

薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論

FUNDAMENTAL THEORY ON THE STATICAL ANALYSIS
OF THIN-WALLED CURVED BARS

深 沢 泰 晴*

By Yasuharu Fukasawa

要 旨 薄肉直線材の曲げねじれに関する H. Wagner の理論を曲率一定な薄肉曲線材の解析に拡張し、各種の断面定数を曲線材に固有な形で定義して、任意な外力を受ける曲結材の力と変形の関係における基本式を一般的な形で与えたものである。

1. 緒 言

近年、薄肉材の構造要素としての力学的有利性が評価され、H. Wagner¹⁾ によって端緒が開かれたその理論的、実験的研究は、過去 30 有余年間、F. & H. Bleich²⁾, R. Kappus³⁾, J.N. Goodier⁴⁾ ら多数の研究者によってはなばなく展開され、構造設計に大きな革新をもたらした。しかしその研究成果は、直線材については 1950 年代ころまでに実用的な意味では十分な精度をもついわゆる「薄肉材の曲げねじれ理論」として体系づけられ、今日の薄肉構造計算の基礎となっている。

ところが、薄肉曲線材の解析を、これら上記の理論と同程度の厳密さで試みた研究はきわめて少ない。著者の知るかぎりでは、曲線橋の解析を対象とした二つの研究^{5), 6)} だけであり、まだ一般に認められた理論は確立されていないのが現状であると思われる。

文献 5) はこの種の解析をはじめて試みたという先駆的意味において、十分評価されなければならないと思うが、しかしその反面同論文においては、ねじれに関する基本的な事項が正しく把握されていないという批判もまたまぬがれ得ないと思う。その結果は St. Venant のねじりの計算において、ねじりの中心としてせん断中心を考えているにもかかわらず、ねじり率としては中立軸のそれが用いられているという本質的な矛盾を生み出している。その影響は曲げねじれおよびせん断中心の計算など基本式のほとんどにおよんでいるのはもちろん、その後発表された一連の研究⁷⁾ にまで波及しているのは惜しまれる。

St. Venant のねじれによる断面のそり量は、ねじれ中心軸のねじれ率に比例するというこのきわめて当然なねじりの基本的性質は、直線材の場合には、すべての母線のねじれ率が等しいので表面には表われないが、各母線のねじれ率の異なる曲線材においては当然考えなければならぬことがらである。

文献 6) ではこの本質的な欠陥は正されているが、多室断面のねじり、せん断中心、せん断応力などに対する解析が不十分であると思われるし、また開いた断面に対するねじれ定数の表式は筆者の結果と異なっている。さらに両論文^{5), 6)} に共通していえることであるが、曲げとねじれを同時に受ける場合の弾性方程式を導くにあたっては、単純曲げの式をそのまま用いることができないという点がおざりにされていると思われる。すたわち、単純曲げの諸式はねじりを受けていないという条件のもとに導かれたものであるから、これをもとにして曲げとねじりを同時に受ける場合の弾性方程式を誘導するには式の構成が不十分である。この詳細は本文にゆずる。なお、両論文において与えられている弾性方程式は、曲率面外への変形を対象としたものであり、任意な変形に対するものではない。

本論文は任意な外力、すなわち引張り(あるいは圧縮)任意方向の曲げ、曲げねじれなどの同時作用を受ける曲率一定な薄肉曲線材の静力学的解析を行ない、基礎的事項を明らかにして、各種の基本式を与えたものである。もちろん、前述のような個々の問題点に対する筆者の計算結果が示されるが、それとともにねじりの基本的性質の一つであるねじり中心相互間の関係を明らかにし、また理論全体をできるだけ系統的に表示することを意図した。

曲線材の弾性方程式はもっとも一般的と思われる形を与え、中立軸の変形で表わした場合と、せん断中心軸の変形で表わした場合とを比較できるようにした。両者は一長一短を有するので、実際計算においてそのいずれを用いるべきかは、支点条件、外力の種類、断面の特性などの関連において定めなければならないと思われる。特別な場合として、中立軸の伸縮を無視しうる場合についても付記した。

なお、本論文で得られている結果は、筆者が薄肉多角断面の曲りばりについてこれとはまったく別の解析方法によって得た結果⁸⁾ と一致している。

2. 仮定と記号

曲線材の断面形状と、曲線材を構成する各母線の曲率とがその全長にわたって一定で、しかも薄肉断面である曲線材の引張り(あるいは圧縮)、曲げ、ねじれなど一般

* 正員 工修 東京大学大学院 数物系研究科博士課程在学

的な力と変形の関係を解析するにあたって、ここで設けられる理論上の仮定はつぎのようである。

- ① 解析はすべて微小変形を対象とする。
- ② あらゆる変形に対して、横断面の形状は変化しないものとする。
- ③ 純粋な曲げに対しては、Navier の平面保持の原則が成立するものとする。すなわち、曲げにともなうせん断変形は無視する。

④ 曲げねじれにおける垂直応力の計算には、St. Venant のねじれによるそりだけを考える。すなわち、その垂直応力の変化にともなうせん断応力によるそりは無視する。

つぎに、使用のおもな座標系を列記する；

- ① 円柱座標系 $(O'-\rho, \theta, \zeta)$ ：変形前の曲線材の断面の中立点 O を連ねた軸線すなわち中立軸^{注)}の曲率中心 O' を原点として、 $\rho-\theta$ 平面は曲線材の曲率面に一致している(図-1)。なお、変形前のすべての母線の曲率中心が集まる曲率中心線は ζ 軸と一致することになる。
- ② 右手系直角座標系 $(O-x, y, z)$, $(O-X, Y, Z)$ および $(D-\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ：座標系 $(O-x, y, z)$ は断面の中立点を原点とし、 x 軸が変形前の状態で①の ζ 軸に平行な座標

図-1

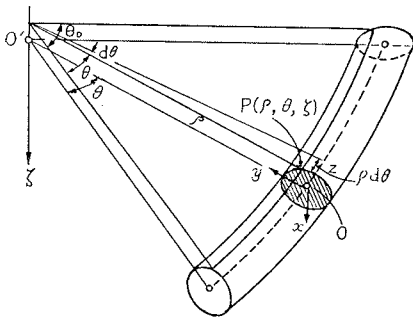
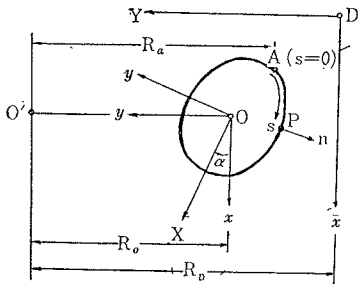


図-2



注) いかなる単純曲げによっても垂直応力が生じない点をその断面の中立点と呼び、各断面の中立点を連ねた軸線を中立軸と呼ぶことにする。文献5)ではこの中立点を図心と呼んでいるがこれは不適当と思う。曲線材では中立軸と重心軸とは一致しない。

系である $(x \equiv \zeta)$ 。座標系 $(O-X, Y, Z)$ は座標系 $(O-x, y, z)$ を z 軸のまわりに右まわりに α だけ回転させ、 X, Z 軸がそれぞれ断面の主軸に一致するように定めた座標系である $(Z \equiv z)$ 。座標系 $(D-\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ は断面上に任意に選んだ定点 D を原点とし、 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 軸がそれぞれ前記の x, y, z 軸に平行な座標系である。図-2 参照。

③ 曲線座標系 (s, n, θ) ： s は断面の薄肉中心線上の任意に選んだ定点 A を原点とし、薄肉中心線に沿った曲線座標であり、 n は薄肉中心線を原点とし、 s に直交する直線座標である(図-2)。

④は空間に固定された座標系であるのに対し、②、③は各断面上に固定された座標系である。曲線材の任意点 P の位置は $P(\rho, \theta, \zeta)$ で表わされ、また一定断面上 $(\theta = \text{const.})$ の任置点 P の位置は $P(x, y), P(X, Y), P(\bar{x}, \bar{y})$ および $P(s, n)$ などで表わすことができる。

断面上の任意点 P ならびに定点 O, S (せん断中心), D を通る軸線の変形は、それらの x, y, z 方向への変位とねじれ回転角によって表わし、それぞれつぎのような記号を用いる；

断面上の任意点 P の変形： $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \varphi)$

断面の中立点 O の変形： (u, v, w, φ)

断面のせん断中心 S の変形： (u^*, v^*, w^*, φ)

断面上の任意な定点 D の変形： $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \varphi)$

すべての母線のねじれ回転角 φ は仮定②によって同一であり、したがって断面のねじれ回転角ともいえる。 φ の符号は θ の正の方向に向かって右まわりを正とする。なお断面の中立点 O およびせん断中心 S の位置についてはそれぞれ 3. および 5. でのべる。

3. 曲げに関する断面定数と中立点

曲線材の横断面上に、任意に選んだ定点 D を原点とし曲率平面に垂直な \bar{x} 軸と曲率中心方向と一致する \bar{y} 軸とをもつ直角座標系 $(D-\bar{x}, \bar{y})$ を設ける(2. および 図-2 参照)。この座標系を用いて曲率一定な曲線材の定点 D に関する断面定数のうち、引張り(あるいは圧縮)と曲げに関する断面定数を次式で定義する；

D 点に関する等価断面積

$$F_D = R_D \int_F \frac{1}{\rho} dF$$

\bar{x} 軸のまわりの断面一次モーメント

$$Z_{\bar{x}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{y} dF$$

\bar{y} 軸のまわりの断面一次モーメント

$$Z_{\bar{y}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{x} dF$$

\bar{x} 軸のまわりの断面二次モーメント

$$J_{\bar{x}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{y}^2 dF$$

\bar{y} 軸のまわりの断面二次モーメント

$$J_{\bar{y}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{x}^2 dF$$

.....(1)_{a-f}

\bar{x}, \bar{y} 軸に関する断面相乗モーメント

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{x}\bar{y} dF$$

ここに、 ρ は断面上の任意点 P を通る母線の曲率半径、 R_D は各断面の D 点を連ねた軸線の曲率半径である。また F ($= \int_F dF$) は曲線材の横断面の面積を表わし、特に薄肉断面については、薄板厚を t 、薄肉中心線に沿う線座標を s とすると $dF = t ds$ とすることができる。

断面上の特定点、すなわち中立点 O およびせん断中心 S に関する式 (1) に対応する断面定数については、つぎのような記号を用いて表わすことにする；

中立点 O に関する断面定数^{a), b)}：

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} dF \\ Z_x &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} y dF \\ Z_y &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} x dF \\ J_x &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} y^2 dF \\ J_y &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} x^2 dF \\ J_{xy} &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} xy dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)_{a-f}$$

せん断中心 S に関する断面定数：

$$\left. \begin{aligned} F_s &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} dF \\ Z_x^* &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} (y - y_s) dF \\ Z_y^* &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} (x - x_s) dF \\ J_x^* &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} (y - y_s)^2 dF \\ J_y^* &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} (x - x_s)^2 dF \\ J_{xy}^* &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} (x - x_s)(y - y_s) dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)_{a-f}$$

ここに、 (x_s, y_s) は中立点 O を原点とし、 \bar{x}, \bar{y} 軸に平行な座標軸 x, y 軸をもつ座標系 ($O-x, y$) におけるせん断中心 S の座標である。また、 R_0 および R_s はそれぞれ中立軸およびせん断中心軸 (各断面のせん断中心を連ねた軸線) の曲率半径である。

つぎに、断面上に任意に選んだ二つの定点 J, K について、 J 点に関する断面定数と K 点に関する断面定数との関係を求めるとつぎのようになる；

$$\left. \begin{aligned} F_K &= \frac{R_K}{R_J} F_J \\ Z_{xK} &= \frac{R_K}{R_J} \{Z_{xJ} - (\bar{y}_K - \bar{y}_J) F_J\} \\ Z_{yK} &= \frac{R_K}{R_J} \{Z_{yJ} - (\bar{x}_K - \bar{x}_J) F_J\} \end{aligned} \right\} (4)_{a-f}$$

$$\left. \begin{aligned} J_{xK} &= \frac{R_K}{R_J} \{J_{xJ} - 2(\bar{y}_K - \bar{y}_J) Z_{xJ} \\ &\quad + (\bar{y}_K - \bar{y}_J)^2 F_J\} \\ J_{yK} &= \frac{R_K}{R_J} \{J_{yJ} - 2(\bar{x}_K - \bar{x}_J) Z_{yJ} \\ &\quad + (\bar{x}_K - \bar{x}_J)^2 F_J\} \\ J_{xyK} &= \frac{R_K}{R_J} \{J_{xyJ} - (\bar{x}_K - \bar{x}_J) Z_{xJ} \\ &\quad - (\bar{y}_K - \bar{y}_J) Z_{yJ} \\ &\quad + (\bar{x}_K - \bar{x}_J)(\bar{y}_K - \bar{y}_J) F_J\} \end{aligned} \right\}$$

ここに、 (\bar{x}_J, \bar{y}_J) および (\bar{x}_K, \bar{y}_K) はそれぞれ座標系 ($D-\bar{x}, \bar{y}$) における J 点および K 点の座標である。suffix J および K はそれぞれ J 点および K 点に関する量であることを表わしている。

