin 体, Maxwell 体の両者の性質を示すことなどが明らかにされた。

(3) ダム, 橋脚, 鋼配管系について実物試験の結果得られた h と ω_{or} の関係を整理すると, すべて双曲線上にのり, 従来の Kelvin 体としての取り扱いが誤りであることを示している。またコンクリート構造物では大きな振動に対して大きな h の値が観測され, コンクリートや基礎の土の材質の非線型性がその説明の根拠であろうと推定される。

(4) コンクリート板, 鋼板についての室内振動実験の結果から (3) にのべたことが確認された。ただ鋼構造物の非線型性は小さいものと考えられ, また基礎固定部分からの振動エネルギー消散の少ないと考えられる場合は, h は ω_{or} とともに増大する傾向を見せた。このことから鋼材そのものの振動減衰性および固定部からのエネルギー消散の機構などは, なお解明すべきことが多いと察せしめた。

(5) 従来の動的計算に用いられている地震波の加速度, 速度スペクトラムなどは適切な模型体にしたがって計算しなおさなければならない。

なお本文において触れなかった非線型の取り扱いは, 大きな地震加速度を想定する耐震設計の場合, 特に重要なものである。この問題については別の機会にのべることにしたい。

引用文献

- 1) 畑野: 地震に対するアーチダムの安定性, 電力技術研究所々報 Vol. 5, 5, 1955.
- 2) Takahashi: Behaviors of Vibration of Arch Dam, Technical Report C 5905, Central Research Institute of Electric Power Industry.
- 3) 岡本: アーチダムの地震観測, 土木学会論文集, 79号, 1961.
- 4) 2) に同じ
- 5) 久保: 橋脚振動の減衰性と振動性状, 地震工学国内シンポジウム, 1962.
- 6) 東京電力: 原子炉配管系の耐震安全設計に関する研究, 設験成果報告, 1962.
- 7) 畑野: 周期的圧縮荷重によるコンクリートの挙動, 土木学会論文集, 84号, 1962.
- 8) Nolle, A.W.: J. Applied Physics, 753-1948.
Horio, M.: J. Applied Physics, 977-1951.

(1964.3.13・受付)