中立点 O の位置は

$$Z_x = 0, \quad Z_y = 0 \dots\dots\dots (5)$$

によって定めることができる。いま座標系 ($D-\bar{x}, \bar{y}$) における O 点の座標を $O(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ とし、 O 点に関する断面一次モーメントを D 点に関する断面一次モーメントで表わすと、式 (4)_{b,c} より

$$Z_x = \frac{R_0}{R_D} (Z_{\bar{x}} - \bar{y}_0 F_D)$$

$$Z_y = \frac{R_0}{R_D} (Z_{\bar{y}} - \bar{x}_0 F_D)$$

したがって、中立点 O の位置を与える次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{Z_{\bar{y}}}{F_D} = \frac{\int_F \frac{1}{\rho} \bar{x} dF}{\int_F \frac{1}{\rho} dF} \\ \bar{y}_0 &= \frac{Z_{\bar{x}}}{F_D} = \frac{\int_F \frac{1}{\rho} \bar{y} dF}{\int_F \frac{1}{\rho} dF} \\ R_0 &= \frac{F}{\int_F \frac{1}{\rho} dF} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)_{a-c}$$

ここで、(2)_a、(6)_c の両式から

$$F_0 = F \dots\dots\dots (7)$$

なる関係が得られる。すなわち、中立点に関する等価断面面積は横断面の面積に等しい。

なお、式 (5) は x, y 両軸の平行移動に対して、 J_x, J_y がともに最小値をとる条件にほかならない。すなわち、式 (4)_{d,e} より

$$J_x = \frac{R_0}{R_D} (J_{\bar{x}} - 2\bar{y}_0 Z_{\bar{x}} + \bar{y}_0^2 F_D)$$

$$J_y = \frac{R_0}{R_D} (J_{\bar{y}} - 2\bar{x}_0 Z_{\bar{y}} + \bar{x}_0^2 F_D)$$

であるから

$$\frac{\partial J_x}{\partial \bar{y}_0} = -2 \frac{R_0}{R_D} (Z_{\bar{x}} - \bar{y}_0 F_D) = -2 Z_x = 0$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial \bar{x}_0} = -2 \frac{R_0}{R_D} (Z_{\bar{y}} - \bar{x}_0 F_D) = -2 Z_y = 0$$

断面の中立点 O の位置が式 (6) によって定めれば、横断面の中心点 C (同一断面の直線材の図心) と O 点との曲率半径方向の偏倚 e も求まる。この場合 O 点は常に C 点より曲率中心側にある。 e の値を知れば J_x はつぎのような簡単な式でも計算することができる。

$$J_x = R_0 F e \quad \dots\dots\dots(8)$$

なぜならば

$$\begin{aligned} J_x &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} y^2 dF = R_0 \int_F \frac{y^2}{R_0 - y} dF \\ &= -R_0 \int_F y dF + R_0^2 \int_F \frac{1}{\rho} y dF \\ &= -R_0 \int_F (y + e) dF + R_0 e F \\ &= R_0 F e \end{aligned}$$

さて、(5)、(7) の両式を考慮すると、中立点 O に関する断面定数と任意点 K に関する断面定数との関係はとくにつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_K &= \frac{R_K}{R_0} F \\ Z_{xK} &= -\frac{R_K}{R_0} F y_K \\ Z_{yK} &= -\frac{R_K}{R_0} F x_K \\ J_{xK} &= \frac{R_K}{R_0} (J_x + F y_K^2) \\ J_{yK} &= \frac{R_K}{R_0} (J_y + F x_K^2) \\ J_{xyK} &= \frac{R_K}{R_0} (J_{xy} + F x_K y_K) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)_{a-c}$$

ここに、 (x_K, y_K) は座標系 $(O-x, y)$ における K 点の座標である。

つぎに、は座標系 $(O-x, y)$ から原点 O を中心に右まわりに α だけ回転していて断面の主軸と一致する座標軸をもった座標系 $(O-X, Y)$ を考える (図-2)。両座標系間には

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ Y &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

なる関係が存在する。したがって、斜交する二軸に関する断面定数間の関係は容易に得られるが、それらは直線材の場合とまったく同一であるので、ここに記すのは省略する。つぎに主断面二次モーメントの定義式のみかか

$$\left. \begin{aligned} J_X &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} Y^2 dF \\ J_Y &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} X^2 dF \\ J_{XY} &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} XY dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

4. St. Venant のねじりによるそりとねじれ定数

曲線材を構成するすべての母線のねじれ率はその全長

を通じて一定なねじれ、すなわち St. Venant のねじれについて検討する。

まず、曲線材の断面上に任意に選んだ定点 D をねじりの中心とした場合の St. Venant のねじりを考える。このねじれ中心軸 (定点 D を通る軸線) のねじれ率 ψ_z は円柱座標系 $(O'-\rho, \theta, \zeta)$ を用いて表わすと

$$\psi_z = \frac{1}{R_D} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{1}{R_D} \frac{d\bar{a}}{d\theta} \right) \dots\dots\dots(12)$$

さらに、同じねじり中心軸の曲げねじれ率 ϑ_z を

$$\vartheta_z = \frac{1}{R_D} \frac{d\psi_z}{d\theta} = \frac{1}{R_D^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{1}{R_D} \cdot \frac{d^2\bar{a}}{d\theta^2} \right) \dots\dots\dots(13)$$

で定義すると、St. Venant のねじりにおいては、ねじれ率が一定であるから

$$\vartheta_z = \frac{1}{R_D} \cdot \frac{d\psi_z}{d\theta} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

が成立する。

断面上の任意点 P の変形 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \varphi)$ とねじり中心 D の変形 $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \varphi)$ との関係は

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &\doteq \bar{a} - \bar{y} \varphi \\ \bar{v} &\doteq \bar{b} + \bar{x} \varphi \\ \bar{w} &\doteq \bar{c} - \bar{y} \phi_x - \bar{x} \phi_y + W_z^{(6), (9)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)_{a-c}$$

ここに、 ϕ_x, ϕ_y はそれぞれ D 点を通る軸線の $\bar{y}-\bar{z}$ 面内、 $\bar{x}-\bar{z}$ 面内における接線回転角である (6. 参照)。また W_z は定点 D を中心とした St. Venant のねじりによって断面上の任意点 P に生ずる軸方向の変位 (そり量) である。この場合、ねじり中心 D 点に関するそり関数 \bar{w} を次式で定義することができる。

$$W_z = -\bar{w} \psi_z \dots\dots\dots(16)$$

つぎに、式 (15) の関係を、円柱座標系で表わしたひずみ成分と変位との関係式¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\rho &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho}, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - v \right) \\ \epsilon_\zeta &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta}, & \tau_{\rho\theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\bar{w}}{\rho} \right) \\ \tau_{\theta\zeta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}, & \tau_{\zeta\rho} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)_{a-f}$$

に代入し、式 (12) を考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\rho &= \epsilon_\zeta = \tau_{\zeta\rho} = 0 \\ \epsilon_\theta &= \frac{R_D}{\rho} (\epsilon_z - \bar{y} \kappa_x - \bar{x} \kappa_y) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} \\ \tau_{\rho\theta} &= -\frac{R_D}{\rho} \bar{x} \psi_z + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{W_z}{\rho} \right) \\ \tau_{\theta\zeta} &= -\frac{R_D}{\rho} \bar{y} \psi_z + \frac{\partial W_z}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)_{a-d}$$

ここに、 ϵ_z は D 点の垂直ひずみであり、 κ_x, κ_y はそれぞれ D 点を通る母線の $\bar{y}-\bar{z}$ 面内、 $\bar{x}-\bar{z}$ 面内における曲率の変化である [式 (70)_{a, e} 参照]。

曲線材が St. Venant のねじりだけを受け、引張りお

よび曲げが作用していない場合を考える。この場合には

$$\varepsilon_z = \kappa_x = \kappa_y = 0$$

であるから、(14)、(16)、(18)の諸式を考慮すると、式(17)は結局つぎのようになる。

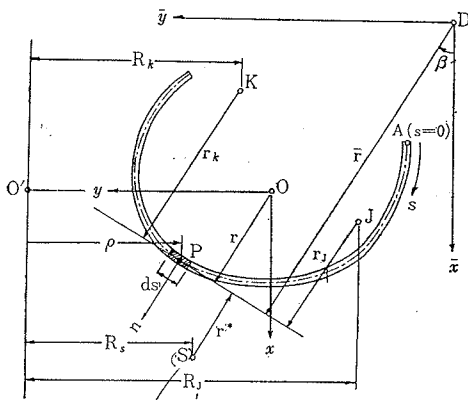
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \varepsilon_\theta = \varepsilon_\zeta = r_{\zeta\rho} = 0 \\ r_\rho &\equiv r_{\rho\theta} = - \left[\frac{R_D}{\rho} \bar{x} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \right] \psi_z \\ r_\zeta &\equiv r_{\theta\zeta} = - \left[\frac{R_D}{\rho} \bar{y} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \zeta} \right] \psi_z \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

式(19)はすべての断面形状に対してあてはまる式であるが、とくに薄肉断面に対してはつぎのように表わすことができる。薄肉断面の薄肉中心線およびその法線方向に設けた曲線座標(s, n, θ)を用いると、断面上の任意点 P におけるせん断ひずみ $r_{sn}, r_{s\theta}$ はひずみ成分間の関係から

$$\left. \begin{aligned} r_s &\equiv r_{s\theta} = -r_{\rho\theta} \cos \beta - r_{\theta\zeta} \sin \beta \\ r_n &\equiv r_{n\theta} = -r_{\rho\theta} \sin \beta + r_{\theta\zeta} \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

ここに、 β は P を通る n 軸が ζ 軸となす傾斜角(正の方向は φ と同じ)である(図-3)。もちろん、他のひずみ成分は零である。式(20)に式(19)を代入し、さらに

図-3



$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) &= -\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \cos \beta - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \zeta} \sin \beta \\ \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) &= -\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \sin \beta + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \zeta} \cos \beta \end{aligned} \right\}$$

を考慮すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} r_s &= \left[\frac{R_D}{\rho} \bar{r}_r = \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \right] \psi_z \\ r_n &= \left[\frac{R_D}{\rho} \bar{r}_n - \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \right] \psi_z \end{aligned} \right\} \dots (21)_{a,b}$$

ここに、 \bar{r}_s, \bar{r}_n はそれぞれねじりの中心 D から任意点 P における s の接線および n 軸におろした垂線の長さであり次式で表わされる(図-3)。

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_s &= \bar{x} \cos \beta + \bar{y} \sin \beta \\ \bar{r}_n &= \bar{x} \sin \beta - \bar{y} \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

通常の薄肉断面では、 $\tau_n = G r_n$ は $\tau_s = G r_s$ にくらべると微小であり、

$$\tau_n = G r_n = G \left[\frac{R_D}{\rho} \bar{r}_n - \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \right] \psi_z \doteq 0 \dots (23)$$

とすることができる。ここに、 G はせん断弾性定数。

St. Venantのねじりによって生ずる断面のそり量は、薄肉断面に対しては容易に計算することができる。以下ねじりの中心を D 点とするときのそり関数 $\bar{\omega}$ (以下単に D 点に関するそり関数という)を開いた断面、閉じた断面の各場合について求める。そり関数を知れば、そり量は式(16)で計算できる。

(1) 開いた断面

この場合には St. Venant のねじれによって生ずるせん断応力 τ_s は、薄板厚方向に対する曲率の影響を無視すると、薄肉中心線上で零になるような分布をするから

$$n=0 \text{ で } \tau_s=0 \dots (24)$$

したがって、式(21)は(24)、(23)の両式を用いて解くことができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \frac{\rho}{R_D} \bar{\omega}_0 \\ \text{ここに } \bar{\omega}_1 &= R_D \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} \bar{r}_s ds + \frac{R_D}{\rho} \bar{r}_n n \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

$\bar{\omega}_0/R_D$ は積分定数を表わし、 $\bar{\omega}_0$ の値は全断面のそり量の平衡条件

$$R_{\bar{\omega}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{\omega} dF = 0 \dots (26)$$

によって定めることができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= -\frac{B_{\bar{\omega}_1}}{F} \\ \text{ここに } B_{\bar{\omega}_1} &= R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{\omega}_1 dF \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

L-型、T-型、+型などの断面では薄肉中心線の交点がねじり中心に選ばれたとき、すなわちその交点に関するそり関数は、式(25)_bの右辺の第一項は零となるので第二項が重要な意味をもつが、このような場合を除けば第一項の値は第二項の値にくらべて微小であり、一般には無視することができる。これはそり量の板厚方向への変化を無視することと同等である。このような仮定を設け、また $\bar{r} = \bar{r}_s$ と書くと、 D 点に関するそり関数として結局次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 - \frac{\rho}{R_D} \frac{B_{\bar{\omega}_1}}{F} \\ \bar{\omega}_1 &= R_D \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

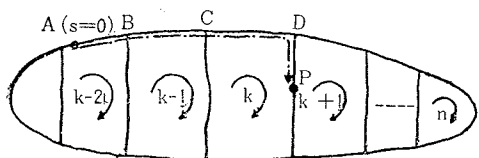
(2) 閉じた断面

定点 D をねじりの中心とする St. Venant をねじりによって、 k 室に属す断面上の任意位置に生ずるせん断流を $q_{D,k}$ と書くと

$$q_{D,k} = \tau_{st} = G r_{st} \dots (29)$$

一方、 k 室を一巡する循環せん断流を $q^0_{D,k}$ とすると、図-4に示すような並列多室断面の場合には、 $q_{D,k}$ はつぎのようになる。

図-4



$$\left. \begin{aligned}
 q_{D,k} &= q_{D,k}^0 - q_{D,k-1}^0 \cdots \cdots k-1 \text{ 室と } k \text{ 室との境界壁} \\
 &= q_{D,k}^0 \cdots \cdots \text{境界でない壁} \\
 &= q_{D,k}^0 - q_{D,k+1}^0 \cdots \cdots k \text{ 室と } k+1 \text{ 室との境界壁} \\
 &\cdots \cdots \cdots (30)
 \end{aligned} \right\}$$

つぎに、 k 室に属するねじり関数 \tilde{q}_k を

$$q_{D,k} = \frac{R_D^2}{\rho^2} G \psi_2 \tilde{q}_k \cdots \cdots (31)$$

で定義すると、 \tilde{q}_k はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{q}_k &= \tilde{q}_k^0 - \tilde{q}_{k-1}^0 \cdots \cdots k-1 \text{ 室と } k \text{ 室との境界壁} \\
 &= \tilde{q}_k^0 \cdots \cdots \text{境界でない壁} \\
 &= \tilde{q}_k^0 - \tilde{q}_{k+1}^0 \cdots \cdots k \text{ 室と } k+1 \text{ 室との境界壁} \\
 &\cdots \cdots \cdots (32)
 \end{aligned} \right\}$$

ここに、 \tilde{q}_k^0 は室の循環ねじり関数と呼ぶことができ、

$$q_{D,k}^0 = \frac{R_D^2}{\rho^2} G \psi_2 \tilde{q}_k^0 \cdots \cdots (33)$$

で定義される量である。

一方、式 (131) において $\sigma_\theta = 0$ とおくと

$$\tau_s t \rho^2 = \text{const.} \cdots \cdots (34)$$

であるから、式 (31) および (34) で定義される \tilde{q}_k および \tilde{q}_k^0 を断面上の位置すなわち s には無関係な量である。したがって、(29)、(31)の両式を用いて、式(21)_aを積分すると $\bar{\omega}$ がつぎのように得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \frac{\rho}{R_D} \bar{\omega}_0 \\
 \bar{\omega}_1 &= R_D \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds - R_D^2 \rho \tilde{q}_k \int_0^s \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \} \\
 &\cdots \cdots \cdots (35)_{a,b}
 \end{aligned} \right\}$$

ただし、式 (35)_b で表わされる $\bar{\omega}_1$ の線積分の計算は、たとえば 図-4 に示すような積分路によって P 点の $\bar{\omega}_1$ を求める場合には

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}_1 &= R_D \rho \int_A^P \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds - R_D^2 \rho \left[\tilde{q}_{k-2} \int_A^B \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \right. \\
 &\quad + \tilde{q}_{k-1} \int_B^C \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds + \tilde{q}_k \int_C^D \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\
 &\quad \left. + \tilde{q}_k \int_D^P \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \right] \\
 &= R_D \rho \int_A^P \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds - R_D^2 \rho \left[\tilde{q}_{k-2}^0 \int_A^B \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \right. \\
 &\quad + \tilde{q}_{k-1}^0 \int_B^C \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds + \tilde{q}_k^0 \int_C^D \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\
 &\quad \left. + (\tilde{q}_k^0 - \tilde{q}_{k+1}^0) \int_D^P \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \right]
 \end{aligned}$$

としなければならない。

式 (35) に含まれる \tilde{q}_k あるいは \tilde{q}_k^0 はつぎのように

して定めることができる。式 (35)_b の右辺の線積分を k -室の全周にわたって施せば、式 (32) を考慮して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 -\tilde{q}_{k-1}^0 \int_{k-1,k} \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds + \tilde{q}_k^0 \int_k \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\
 -\tilde{q}_{k+1}^0 \int_{k,k+1} \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\
 = \frac{1}{R_D} \int_k \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds \quad (k=1,2,\dots,n) \cdots \cdots (36)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\int_{k-1,k}$ および $\int_{k,k+1}$ はそれぞれ $k-1$ 室と k 室および k 室と $k+1$ 室の境界壁に沿う線積分を意味し、 \int_k は k 室についての全周線積分を意味する。

式 (36) ($k=1,2,\dots,n$) で表わされる n 元連一次方程式を解くと

$$\tilde{q}_k^0 = \frac{1}{R_D} \sum_{j=1}^n a_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds \cdots \cdots (37)$$

ここに、 a_{kj} は式 (36) の係数行列の逆行列の (kj) 要素である。 \tilde{q}_k^0 が求めれば式 (32) によって \tilde{q}_k が定まる。特に一室閉断面の場合には

$$\tilde{q} = \tilde{q}^0 = \frac{1}{R_D} \cdot \frac{\int \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds}{\int \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds} \cdots \cdots (38)$$

断面上のすべての点について $\bar{\omega}_1$ が計算されれば、 $\bar{\omega}_0$ は開いた断面の場合と同様に式(27)で計算すればよい。

薄肉断面のもっとも一般的な形は、図-5 に示すような開いた断面と閉じた断面とが結合した断面形であり、以上の結果から上述の (1)、(2) 二種の断面はこれの特別な場合として扱うことができることがわかる。すなわち開いた断面の部分に対しては

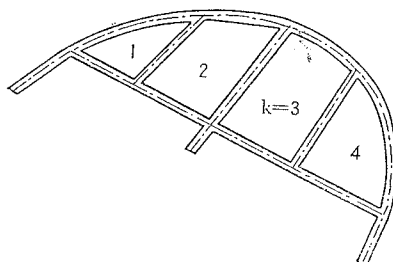
$$\tilde{q}_k = 0$$

と考えることにすれば、このような一般薄肉断面のそり関数は式 (35) と同形な次式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 - \frac{\rho}{R_D} \frac{B_{\bar{\omega}_1}}{F} \\
 \bar{\omega}_1 &= R_D \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds - R_D^2 \rho \tilde{q}_k \int_0^s \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \} \\
 &\cdots \cdots \cdots (39)
 \end{aligned} \right\}$$

ただし、(29)~(33) および (37) の諸式はこの場合にもそのまま適用される。なお、以下にのべるそり関数についての種々の検討はすべて式 (39) を対象にする。

図-5



さて、断面上の特定点すなわち中立点 O ならびにせん断中心 S をねじりの中心とした場合のそり関数は、特につきのような記号で表わす。

中立点 O に関するそり関数：

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_1 - \frac{\rho}{R_0} \cdot \frac{B_{\omega_1}}{F} \\ \text{ここに } \omega_1 &= R_0 \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r ds - R_0^2 \rho \tilde{q}_k \int_0^s \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\ B_{\omega_1} &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} \omega_1 dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

せん断中心 S に関するそり関数：

$$\left. \begin{aligned} \omega^* &= \omega_1^* - \frac{\rho}{R_s} \cdot \frac{B_{\omega_1^*}}{F} \\ \text{ここに, } \omega_1^* &= R_s \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r^* ds - R_s^2 \rho \tilde{q}_k \int_0^s \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\ B_{\omega_1^*} &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega_1^* dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

(40), (41) の両式において、 r および r^* はそれぞれ断面の中立点 O およびせん断中心 S から任意点 P における s の接線におろした垂線の長さである。 \tilde{q}_k については後述する。

中立点 O ならびにせん断中心 S をねじりの中心とした St. Venant のねじりによって断面上の任意点 P に生ずるそり量 W ならびに W^* は式(16)と同様に

$$\left. \begin{aligned} W &= -\omega \psi_z \\ W^* &= -\omega^* \psi_z^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)_{a,b}$$

で計算される。ここに ψ_z および ψ_z^* はそれぞれ中立軸およびせん断中心軸のねじれ率である〔式(71)_fおよび(72)_f参照〕。

つぎに、断面上に任意に選んだ二つの定点 J および K について、 J 点をねじりの中心と考えたときのそり関数 ω_J と K 点をねじりの中心と考えたときのそり関数 ω_K との関係を求める。座標系 $(D-\bar{x}, \bar{y})$ における J 点および K 点の座標をそれぞれ $J(\bar{x}_J, \bar{y}_J)$ および $K(\bar{x}_K, \bar{y}_K)$ とすると図-3を参照して

$$\begin{aligned} r_K &= (\bar{x} - \bar{x}_K) \cos \beta + (\bar{y} - \bar{y}_K) \sin \beta \\ &= (\bar{x} - \bar{x}_J) \cos \beta + (\bar{y} - \bar{y}_J) \sin \beta \\ &\quad + (\bar{x}_J - \bar{x}_K) \cos \beta + (\bar{y}_J - \bar{y}_K) \sin \beta \\ &= r_J + (\bar{x}_J - \bar{x}_K) \cos \beta + (\bar{y}_J - \bar{y}_K) \sin \beta \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{d\bar{y}}{ds}, \quad \sin \beta = -\frac{d\bar{x}}{ds} \quad \text{であるから}$$

$$r_K = r_J + (\bar{x}_J - \bar{x}_K) \frac{d\bar{y}}{ds} - (\bar{y}_J - \bar{y}_K) \frac{d\bar{x}}{ds} \dots\dots\dots(43)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r_K ds &= \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r_J ds - (\bar{x}_K - \bar{x}_J) \int_0^s \frac{1}{\rho^2} d\bar{y} \\ &\quad + (\bar{y}_K - \bar{y}_J) \int_0^s \frac{1}{\rho^2} d\bar{x} \end{aligned}$$

ここで、

$$\int_0^s \frac{1}{\rho^2} d\bar{x} = -\frac{1}{R_J} \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r_J ds - \frac{\bar{x}_J}{R_J} \int_0^s \frac{1}{\rho^2} d\bar{y} + \frac{1}{R_J} \left(\frac{\bar{x}}{\rho} - \frac{\bar{x}_a}{R_a} \right)$$

$$\int_0^s \frac{1}{\rho^2} d\bar{y} = \frac{1}{\rho R_a} (\bar{y} - \bar{y}_a)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r_K ds &= \frac{R_K}{R_J} \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r_J ds \\ &\quad - \frac{1}{\rho R_a} \left(\bar{x}_K - \frac{R_K}{R_J} \bar{x}_J \right) (\bar{y} - \bar{y}_a) \\ &\quad + \frac{1}{\rho R_J} (\bar{y}_K - \bar{y}_J) \left(\bar{x} - \frac{\rho}{R_a} \bar{x}_a \right) \end{aligned} \dots\dots\dots(44)$$

ここに、 (\bar{x}_a, \bar{y}_a) は $(D-\bar{x}, \bar{y})$ 座標系で表わした A 点($s=0$)の座標である。

いま式(44)の線積分を閉じた断面の場合にその全周に施せば、つぎの関係式が得られる。

$$\frac{1}{R_K} \oint \frac{1}{\rho^2} r_K ds = \frac{1}{R_J} \oint \frac{1}{\rho^2} r_J ds \dots\dots\dots(45)$$

これより、式(36)の右辺の量はすべてねじりの中心には無関係であることがわかる。したがって、式(31)および(33)で定義された \tilde{q}_k および \tilde{q}_k^0 はねじりの中心には関係のない断面固有の量である。その意味で \tilde{q}_k および \tilde{q}_k^0 にはねじりの中心を表わす suffix を付してない。

さて、まず ω_{1K} と ω_{1J} との関係を求める。 ω_{1K} は

$$\omega_{1K} = R_K \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r_K ds - R_K^2 \rho \tilde{q}_k \int_0^s \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds$$

であるから、これに式(44)の関係を代入すると

$$\begin{aligned} \omega_{1K} &= \frac{R_K^2}{R_J^2} \left(R_J \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r_J ds - R_J^2 \rho \tilde{q}_k \int_0^s \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \right) \\ &\quad - \frac{R_K}{R_a} \left(\bar{x}_K - \frac{R_K}{R_J} \bar{x}_J \right) (\bar{y} - \bar{y}_a) \\ &\quad + \frac{R_K}{R_J} (\bar{y}_K - \bar{y}_J) \left(\bar{x} - \frac{\rho}{R_a} \bar{x}_a \right) \end{aligned}$$

したがって、つぎの関係式を得る。

$$\begin{aligned} \omega_{1K} &= \frac{R_K^2}{R_J^2} \omega_{1J} - \frac{R_K}{R_a} \left(\bar{x}_K - \frac{R_K}{R_J} \bar{x}_J \right) (\bar{y} - \bar{y}_a) \\ &\quad + \frac{R_K}{R_J} (\bar{y}_K - \bar{y}_J) \left(\bar{x} - \frac{\rho}{R_a} \bar{x}_a \right) \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

つぎに、 $B_{\omega_{1K}}$ と $B_{\omega_{1J}}$ の関係は

$$\begin{aligned} B_{\omega_{1K}} &= R_K \int_F \frac{1}{\rho} \omega_{1K} dF \\ &= \frac{R_K^3}{R_J^3} \left(R_J \int_F \frac{1}{\rho} \omega_{1J} dF \right) \\ &\quad - \frac{R_K^2}{R_a} \left(\bar{x}_K - \frac{R_K}{R_J} \bar{x}_J \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\int_F \frac{1}{\rho} \bar{y} dF}{\int_F \frac{1}{\rho} dF} - \bar{y}_a \right] \int_F \frac{1}{\rho} dF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{R_K^2}{R_J} (\bar{y}_K - \bar{y}_J) \\
 & \times \left[\int_F \frac{1}{\rho} \bar{x} dF - \frac{\bar{x}_a}{R_a} \cdot \frac{F}{\int_F \frac{1}{\rho} dF} \right] \int_F \frac{1}{\rho} dF
 \end{aligned}$$

ここで、(3)_a、(6)_{a,b}、(7)の諸式を考慮すると結局つぎの関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 B_{\omega_1 K} &= \frac{R_K^3}{R_J^3} B_{\omega_1 J} \\
 & - \frac{R_K^2}{R_0 R_a} F (\bar{x}_K - \frac{R_K}{R_J} \bar{x}_J) (\bar{y}_0 - \bar{y}_a) \\
 & + \frac{R_K^2}{R_0 R_J} F (\bar{y}_K - \bar{y}_J) (\bar{x}_0 - \frac{R_0}{R_a} \bar{x}_a) \\
 & \dots\dots\dots(47)
 \end{aligned}$$

最後に、 ω_K と ω_J の関係は、式(46)および式(47)を用いて、

$$\begin{aligned}
 \omega_K &= \omega_{1K} - \frac{\rho}{R_K} \cdot \frac{B_{\omega_1 K}}{F} \\
 &= \frac{R_K^2}{R_J^2} \left(\omega_{1J} - \frac{\rho}{R_J} \cdot \frac{B_{\omega_1 J}}{F} \right) \\
 & - \frac{R_K \rho}{R_a} \left(\bar{x}_K - \frac{R_K}{R_J} \bar{x}_J \right) \left(\frac{\bar{y} - \bar{y}_a}{\rho} - \frac{\bar{y}_0 - \bar{y}_a}{R_0} \right) \\
 & + \frac{R_K \rho}{R_J} (\bar{y}_K - \bar{y}_J) \left(\frac{\bar{x}}{\rho} - \frac{\bar{x}_0}{R_0} \right)
 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 \omega_K &= \frac{R_K^2}{R_J^2} \omega_J - \frac{R_K}{R_0} \left(\bar{x}_K - \frac{R_K}{R_J} \bar{x}_J \right) (\bar{y} - \bar{y}_0) \\
 & + \frac{R_K}{R_J} (\bar{y}_K - \bar{y}_J) \left(\bar{x} - \frac{\rho}{R_0} \bar{x}_0 \right) \dots\dots\dots(48)
 \end{aligned}$$

定点Dをねじりの中心としたときの St. Venant のねじり定数 (以下D点に関するねじれ定数と呼ぶ) は、薄肉断面に対してつぎのように定義することができる；開いた断面の場合〔式(153)参照〕：

$$J_{TD} = \frac{1}{3} R_D^3 \int_S \frac{1}{\rho^3} t^3 ds \dots\dots\dots(49)_a$$

閉じた断面の場合：

$$J_{TD} = \int_F \frac{\rho}{R_D} \left[\frac{R_D}{\rho} \bar{r} - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \right]^2 dF \dots\dots\dots(49)_b$$

あるいは

$$J_{TD} = R_D^2 \sum_k \left[\bar{q}_k \oint_k \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds \right] \dots\dots\dots(49)_c$$

特に一室閉断面に対しては式(38)を用いて

$$J_{TD} = R_D \left[\oint \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds \right]^2 \dots\dots\dots(49)_d$$

式(49)_aにおいて、 \int_S はsの全長にわたる線積分を表わす。開いた断面と閉じた断面の結合した断面では、ねじれ定数は両者の和で表わされるが、前者の値は後者の値にくらべて非常に小さく、実用上はまったく無視することができる。

中立点Oおよびせん断中心Sに関するねじれ定数は、それぞれつぎのような記号で表わす。

中立点に関するねじれ定数；

開いた断面：

$$J_T = \frac{1}{3} R_0^3 \int_s \frac{1}{\rho^3} t ds \dots\dots\dots(50)_a$$

閉じた断面：

$$J_T = \int_F \frac{\rho}{R_0} \left[\frac{R_0}{\rho} r - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) \right]^2 dF \dots\dots\dots(50)_b$$

あるいは

$$J_T = R_0^2 \sum_k \left[\bar{q}_k \oint_k \frac{1}{\rho^2} r ds \right] \dots\dots\dots(50)_c$$

一室閉断面：

$$J_T = R_0 \left[\oint \frac{1}{\rho^2} r ds \right]^2 \dots\dots\dots(50)_d$$

せん断中心に関するねじれ定数；

開いた断面：

$$J_{T^*} = \frac{1}{3} R_s^3 \int_s \frac{1}{\rho^3} t^3 ds \dots\dots\dots(51)_a$$

閉じた断面：

$$J_{T^*} = \int_F \frac{\rho}{R_s} \left[\frac{R_s}{\rho} r^* - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\omega^*}{\rho} \right) \right]^2 dF \dots\dots\dots(51)_b$$

あるいは

$$J_{T^*} = R_s^2 \sum_k \left[\bar{q}_k \oint_k \frac{1}{\rho^2} r^* ds \right] \dots\dots\dots(51)_c$$

一室閉断面⁶⁾：

$$J_{T^*} = R_s \left[\oint \frac{1}{\rho^2} r^* ds \right]^2 \dots\dots\dots(51)_d$$

ただし、St. Venantのねじれにおいては、中立点およびせん断中心はなんら特別な意味をもたない。

なお、J点に関するねじれ定数とK点に関するねじれ定数との間の関係としては次式が得られる。

$$J_{TK} = \frac{R_K^3}{R_J^3} J_{TJ} \dots\dots\dots(52)$$

5. 曲げねじれに関する断面定数とせん断中心

曲線材を構成する各母線のねじれ率はその長さ方向に一定でないねじれ、すなわち曲げねじれを考える。曲げねじれを受けると、ねじれによる断面のそりは軸方向に変化することになる。すなわち、St. Venantのねじれの場合と違って、ねじれ率はもはや一定でないから、軸方向の垂直ひずみならびにそれに見あう二次的なせん断ひずみが生ずる。

この曲げねじれによる垂直ひずみの計算にあたっては上記の二次的なせん断ひずみの影響は無視し、St. Venantのねじれによるそりだけが拘束されると考えるのが普通である。ただし、この二次的なせん断応力が形成するねじれモーメントはかなり大きくなることがあり(特

に開いた断面の場合), 一般には無視することはできない(6.の断面力の項参照)。

いま断面上に任意に選んだ定点 D をねじりの中心と考えると, はりに生ずる軸方向の垂直ひずみは式(18)_bから

$$\epsilon_\theta = \frac{R_D}{\rho} (\epsilon_{\bar{z}} - \bar{y} \kappa_{\bar{x}} - x \kappa_{\bar{y}}) + \frac{1}{\rho} \frac{dW_{\bar{z}}}{d\theta} \dots\dots(53)$$

D 点をねじり中心とした曲げねじれだけを受ける場合には, ねじり中心軸の伸びおよび曲率の変化はないから

$$\epsilon_{\bar{z}} = \kappa_{\bar{x}} = \kappa_{\bar{y}} = 0$$

したがって,

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{dW_{\bar{z}}}{d\theta}$$

式(16)を用いると,

$$\epsilon_\theta = -\frac{\bar{\omega}}{\rho} \frac{d\psi_{\bar{z}}}{d\theta} = -\frac{R_D}{\rho} \bar{\omega} \vartheta_{\bar{z}} \dots\dots(54)$$

前述のように, ϵ_θ にもなうせん断ひずみによる断面のそりを無視することになると, 式(54)における $\bar{\omega}$ としては, 前節で求めた St. Venant のねじりによるそり関数をそのまま用いることができる。

さて, 以上のことがらをもとにして, 曲率一定な曲線材の断面定数のうちで, 曲げねじれに関係する断面定数を, 断面上に任意に選んだ定点 D をねじりの中心としたとき, つぎのように定義する。

そり体積

$$B_{\bar{\omega}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{\omega} dF$$

x 軸のまわりのそりモーメント

$$C_{\bar{x}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{\omega} y dF$$

y 軸のまわりのそりモーメント

$$C_{\bar{y}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{\omega} x dF$$

曲げねじれ定数

$$C_{\bar{\omega}} = R_D \int_F \frac{1}{\rho} \bar{\omega}^2 dF$$

.....(55)_{a-d}

曲げねじれによって生ずる垂直応力はそれ自身でつり合っているから, 式(54)を用いて

$$\int_F \epsilon_\theta dF = -R_D \vartheta_{\bar{z}} \int_F \frac{1}{\rho} \bar{\omega} dF = 0$$

したがって, 常に次式が成り立つ

$$B_{\bar{\omega}} = 0 \dots\dots(56)$$

この条件は式(26)と同一である。

なお, 式(55)のように定義したそりモーメント $C_{\bar{x}}$ および $C_{\bar{y}}$ は, 式(56)を考慮すればわかるように, x 軸, y 軸の平行移動に対しては無関係であるという性質をもっている。ここでは, 一応断面の中立点 O を原点とする座標系 $(O-x, y)$ を用いることにした。

断面上の特定点, すなわち中立点ならびにせん断中心をねじりの中心としたときの式(55)に対応する断面定

数は, 特につぎのような記号で表わす。

中立点 O に関する断面定数:

$$\left. \begin{aligned} B_{\omega} &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} \omega dF, & C_x &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} \omega y dF \\ C_y &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} \omega x dF, & C_{\omega} &= R_0 \int_F \frac{1}{\rho} \omega^2 dF \end{aligned} \right\} \dots\dots(57)_{a-d}$$

せん断中心 S に関する断面定数:

$$\left. \begin{aligned} B_{\omega^*} &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega^* dF, & C_x^* &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega^* y dF \\ C_y^* &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega^* x dF, & C_{\omega^*} &= R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega^{*2} dF \end{aligned} \right\} \dots\dots(58)_{a-d}$$

ただし, 式(56)と同様に,

$$\left. \begin{aligned} B_{\omega} &= 0 \\ B_{\omega^*} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(59)_{a,b}$$

つぎに, 断面上に任意に選んだ二つの定点 J と K について, J 点をねじりの中心と考えたときの断面定数と K 点をねじりの中心と考えたときの断面定数との間の関係を求める。

そり関数 ω_J と ω_K との関係はすでに式(48)で与えられている。この式において用いられている座標系 $(D-x, \bar{y})$ のかわりに, 断面の中立点 O を原点とする座標系 $(O-x, y)$ を用いると, つぎのようになる。

$$\omega_K = \frac{R_K^2}{R_J^2} \omega_J - \frac{R_K}{R_0} y \left(x_K - \frac{R_K}{R_J} x_J \right) + \frac{R_K}{R_J} x (y_K - y_J) \dots\dots(60)$$

ここに, (x_J, y_J) および (x_K, y_K) はそれぞれ座標系 $(O-x, y)$ における J 点および K 点の座標である。なお, $\bar{\omega}$ と ω^* との関係および ω と ω^* との関係はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \omega^* &= \frac{R_s^2}{R_D^2} \bar{\omega} - \frac{R_s}{R_0} y \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) \\ &\quad + \frac{R_s}{R_D} x (y_s - y_D) \\ \omega &= \frac{R_s^2}{R_0^2} \omega^* - \frac{R_s}{R_0} x_s y + \frac{R_s}{R_0} y_s x \end{aligned} \right\} \dots\dots(61)_{a,b}$$

ここに, (x_D, y_D) および (x_s, y_s) はそれぞれ座標系 $(D-x, y)$ における D 点および S 点の座標である。

さて, 式(60)の関係を用いて, J 点をねじりの中心としたときの断面定数と K 点をねじりの中心としたときの断面定数との関係を求めるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_{xK} &= \frac{R_K^3}{R_J^3} C_{xJ} - \frac{R_K^2}{R_0^2} \left(x_K - \frac{R_K}{R_J} x_J \right) J_x \\ &\quad + \frac{R_K^2}{R_0 R_J} (y_K - y_J) J_{xy} \\ C_{yK} &= \frac{R_K^3}{R_J^3} C_{yJ} + \frac{R_K^2}{R_0 R_J} (y_K - y_J) J_y \\ &\quad - \frac{R_K^2}{R_0^2} \left(x_K - \frac{R_K}{R_J} x_J \right) J_{xy} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\omega K} = & \frac{R_K^5}{R_J^5} C_{\omega J} - 2 \frac{R_K^4}{R_0 R_J^3} \left(x_K - \frac{R_K}{R_J} x_J \right) C_{xJ} \\
 & + 2 \frac{R_K^4}{R_J^4} (y_K - y_J) C_{yJ} \\
 & + \frac{R_K^3}{R_0^3} \left(x_K - \frac{R_K}{R_J} x_J \right)^2 J_x \\
 & + \frac{R_K^3}{R_0 R_J^2} (y_K - y_J)^2 J_y \\
 & - 2 \frac{R_K^3}{R_0^2 R_J} \left(x_K - \frac{R_K}{R_J} x_J \right) (y_K - y_J) J_{xy}
 \end{aligned} \tag{62}_{a-c}$$

上式中の J_x, J_y および J_{xy} はすでに式 (2) で定義されている中立点に関する断面二次モーメントである。

曲げねじれにおいて特別な意味をもつせん断中心 S の位置は、

$$C_x^* = 0, \quad C_y^* = 0 \tag{63}$$

によって定めることができる。いま、せん断中心に関する断面定数 $C_x^*, C_y^*, C_{\omega}^*$ を任意な定点 D に関する断面定数 C_x, C_y, C_{ω} で表わすと、式 (62) と同様に、

$$\begin{aligned}
 C_x^* = & \frac{R_s^3}{R_D^3} C_x - \frac{R_s^2}{R_0^2} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) J_x \\
 & + \frac{R_s^2}{R_0 R_D} (y_s - y_D) J_{xy} \\
 C_y^* = & \frac{R_s^3}{R_D^3} C_y + \frac{R_s^2}{R_0 R_D} (y_s - y_D) J_y \\
 & - \frac{R_s^2}{R_0^2} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) J_{xy} \\
 C_{\omega}^* = & \frac{R_s^5}{R_D^5} C_{\omega} - 2 \frac{R_s^4}{R_0 R_D^3} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) C_x \\
 & + 2 \frac{R_s^4}{R_D^4} (y_s - y_D) C_y \\
 & + \frac{R_s^3}{R_0^3} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right)^2 J_x \\
 & + \frac{R_s^3}{R_0 R_D^2} (y_s - y_D)^2 J_y \\
 & - 2 \frac{R_s^3}{R_0^2 R_D} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) (y_s - y_D) J_{xy}
 \end{aligned} \tag{64}_{a-c}$$

したがって、せん断中心 S の座標はつぎのように求まる。

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_s = x_s - x_D = & \frac{R_0^2}{R_D^2} \\
 & \frac{C_x \left(J_y - \frac{x_D}{R_0} J_{xy} \right) - C_y \left(J_x - \frac{x_D}{R_0} J_x \right)}{J_x \left(J_y - \frac{R_0}{R_D^2} C_y \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{R_0}{R_D^2} C_x \right)} \\
 \bar{y}_s = y_s - y_D = & - \frac{R_0}{R_D} \\
 & \frac{C_y J_x - C_x J_{xy}}{J_x \left(J_y - \frac{R_0}{R_D^2} C_y \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{R_0}{R_D^2} C_x \right)} \\
 R_s = R_D = & \frac{J_x J_y - J_{xy}^2}{J_x \left(J_y - \frac{R_0}{R_D^2} C_y \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{R_0}{R_D^2} C_x \right)}
 \end{aligned} \tag{65}_{a-c}$$

また、式 (63) は断面上のすべての点に関する曲げねじれ定数のうちでせん断中心に関する曲げねじれ定数が最小であるという条件にはかならない。すなわち、式 (64)_c より

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_{\omega}^*}{\partial x_s} = & -2 \frac{R_s}{R_0} \left[\frac{R_s^3}{R_D^3} C_x - \frac{R_s^2}{R_0^2} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) J_x \right. \\
 & \left. + \frac{R_s^2}{R_0 R_D} (y_s - y_D) J_{xy} \right] \\
 = & -2 \frac{R_s}{R_0} C_x^* = 0 \\
 \frac{\partial C_{\omega}^*}{\partial y_s} = & -2 \frac{R_s}{R_D} \left[\frac{R_s^3}{R_D^3} C_y + \frac{R_s^2}{R_0 R_D} (y_s - y_D) J_y \right. \\
 & \left. - \frac{R_s^2}{R_0^2} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) J_{xy} \right] \\
 = & -2 \frac{R_s}{R_D} C_y^* = 0
 \end{aligned} \tag{66}$$

なお、式 (64)_c は式 (66) の関係を用いて書きなおすとつぎようになる。

$$\begin{aligned}
 C_{\omega}^* = & \frac{R_s^3}{R_D^3} \left[\frac{R_s^2}{R_D^2} C_{\omega} - \frac{R_s}{R_0} \left(x_s - \frac{R_s}{R_D} x_D \right) C_x \right. \\
 & \left. + \frac{R_s}{R_D} (y_s - y_D) C_y \right] \tag{67}
 \end{aligned}$$

式 (64) とは逆に、せん断中心に関する量で断面上の他の任意点、たとえば D 点に関する断面定数を表わすと、

$$\begin{aligned}
 C_x = & - \frac{R_D^2}{R_0^2} \left(x_D - \frac{R_D}{R_s} x_s \right) J_x \\
 & + \frac{R_D^2}{R_0 R_s} (y_D - y_s) J_{xy} \\
 C_y = & \frac{R_D^2}{R_0 R_s} (y_D - y_s) J_y - \frac{R_D^2}{R_0^2} \left(x_D - \frac{R_D}{R_s} x_s \right) J_{xy} \\
 C_{\omega} = & \frac{R_D^5}{R_s^5} C_{\omega}^* + \frac{R_D^3}{R_0^3} \left(x_D - \frac{R_D}{R_s} x_s \right)^2 J_x \\
 & + \frac{R_D^3}{R_0 R_s^2} (y_D - y_s)^2 J_y \\
 & - 2 \frac{R_D^3}{R_0^2 R_s} \left(x_D - \frac{R_D}{R_s} x_s \right) (y_D - y_s) J_{xy}
 \end{aligned} \tag{68}_{a-c}$$

なお、せん断中心 S の座標および曲げねじれ定数を中立点 O に関する量で表わすと、比較的簡単な形となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 x_s = & \frac{C_x J_y - C_y J_{xy}}{J_x \left(J_y - \frac{C_y}{R_0} \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{C_x}{R_0} \right)} \\
 y_s = & - \frac{C_y J_x - C_x J_{xy}}{J_x \left(J_y - \frac{C_y}{R_0} \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{C_x}{R_0} \right)} \\
 R_s = R_0 = & \frac{J_x J_y - J_{xy}^2}{J_x \left(J_y - \frac{C_y}{R_0} \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{C_x}{R_0} \right)} \\
 C_{\omega}^* = & \frac{R_s^4}{R_0^4} \left(\frac{R_s}{R_0} C_{\omega} - C_x x_s + C_y y_s \right)
 \end{aligned} \tag{69}$$

6.において明らかにされるように、式(63)はせん断中心をねじりの中心としたときは、曲げねじれによって生ずる垂直応力は曲げモーメントを形成しないということを表わしている。これがせん断中心の特性であり、このことはせん断中心に関する曲げねじれと曲げとは互いに直交関係にあり、ひずみエネルギーの表現式でいえば、せん断中心軸の曲率の変力と曲げねじれ率との連成項は消えることを意味している。曲げと曲げねじれとの関係において、せん断中心のもつこのような特性は、引張り(あるいは圧縮)と曲げとの関係において、中立点のもつ特性と相似である(直交性)。なお、当然のことであるが、曲げにともなうせん断応力の合力は、せん断中心を通る⁹⁾[式(135)、(146)を参照]。

6. 変形に関する幾何学量と断面力

曲線材が任意の微小変形を行なったときの断面上に任意に選んだ定点Dを通る軸線の伸び率(垂直ひずみ) ϵ_z , \bar{y} - \bar{z} 面内における接線回転角 $\phi_{\bar{x}}$ および曲率の変化 $\kappa_{\bar{x}}$, \bar{x} - \bar{z} 面内における接線回転角 $\phi_{\bar{y}}$ および曲率 $\kappa_{\bar{y}}$, ねじれ率 ψ_z , 曲げねじれ率 ϑ_z は、定点Dの変形($\bar{a}, \bar{v}, \bar{w}, \varphi$)で表わすとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{R_D} \left(\frac{d\bar{w}}{d\theta} - \bar{v} \right), & \phi_{\bar{x}} &= \frac{1}{R_D} \left(\frac{d\bar{v}}{d\theta} + \bar{w} \right) \\ \phi_{\bar{y}} &= \frac{1}{R_D} \cdot \frac{d\bar{a}}{d\theta}, & \kappa_{\bar{x}} &= \frac{1}{R_D^2} \left(\frac{d^2\bar{v}}{d\theta^2} + \frac{d\bar{w}}{d\theta} \right) \\ \kappa_{\bar{y}} &= \frac{1}{R_D^2} \left(\frac{d^2\bar{a}}{d\theta^2} + R_D\varphi \right) \\ \psi_z &= \frac{1}{R_D} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{1}{R_D} \frac{d\bar{a}}{d\theta} \right) \\ \vartheta_z &= \frac{1}{R_D} \frac{d\psi_z}{d\theta} = \frac{1}{R_D^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{1}{R_D} \frac{d^2\bar{a}}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(70)_{a-g}$$

これらの量をD点を通る軸線の変形に関する幾何学量と呼ぶことにする。

断面の中立軸およびせん断中心軸の式(70)に対応する変形に関する幾何学量をそれぞれ $\epsilon_z, \phi_x, \phi_y, \kappa_x, \kappa_y, \psi_z, \vartheta_z$ および $\epsilon_z^*, \phi_x^*, \phi_y^*, \kappa_x^*, \kappa_y^*, \psi_z^*, \vartheta_z^*$ と書くことにすると、これらの量はつぎのように表わされる。

中立軸の変形に関する幾何学量：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{dw}{d\theta} - v \right), & \phi_x &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{dv}{d\theta} + w \right) \\ \phi_y &= \frac{1}{R_0} \frac{du}{d\theta}, & \kappa_x &= \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} \right) \\ \kappa_y &= \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + R_0\varphi \right) \\ \psi_z &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{1}{R_0} \frac{du}{d\theta} \right) \\ \vartheta_z &= \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_z}{d\theta} = \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{1}{R_0} \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(71)_{a-g}$$

せん断中心軸の変形に関する幾何学量：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z^* &= \frac{1}{R_s} \left(\frac{dw^*}{d\theta} - v^* \right), & \phi_x^* &= \frac{1}{R_s} \left(\frac{dv^*}{d\theta} + w^* \right) \\ \phi_x^* &= \frac{1}{R_s} \frac{du^*}{d\theta}, & \kappa_x^* &= \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2v^*}{d\theta^2} + \frac{dw^*}{d\theta} \right) \\ \kappa_y^* &= \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2u^*}{d\theta^2} + R_s\varphi \right) \\ \psi_z^* &= \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{1}{R_s} \frac{du^*}{d\theta} \right) \\ \vartheta_z^* &= \frac{1}{R_s} \frac{d\psi_z^*}{d\theta} = \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{1}{R_s} \frac{d^2u^*}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(72)_{a-g}$$

(71), (72) の両式において、 u, v, w および u^*, v^*, w^* はそれぞれO点およびS点の x, y, z 軸方向への変位である。

さて、曲線材が任意な外力を受けて変形したとき、断面上の任意点Pに生ずる軸方向の垂直ひずみ ϵ_θ は、式(70)で示されるような定点Dを通る軸線の変形に関する幾何学量で表わすと、式(18)_b[あるいは式(53)]と式(16)とから、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{R_D}{\rho} (\epsilon_z - \bar{y} \kappa_{\bar{x}} - \bar{x} \kappa_{\bar{y}} - \bar{w} \vartheta_z) \\ \text{あるいは} \\ \epsilon_\theta &= \frac{R_D}{\rho} [\epsilon_z - (y - y_D) \kappa_{\bar{x}} - (x - x_D) \kappa_{\bar{y}} - \bar{w} \vartheta_z] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(73)$$

また、中立軸およびせん断中心軸の変形に関する幾何学量で表わすと、式(73)と同様に、

$$\epsilon_\theta = \frac{R_0}{\rho} (\epsilon_z - y \kappa_x - x \kappa_y - \omega \vartheta_z) \dots\dots\dots(74)$$

および

$$\epsilon_\theta = \frac{R_s}{\rho} [\epsilon_z^* - (y - y_s) \kappa_x^* - (x - x_s) \kappa_y^* - \omega^* \vartheta_z^*] \dots\dots\dots(75)$$

つきに、断面上に任意に選んだ二つの定点JとKについて、J点を通る軸線の変形に関する幾何学量とK点を通る軸線の変形に関する幾何学量との関係を求める。J点およびK点は材のいかなる変形に際しても、常に純粋曲げの平面上にあるとすると、まずJ点あるいはK点に関する量と中立点O点に関する量との関係を知らなければならない。

J点に関する量とO点に関する量との間の関係は、両点の変位の関係

$$\left. \begin{aligned} u &= u_J + y_J \varphi \\ v &= v_J - x_J \varphi \\ w &= w_J + y_J \phi_x + x_J \phi_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(76)_{a-c}$$

を用いて、つぎのように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{R_J}{R_0} (\epsilon_{zJ} + y_J \kappa_{xJ} + x_J \kappa_{yJ}) \\ \phi_x &= \phi_{xJ} - \frac{R_J}{R_0} x_J \psi_{zJ}, & \phi_y &= \phi_{yJ} + \frac{R_J}{R_0} y_J \psi_{zJ} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= \frac{R_J}{R_0} \kappa_{xJ} - \frac{R_J^2}{R_0^2} x_J \vartheta_{\omega J} \\ \kappa_y &= \frac{R_J}{R_0} \kappa_{yJ} + \frac{R_J^2}{R_0^2} y_J \vartheta_{\omega J} \\ \psi_z &= \frac{R_J^2}{R_0^2} \psi_{zJ}, \quad \vartheta_{\omega} = \frac{R_J^3}{R_0^3} \vartheta_{\omega J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(77)_{a-g}$$

式 (77) を用いると、 J 点の変位と K 点の変位との関係が求まる。

$$\left. \begin{aligned} u_K &= u_J - (y_K - y_J) \varphi \\ v_K &= v_J + (x_K - x_J) \varphi \\ w_K &= w_J - (y_K - y_J) \phi_x - (x_K - x_J) \phi_y \\ &= w_J - (y_K - y_J) \phi_{xJ} - (x_K - x_J) \phi_{yJ} \\ &\quad - \frac{R_J}{R_0} (x_K y_J - x_J y_K) \psi_{zJ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(78)_{a-c}$$

したがって、この関係を用いると、 J 点に関する量と K 点に関する量との関係がつぎのように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{zK} &= \frac{R_J}{R_K} [\varepsilon_{zJ} - (y_K - y_J) \kappa_{xJ} - (x_K - x_J) \kappa_{yJ}] \\ &\quad - \frac{R_J^2}{R_0 R_K} (x_K y_J - x_J y_K) \vartheta_{\omega J} \\ \phi_{xK} &= \phi_{xJ} + \frac{R_J}{R_0} \left(\frac{R_J}{R_K} x_K - x_J \right) \psi_{zJ} \\ \phi_{yK} &= \phi_{yJ} - \frac{R_J}{R_K} (y_K - y_J) \psi_{zJ} \\ \kappa_{xK} &= \frac{R_J}{R_K} \kappa_{xJ} + \frac{R_J^2}{R_0 R_K} \left(\frac{R_J}{R_K} x_K - x_J \right) \vartheta_{\omega J} \\ \kappa_{yK} &= \frac{R_J}{R_K} \kappa_{yJ} - \frac{R_J^2}{R_K^2} (y_K - y_J) \vartheta_{\omega J} \\ \psi_{zK} &= \frac{R_J^2}{R_K^2} \psi_{zJ}, \quad \vartheta_{\omega K} = \frac{R_J^3}{R_K^3} \vartheta_{\omega J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(79)_{a-g}$$

特に、せん断中心 S に関する量と中立点に関する量との関係式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{R_S}{R_0} (\varepsilon_z^* + y_S \kappa_x^* + x_S \kappa_y^*) \\ \phi_x &= \phi_x^* - \frac{R_S}{R_0} x_S \psi_z^*, \quad \phi_y = \phi_y^* + \frac{R_S}{R_0} y_S \psi_z^* \\ \kappa_x &= \frac{R_S}{R_0} \kappa_x^* - \frac{R_S^2}{R_0^2} x_S \vartheta_{\omega}^* \\ \kappa_y &= \frac{R_S}{R_0} \kappa_y^* + \frac{R_S^2}{R_0^2} y_S \vartheta_{\omega}^* \\ \psi_z &= \frac{R_S^2}{R_0^2} \psi_z^*, \quad \vartheta_{\omega} = \frac{R_S^3}{R_0^3} \vartheta_{\omega}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(80)_{a-g}$$

さて、式 (73) は ε_z と $\varepsilon_{\bar{z}}$ との関係

$$\varepsilon_z = \frac{R_D}{R_0} (\varepsilon_{\bar{z}} + y_D \kappa_{\bar{x}} + x_D \kappa_{\bar{y}})$$

を用いて書きかえると

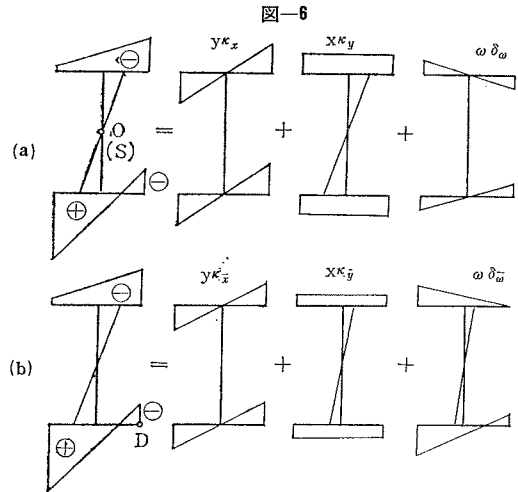
$$\varepsilon_{\theta} = \frac{R_0}{\rho} \varepsilon_z - \frac{R_D}{\rho} (y \kappa_{\bar{x}} + x \kappa_{\bar{y}} + \bar{\omega} \vartheta_{\omega}) \dots\dots(81)$$

また、式 (75) も式 (80)_a を用いて

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{R_0}{\rho} \varepsilon_z - \frac{R_S}{\rho} (y \kappa_x^* + x \kappa_y^* + \omega^* \vartheta_{\omega}^*) \dots(82)$$

と表わすことができる。

ここで、ちなみにつぎのことがらに注目しよう。式 (74)、(81) および (82) は同一の変形状態について、断面上の任意点に生ずる垂直ひずみを表わしていると考えることができる。たとえば式 (81) は定点 D を通る軸線の変形、換言すれば D 点の変位と D 点を中心としたねじれによってはりの変形を代表させている。しかも3式とも右辺の第一項は軸方向力による垂直ひずみを表わし、残りの項が曲げおよび曲げねじれによる垂直ひずみを表わしている。したがって、曲げと曲げねじれとは互いに不可分な関係にあり、その境界線ははりの変形を断面上のどの点の変形で代表させるかにかかっている。図-6 はこのような曲げと曲げねじれによる垂直ひずみの分布の関係の一例を示している。(a) ははりの変形を $O \equiv S$ の変形で代表させた場合であり、(b) は任意な定点 D の変形で代表させた場合である。



断面上の二つの定点 J と K について、はりの変形を J 点の変位と J 点を中心としたねじれによって表わした場合と、 K 点の変位と K 点を中心としたねじれによって表わした場合とで両者はまったく同じ結果を与えることは容易に証明することができる。前者の場合の断面上の任意点 P における垂直ひずみを $\varepsilon_{\theta}(J)$ 、後者の場合のそれを $\varepsilon_{\theta}(K)$ とすると、式 (73) と同様に $\varepsilon_{\theta}(J)$ および $\varepsilon_{\theta}(K)$ はそれぞれ

$$\varepsilon_{\theta}(J) = \frac{R_J}{\rho} [\varepsilon_{zJ} - (y - y_J) \kappa_{xJ} - (x - x_J) \kappa_{yJ} - \omega_J \vartheta_{\omega J}] \dots\dots\dots(83)$$

および

$$\varepsilon_{\theta}(K) = \frac{R_K}{\rho} [\varepsilon_{zK} - (y - y_K) \kappa_{xK} - (x - x_K) \kappa_{yK} - \omega_K \vartheta_{\omega K}] \dots\dots\dots(84)$$

と表わすことができる。そこで、式 (84) に式 (79) お

よび式(77)の関係を代入すると,

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta(K) &= \frac{R_J}{\rho} [\epsilon_{zJ} - (y_K - y_J) \kappa_{xJ} - (x_K - x_J) \kappa_{yJ}] \\ &\quad - \frac{R_J^2}{\rho R_0} (x_K y_J - x_J y_K) \vartheta_{\omega J} - (y - y_K) \\ &\quad \times \left[\frac{R_J}{\rho} \kappa_{xJ} + \frac{R_J^2}{\rho R_0} \left(\frac{R_J}{R_K} x_K - x_J \right) \vartheta_{\omega J} \right] \\ &\quad - (x - x_K) \left[\frac{R_J}{\rho} \kappa_{yJ} - \frac{R_J^2}{\rho R_K} (y_K - y_J) \vartheta_{\omega J} \right] \\ &\quad - \left[\frac{R_K^3}{\rho R_J^2} \omega_J - \frac{R_K^2}{\rho R_0} y \left(x_K - \frac{R_K}{R_J} x_J \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_K^2}{\rho R_J} x (y_K - y_J) \right] \frac{R_J^3}{R_K^3} \vartheta_{\omega J} \\ &= \frac{R_J}{\rho} [\epsilon_{zJ} - (y - y_J) \kappa_{xJ} \\ &\quad - (x - x_J) \kappa_{yJ} - \omega_J \vartheta_{\omega J}] \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\epsilon_\theta(K) \equiv \epsilon_\theta(J)$$

を得る。

つぎに, 曲線材が任意な力を受ける場合, すなわち軸力, 曲げ, ねじれを同時に受ける場合の断面力と変形に関する幾何学量との関係を求める。

まず, 断面上に任意に選んだ定点Dに関する断面力を次式で定義する。

D点に作用する軸方向力

$$N_{\bar{z}} = \int_F \sigma_\theta dF$$

\bar{x} 軸まわりの曲げモーメント

$$M_{\bar{x}} = \int_F \sigma_\theta \bar{y} dF$$

\bar{y} 軸まわりの曲げモーメント

$$M_{\bar{y}} = \int_F \sigma_\theta \bar{x} dF$$

D点に関する曲げねじりモーメント

$$M_{\bar{\omega}} = \int_F \sigma_\theta \bar{\omega} dF$$

D点のまわりの合ねじりモーメント

$$T_{\bar{z}} = \int_F [\tau_{yz} \bar{x} - \tau_{zx} \bar{y}] dF$$

D点のまわりの St. Venant のねじりモーメント

$$T_{\bar{z}S} = \int_F [\tau_{yz}^S \bar{x} - \tau_{zx}^S \bar{y}] dF$$

D点のまわりの二次ねじりモーメント

$$T_{\bar{\omega}} = \int_F [\tau_{yz}^{\omega} \bar{x} - \tau_{zx}^{\omega} \bar{y}] dF$$

\bar{x} 軸方向のせん断力

$$Q_{\bar{x}} = \int_F \tau_{zx} dF$$

\bar{y} 軸方向のせん断力

$$Q_{\bar{y}} = \int_F \tau_{yz} dF$$

.....(85)_{a-i}

ここに, τ の右肩に付した記号 S および ω はそれぞれ St. Venant のねじれによるせん断応力および曲げねじれによるせん断応力であることを表わす。以下の τ_s^S , τ_s^ω についても同じである。

特に, 薄肉断面に対しては, $\tau_n \equiv 0$ であるから式(85) e-g はつぎのようにも書ける。

$$\left. \begin{aligned} T_{\bar{z}} &= \int_F \tau_s \bar{r} dF \\ T_{\bar{z}S} &= \int_F \tau_s^S \bar{r} dF \\ T_{\bar{\omega}} &= \int_F \tau_s^\omega \bar{r} dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(86)_{a-c}$$

ただし, 開いた断面の場合には, St. Venant のねじれによるせん断応力 τ_s^S は板厚方向に変化する(8.参照)ので, \bar{r} のかわりに $\bar{r} + n$ を用いなければならない。

また,

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}^S + \tau_{yz}^\omega, \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}^S + \tau_{zx}^\omega$$

あるいは

$$\tau_s = \tau_s^S + \tau_s^\omega$$

であるから,

$$T_{\bar{z}} = T_{\bar{z}S} + T_{\bar{\omega}} \dots\dots\dots(87)$$

なお, 式(85)_dで定義される曲げねじれモーメントは以下の解析に必ずしも必要なものではないが, このよう量を導入すると解析が系統的に行なえる利点がある。

式(85)_{a-d}に式(73)を代入し, 式(1)および式(55)を考慮すると, まず, つぎのような関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_{\bar{z}} &= E(F_D \epsilon_{\bar{z}} - Z_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} - Z_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}}) \\ M_{\bar{x}} &= E(Z_{\bar{x}} \epsilon_{\bar{z}} - J_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} - J_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} - C_{\bar{x}} \vartheta_{\bar{\omega}}) \\ M_{\bar{y}} &= E(Z_{\bar{y}} \epsilon_{\bar{z}} - J_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} - J_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} - C_{\bar{y}} \vartheta_{\bar{\omega}}) \\ M_{\bar{\omega}} &= -E(C_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} + C_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} + C_{\bar{\omega}} \vartheta_{\bar{\omega}}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(88)_{a-d}$$

ここに, E は材料のヤング係数である。

ねじれモーメントと変形に関する幾何学量との関係は, つぎのようにして求めるのがもっとも簡単である。まず曲線材の変形にともなうひずみエネルギー Π_1 は

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} \int_F (E \epsilon_\theta^2 + G r_s^2) \rho dF d\theta$$

ϵ_θ に対しては式(73), r_s に対しては閉じた断面の場合には式(21), 開いた断面の場合には式(153)_aを用い, 断面定数の定義式(1), (49), (55)を考慮して整理すると

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} [EF_D \epsilon_{\bar{z}}^2 + EJ_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}}^2 + EJ_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}}^2 + 2EJ_{\bar{x}\bar{y}} \kappa_{\bar{x}} \kappa_{\bar{y}} \\ &\quad - 2EZ_{\bar{x}} \epsilon_{\bar{z}} \kappa_{\bar{x}} - 2EZ_{\bar{y}} \epsilon_{\bar{z}} \kappa_{\bar{y}} + EC_{\bar{\omega}} \vartheta_{\bar{\omega}}^2 + 2EC_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} \vartheta_{\bar{\omega}} \\ &\quad + 2EC_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} \vartheta_{\bar{\omega}} + GJ_{TD} \psi_{\bar{z}}^2] R_D d\theta \dots\dots\dots(89) \end{aligned}$$

外力の得るポテンシャルエネルギー Π_2 は Normalized forces として $N_{\bar{z}}, M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}, T_{\bar{z}}$ を, Normalized coordinate として $\epsilon_{\bar{z}}, \kappa_{\bar{x}}, \kappa_{\bar{y}}, \psi_{\bar{z}}$ をとり

$$\Pi_2 = - \int_0^{\theta_0} [N_z \varepsilon_z - M_x \kappa_x - M_y \kappa_y + T_z \psi_z] R_D d\theta \quad \dots\dots\dots(90)$$

ここで、 $\psi_z = \frac{1}{R_D} \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta}$ を考慮し

$$\delta\Pi = \delta(\Pi_1 + \Pi_2) = 0$$

から4つの方程式が得られるが、そのうちの3つはすでに求めた式(88)_{a-c}に一致し、他の一つは

$$T_z = GJ_{TD} \psi_z - \frac{E}{R_D} \left(C_x \frac{d\kappa_x}{d\theta} + C_y \frac{d\kappa_y}{d\theta} + C_\omega \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) \quad \dots\dots\dots(91)$$

右辺の第一項は St. Venant のねじれモーメントを表わしているので

$$T_z = GJ_{TD} \psi_z \left. \begin{aligned} T_\omega &= - \frac{E}{R_D} \left(C_x \frac{d\kappa_x}{d\theta} + C_y \frac{d\kappa_y}{d\theta} + C_\omega \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(92)$$

せん断力 Q_x, Q_y は、曲線材に作用する外力が横荷重だけの場合には式(97)_{d,e}より

$$Q_x = \frac{1}{R_D} \left(\frac{dM_y}{d\theta} - T_z \right), \quad Q_y = \frac{1}{R_D} \frac{dM_x}{d\theta}$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{E}{R_D} \left(Z_y \frac{d\varepsilon_z}{d\theta} - J_{zy} \frac{d\kappa_x}{d\theta} - J_y \frac{d\kappa_y}{d\theta} - C_y \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) - \frac{1}{R_D} GJ_{TD} \psi_z + \frac{E}{R_D^2} \left(C_x \frac{d\kappa_x}{d\theta} + C_y \frac{d\kappa_y}{d\theta} + C_\omega \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) \\ Q_y &= \frac{E}{R_D} \left(Z_x \frac{d\varepsilon_z}{d\theta} - J_x \frac{d\kappa_x}{d\theta} - J_{xy} \frac{d\kappa_y}{d\theta} - C_x \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(93)_{a,b}$$

特に、中立点 O に関する断面力と中立軸の変形に関する幾何学量との関係は

$$\left. \begin{aligned} N_z &= EF \varepsilon_z \\ M_x &= -E(J_x \kappa_x + J_{xy} \kappa_y + C_x \vartheta_\omega) \\ M_y &= -E(J_{xy} \kappa_x + J_y \kappa_y + C_y \vartheta_\omega) \\ M_\omega &= -E(C_x \kappa_x + C_y \kappa_y + C_\omega \vartheta_\omega) \\ T_z &= GJ_T - \frac{E}{R_0} \left(C_x \frac{d\kappa_x}{d\theta} + C_y \frac{d\kappa_y}{d\theta} + C_\omega \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) \\ Q_x &= - \frac{E}{R_D} \left(J_{xy} \frac{d\kappa_x}{d\theta} + J_y \frac{d\kappa_y}{d\theta} + C_y \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) - \frac{1}{R_0} GJ_T \psi_z + \frac{E}{R_0^2} \left(C_x \frac{d\kappa_x}{d\theta} + C_y \frac{d\kappa_y}{d\theta} + C_\omega \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) \\ Q_y &= - \frac{E}{R_0} \left(J_x \frac{d\kappa_x}{d\theta} + J_{xy} \frac{d\kappa_y}{d\theta} + C_x \frac{d\vartheta_\omega}{d\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(94)_{a-g}$$

ただし、 Q_x, Q_y についての式は作用外力が横荷重だけの場合である。

また、せん断中心 S に関する断面力とせん断中心軸の変形に関する幾何学量との関係は

$$\left. \begin{aligned} N_z^* &= E(F_s \varepsilon_z^* - Z_x^* \kappa_x^* - Z_y^* \kappa_y^*) \\ M_x^* &= E(Z_x^* \varepsilon_z^* - J_x^* \kappa_x^* - J_{xy}^* \kappa_y^*) \\ M_y^* &= E(Z_y^* \varepsilon_z^* - J_{xy}^* \kappa_x^* - J_y^* \kappa_y^*) \\ M_\omega^* &= -EC_\omega^* \vartheta_\omega^* \\ T_z^* &= GJ_T^* \psi_z^* - \frac{EC_\omega^*}{R_s} \frac{d\vartheta_\omega^*}{d\theta} \\ Q_x^* &= \frac{E}{R_s} \left(Z_y^* \frac{d\varepsilon_z^*}{d\theta} - J_{xy}^* \frac{d\kappa_x^*}{d\theta} - J_y^* \frac{d\kappa_y^*}{d\theta} \right) - \frac{1}{R_s} GJ_T^* \psi_z^* + \frac{EC_\omega^*}{R_s^2} \frac{d\vartheta_\omega^*}{d\theta} \\ Q_y^* &= \frac{E}{R_s} \left(Z_x^* \frac{d\varepsilon_z^*}{d\theta} - J_x^* \frac{d\kappa_x^*}{d\theta} - J_{xy}^* \frac{d\kappa_y^*}{d\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(95)_{a-g}$$

Q_x^*, Q_y^* についての式は作用外力が横荷重だけの場合である。

なお、曲げモーメント M_x, M_y をせん断中心軸の変形で表わすと

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \frac{R_s}{R_0} E(J_x \kappa_x^* + J_{xy} \kappa_y^*) \\ M_y &= - \frac{R_s}{R_0} E(J_{xy} \kappa_x^* + J_y \kappa_y^*) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(96)_{a,b}$$

7. 曲線材の弾性方程式

まず、断面上の任意な定点 D を通る軸線の変形で、曲線材の弾性方程式を表わすことを考える。曲線材に作用する任意な外力は、 D 点を通る軸線の単位長さあたりに作用するつぎのような力でおきかえることができる。

$q_x, q_y, q_z =$ 作用線がそれぞれ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 軸に一致する荷重 (q_x, q_y は横荷重であり、 q_z は軸方向荷重である)。

$m_x, m_y, m_z =$ それぞれ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 軸のまわりのモーメント荷重 (m_z は定点 D のまわりのねじれモーメント荷重である)。
 $m_\omega =$ 定点 D に関する曲げねじれモーメント荷重。

いま、微小角 $d\theta$ にはさまれている曲線材の素片に作用しているすべての力のつり合いを考えると、つぎのような平衡方程式が得られる。

- ① x 方向の力のつり合い：
$$\frac{dQ_x}{d\theta} + R_D q_x = 0$$
- ② y 方向の力のつり合い：
$$\frac{dQ_y}{d\theta} + N_z + R_D q_y = 0$$
- ③ z 方向の力のつり合い：
$$\frac{dN_z}{d\theta} - Q_y + R_D q_z = 0$$

④ x 軸まわりのモーメントのつり合い:

$$\frac{dM_{\bar{x}}}{d\theta} - R_D Q_{\bar{y}} - R_D m_{\bar{x}} = 0$$

⑤ \bar{y} 軸まわりのモーメントのつり合い:

$$\frac{dM_{\bar{y}}}{d\theta} - T_{\bar{z}} - R_D Q_{\bar{x}} - R_D m_{\bar{y}} + m_{\bar{y}} = 0$$

⑥ \bar{z} 軸まわりのモーメントのつり合い:

$$\frac{dT_{\bar{z}}}{d\theta} + M_{\bar{y}} + R_D m_{\bar{z}} = \frac{dm_{\bar{z}}}{d\theta} = 0$$

.....(97)_{a-f}

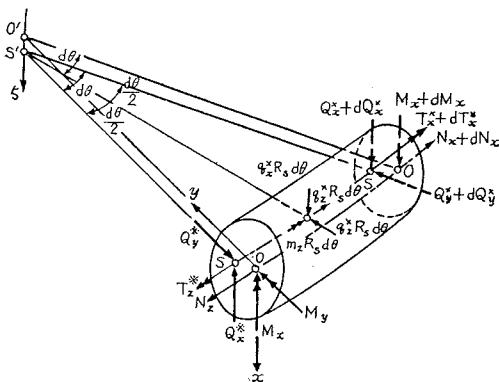
ここに, $Q_{\bar{x}}, Q_{\bar{y}}, N_{\bar{z}}, M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}, T_{\bar{z}}$ はすべて D 点に関する断面力である (6. 参照). 断面の中立点 O に作用する軸力 $N_{\bar{z}}$, O を通る x, y 軸のまわりの曲げモーメント $M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}$, せん断中心に作用するせん断力 $Q_{\bar{x}}^*, Q_{\bar{y}}^*$, せん断中心のまわりのねじれモーメント $T_{\bar{z}}^*$ と D 点に関する断面力との間にはつぎの関係がある.

$$\left. \begin{aligned} Q_{\bar{x}} &= Q_{\bar{x}}^*, & Q_{\bar{y}} &= Q_{\bar{y}}^*, & N_{\bar{z}} &= N_{\bar{z}} \\ M_{\bar{x}} &= M_{\bar{x}} - N_{\bar{z}} y_D, & M_{\bar{y}} &= M_{\bar{y}} - N_{\bar{z}} x_D \\ T_{\bar{z}} &= T_{\bar{z}}^* - (x_s - x_D) Q_{\bar{y}}^* + (y_s - y_D) Q_{\bar{x}}^* \end{aligned} \right\}$$

.....(98)_{a-f}

なお 図-7 は微小角 $d\theta$ にはさまれた曲線材の素片について, せん断中心軸に作用する荷重と上記の断面力とを示している.

図-7



式 (97) からせん断力 $Q_{\bar{x}}, Q_{\bar{y}}$ を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{\bar{z}}}{d\theta} - \frac{1}{R_D} \frac{dM_{\bar{x}}}{d\theta} &= -R_D q_{\bar{z}} - m_{\bar{x}} \\ \frac{d^2 M_{\bar{x}}}{d\theta^2} + R_D N_{\bar{z}} &= -R_D^2 q_{\bar{y}} + R_D \frac{dm_{\bar{x}}}{d\theta} \\ \frac{d^2 M_{\bar{y}}}{d\theta^2} - \frac{dT_{\bar{z}}}{d\theta} &= -R_D^2 q_{\bar{x}} + R_D \frac{dm_{\bar{y}}}{d\theta} - \frac{dm_{\bar{z}}}{d\theta} \\ \frac{dT_{\bar{z}}}{d\theta} + M_{\bar{y}} &= -R_D m_{\bar{z}} + \frac{dm_{\bar{z}}}{d\theta} \end{aligned} \right\}$$

.....(99)_{a-d}

さらに軸力 $N_{\bar{z}}$ をも消去すると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M_{\bar{x}}}{d\theta^2} + \frac{dM_{\bar{x}}}{d\theta} &= -R_D^2 \frac{dq_{\bar{y}}}{d\theta} + R_D^2 q_{\bar{z}} \\ &+ R_D \frac{d^2 m_{\bar{x}}}{d\theta^2} + R_D m_{\bar{x}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M_{\bar{y}}}{d\theta^2} - \frac{dT_{\bar{z}}}{d\theta} &= -R_D^2 q_{\bar{x}} + R_D \frac{dm_{\bar{y}}}{d\theta} - \frac{dm_{\bar{z}}}{d\theta} \\ \frac{dT_{\bar{z}}}{d\theta} + M_{\bar{y}} &= -R_D m_{\bar{z}} + \frac{dm_{\bar{z}}}{d\theta} \end{aligned} \right\}$$

.....(100)_{a-c}

式 (88), (91) の関係を式 (99) に代入して, D 点を通る軸線の変形に関する幾何学量で表わした弾性方程式がつきのように得られる.

$$\left. \begin{aligned} &-(E Z_{\bar{x}} - E F_D R_D) \varepsilon_{\bar{z}}' + (E J_{\bar{x}} - E Z_{\bar{x}} R_D) \kappa_{\bar{x}}' \\ &+ (E J_{\bar{x}\bar{y}} - E Z_{\bar{y}} R_D) \kappa_{\bar{y}}' + \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \psi_{\bar{z}}'' \\ &= -R_D^2 q_{\bar{x}} - R_D m_{\bar{x}} \\ &- E Z_{\bar{x}} \varepsilon_{\bar{z}}'' - E F_D R_D \varepsilon_{\bar{z}} + E J_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}}'' + E Z_{\bar{x}} R_D \kappa_{\bar{x}} \\ &+ E J_{\bar{x}\bar{y}} \kappa_{\bar{y}}'' + E Z_{\bar{y}} R_D \kappa_{\bar{y}} + \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \psi_{\bar{z}}''' \\ &= R_D^2 q_{\bar{y}} - R_D m_{\bar{y}}' \\ &- E Z_{\bar{y}} \varepsilon_{\bar{z}}'' + \left(E J_{\bar{x}\bar{y}} - \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \right) \kappa_{\bar{x}}'' + \left(E J_{\bar{y}} - \frac{E C_{\bar{y}}}{R_D} \right) \kappa_{\bar{y}}'' \\ &+ \left(\frac{E C_{\bar{y}}}{R_D} - \frac{E C_{\bar{z}}}{R_D^2} \right) \psi_{\bar{z}}''' + G J_{TD} \psi_{\bar{z}}' \\ &= R_D^2 q_{\bar{x}} - R_D m_{\bar{y}}' + m_{\bar{y}}' \\ &- E Z_{\bar{y}} \varepsilon_{\bar{z}} + \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \kappa_{\bar{x}}'' + E J_{\bar{x}\bar{y}} \kappa_{\bar{x}} + \frac{E C_{\bar{y}}}{R_D} \kappa_{\bar{y}}'' + E J_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} \\ &+ \frac{E C_{\bar{z}}}{R_D^2} \psi_{\bar{z}}''' - \left(G J_{TD} - \frac{E C_{\bar{y}}}{R_D} \right) \psi_{\bar{z}}' \\ &= R_D m_{\bar{z}} - m_{\bar{z}}' \end{aligned} \right\}$$

.....(101)

ここに dash は θ についての微分を表わす.

さらに式 (70) を用いると, 断面上に任意に選んだ定点 D の変形で表わした弾性方程式がつきのように四元連立微分方程式として得られる.

$$\left. \begin{aligned} &(E J_{\bar{x}} + E F_D R_D^2 - 2 E Z_{\bar{x}} R_D) \bar{w}'' \\ &+ (E J_{\bar{x}} - E Z_{\bar{x}} R_D) \bar{v}'' - (E F_D R_D^2 - E Z_{\bar{x}} R_D) \bar{v}' \\ &+ \left(E J_{\bar{x}\bar{y}} - E Z_{\bar{y}} R_D - \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \right) \bar{u}''' + E C_{\bar{x}} \varphi''' \\ &+ (E J_{\bar{x}\bar{y}} - E Z_{\bar{y}} R_D) R_D \varphi' = -R_D^4 q_{\bar{x}} - R_D^3 m_{\bar{x}} \\ &(E J_{\bar{x}} - E Z_{\bar{x}} R_D) \bar{w}'' - (E F_D R_D^2 - E Z_{\bar{x}} R_D) \bar{w}' \\ &+ E J_{\bar{x}} \bar{v}'' + 2 E Z_{\bar{x}} R_D \bar{v}'' + E F_D R_D^2 \bar{v} \\ &+ \left(E J_{\bar{x}\bar{y}} - \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \right) \bar{u}'' + E Z_{\bar{y}} R_D \bar{u}'' + E C_{\bar{x}} \varphi'' \\ &+ E J_{\bar{x}\bar{y}} R_D \varphi'' + E Z_{\bar{y}} R_D^2 \varphi = R_D^4 q_{\bar{y}} - R_D^3 m_{\bar{y}}' \\ &\left(E J_{\bar{x}\bar{y}} - E Z_{\bar{y}} R_D - \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \right) \bar{w}''' + \left(E J_{\bar{x}\bar{y}} - \frac{E C_{\bar{x}}}{R_D} \right) \bar{v}'' \\ &+ E Z_{\bar{y}} R_D \bar{v}'' + \left(E J_{\bar{y}} + \frac{E C_{\bar{z}}}{R_D^2} - 2 \frac{E C_{\bar{y}}}{R_D} \right) \bar{u}'' \\ &- G J_{TD} \bar{u}'' - \left(\frac{E C_{\bar{z}}}{R_D^2} - \frac{E C_{\bar{y}}}{R_D} \right) R_D \varphi'' \\ &+ \left(E J_{\bar{y}} + G J_{TD} - \frac{E C_{\bar{y}}}{R_D} \right) R_D \varphi'' \\ &= R_D^4 q_{\bar{x}} - R_D^3 m_{\bar{y}}' + R_D^3 m_{\bar{z}}' \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \frac{EC_{\bar{x}}}{R_D} \bar{w}''' + (EJ_{\bar{x}\bar{y}} - EZ_{\bar{y}}R_D) \bar{w}' + \frac{EC_{\bar{x}}}{R_D} \bar{v}^{\text{IV}} \\ & + EJ_{\bar{x}\bar{y}} \bar{v}'' + EZ_{\bar{y}}R_D \bar{v} - \left(\frac{EC_{\bar{w}}}{R_D^2} - \frac{EC_{\bar{y}}}{R_D} \right) \bar{u}^{\text{IV}} \\ & + \left(EJ_{\bar{y}} + GJ_{TD} - \frac{EC_{\bar{y}}}{R_D} \right) \bar{u}'' + \frac{EC_{\bar{w}}}{R_D} \varphi^{\text{IV}} \\ & - \left(GJ_{TD} - 2 \frac{EC_{\bar{y}}}{R_D} \right) R_D \varphi'' + EJ_{\bar{y}}R_D \varphi \\ & = R_D^3 m_{\bar{z}} - R_D^2 m_{\bar{w}}' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(102)$$

これらの弾性方程式は、エネルギー最小原理によって、変分問題のオイラーの微分方程式として導くこともできる。すなわち、曲線材の変形に際して外力の得るポテンシャルエネルギー Π_2 は、ここでは式(90)のかわりに、Normalized forces として荷重 $q_{\bar{x}}, q_{\bar{y}}, q_{\bar{z}}, m_{\bar{x}}, m_{\bar{y}}, m_{\bar{z}}, m_{\bar{w}}$ を、また Normalized coordinate として $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \phi_{\bar{x}}, \phi_{\bar{y}}, \phi, \psi_{\bar{z}}$ をとると、つぎようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & - \int_0^{\theta_0} (q_{\bar{x}} \bar{u} + q_{\bar{y}} \bar{v} + q_{\bar{z}} \bar{w} + m_{\bar{x}} \phi_{\bar{x}} + m_{\bar{y}} \phi_{\bar{y}} \\ & + m_{\bar{z}} \phi + m_{\bar{w}} \psi_{\bar{z}}) R_D d\theta \quad \dots\dots\dots(103) \end{aligned}$$

したがって、系の全ポテンシャルエネルギーの増分 $\delta \Pi$ は

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 \\ = & \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} [EF_D \epsilon_{\bar{z}}^2 + EJ_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}}^2 + EJ_{\bar{y}}^2 + 2EJ_{\bar{x}\bar{y}} \kappa_{\bar{x}} \kappa_{\bar{y}} \\ & - 2EZ_{\bar{x}} \epsilon_{\bar{z}} \kappa_{\bar{x}} - 2EZ_{\bar{y}} \epsilon_{\bar{z}} \kappa_{\bar{y}} + EC_{\bar{w}} \vartheta_{\bar{w}}^2 \\ & + 2EC_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} \vartheta_{\bar{w}} + 2EC_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} \vartheta_{\bar{w}} + GJ_{TD} \psi_{\bar{z}}^2 \\ & - 2(q_{\bar{x}} \bar{u} + q_{\bar{y}} \bar{v} + q_{\bar{z}} \bar{w} + m_{\bar{x}} \phi_{\bar{x}} + m_{\bar{y}} \phi_{\bar{y}} \\ & + m_{\bar{z}} \phi + m_{\bar{w}} \psi_{\bar{z}})] R_D d\theta \quad \dots\dots\dots(104) \end{aligned}$$

$\delta \Pi = 0$ から得られるオイラーの微分方程式は、式(101)あるいは式(102)とまったく一致する。

曲率面内に作用する荷重がなく ($q_{\bar{y}} = q_{\bar{z}} = m_{\bar{x}} = 0$), $N_{\bar{z}} = 0, M_{\bar{x}} = 0$

の場合には、式(88)_{a, b}を考慮して

$$\begin{aligned} EF_D \epsilon_{\bar{z}} - EZ_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} - EZ_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} & = 0 \\ EZ_{\bar{x}} \epsilon_{\bar{z}} - EJ_{\bar{x}} \kappa_{\bar{x}} - EJ_{\bar{x}\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} - EC_{\bar{x}} \vartheta_{\bar{w}} & = 0 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \epsilon_{\bar{z}} & = \frac{Z_{\bar{y}} J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}} J_{\bar{x}\bar{y}}}{F_D J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}}^2} \kappa_{\bar{y}} - \frac{Z_{\bar{x}} C_{\bar{x}}}{F_D J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}}^2} \vartheta_{\bar{w}} \\ \kappa_{\bar{x}} & = - \frac{F_D J_{\bar{x}\bar{y}} - Z_{\bar{x}} Z_{\bar{y}}}{F_D J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}}^2} \kappa_{\bar{w}} - \frac{F_D C_{\bar{x}}}{F_D J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}}^2} \vartheta_{\bar{w}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(105)_{a, b}$$

これを式(88)_c, (91)式に代入して $M_{\bar{y}}, T_{\bar{z}}$ がつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} M_{\bar{y}} & = -E \bar{J}_{\bar{y}} \kappa_{\bar{y}} - E \bar{C}_{\bar{y}} \vartheta_{\bar{w}} \\ T_{\bar{z}} & = GJ_{TD} \psi_{\bar{z}} - \frac{E \bar{C}_{\bar{y}}}{R_D} \kappa_{\bar{y}}' - \frac{E \bar{C}_{\bar{w}}}{R_D} \vartheta_{\bar{w}}' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(106)_{a, b}$$

ここに、

$$\bar{J}_{\bar{y}} = \frac{F_D J_{\bar{x}} J_{\bar{y}} - Z_{\bar{x}}^2 J_{\bar{y}} - Z_{\bar{y}}^2 J_{\bar{x}} - F_D J_{\bar{x}\bar{y}}^2 + 2 Z_{\bar{x}} Z_{\bar{y}} J_{\bar{x}\bar{y}}}{F_D J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}}^2}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{R_D}{R_0} \left(J_{\bar{y}} - \frac{J_{x\bar{y}}^2}{J_{\bar{x}}} \right) \\ \bar{C}_{\bar{y}} & = C_{\bar{y}} - \frac{(F_D J_{\bar{x}\bar{y}} - Z_{\bar{x}} Z_{\bar{y}}) C_{\bar{x}}}{F_D J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}}^2} = C_{\bar{y}} - \frac{J_{x\bar{y}}}{J_{\bar{x}}} C_{\bar{x}} \\ \bar{C}_{\bar{w}} & = C_{\bar{w}} - \frac{F_D C_{\bar{x}}}{F_D J_{\bar{x}} - Z_{\bar{x}}^2} = C_{\bar{w}} - \frac{R_0}{R_D} \cdot \frac{C_{\bar{x}}^2}{J_{\bar{x}}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(107)$$

したがって、この場合の曲率面外の変形の弾性方程式は(99)_{c, d}, (106)の諸式からつぎのように得られる、

$$\begin{aligned} & \left(E \bar{J}_{\bar{y}} + \frac{E \bar{C}_{\bar{w}}}{R_D^2} - 2 \frac{E \bar{C}_{\bar{y}}}{R_D} \right) \bar{u}^{\text{IV}} - GJ_{TD} \bar{u}'' \\ & - \left(\frac{E \bar{C}_{\bar{w}}}{R_D^2} - \frac{E \bar{C}_{\bar{y}}}{R_D} \right) R_D \varphi^{\text{IV}} \\ & + \left(E \bar{J}_{\bar{y}} + GJ_{TD} - \frac{E \bar{C}_{\bar{y}}}{R_D} \right) R_D \varphi'' \\ & = R_D^4 q_{\bar{x}} - R_D^3 m_{\bar{y}}' + R_D^2 m_{\bar{w}}' \\ & - \left(\frac{E \bar{C}_{\bar{w}}}{R_D} - \frac{E \bar{C}_{\bar{y}}}{R_D} \right) \bar{u}^{\text{IV}} + \left(E \bar{J}_{\bar{y}} + GJ_{TD} - \frac{E \bar{C}_{\bar{y}}}{R_D} \right) \bar{u}'' \\ & + \frac{E \bar{C}_{\bar{w}}}{R_D} \cdot \varphi^{\text{IV}} - \left(GJ_{TD} - 2 \frac{E \bar{C}_{\bar{y}}}{R_D} \right) R_D \varphi'' \\ & + E \bar{J}_{\bar{y}} R_D \varphi = R_D^3 m_{\bar{z}} - R_D^2 m_{\bar{w}}' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(108)$$

つぎに、中立軸の変形で弾性方程式を表わす。この場合には $Z_x = Z_y = 0$ であるから、得られた微分方程式を表形式で示すと表-1のようになる。同表における荷重はすべて中立軸の単位長さあたり作用する外力を表わしている。

曲線材の断面が y 軸、すなわち曲率面に平行な軸に関して対称な場合には

$$J_{xy} = C_x = 0$$

であるから、曲率面内における変形と曲率面外への変形(ねじれをふくむ)との連成がなくなり、弾性方程式は2群にわかれる。すなわち、

曲率面内の変形:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} (EJ_x + EFR_0^2) w'' + EJ_x v''' - EFR_0^2 v' \\ = -R_0^4 q_x - R_0^3 m_x \\ EJ_x w''' - EFR_0^2 w' + EJ_x v^{\text{IV}} + EFR_0^2 v \\ = R_0^4 q_y - R_0^3 m_x' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(110) \end{aligned}$$

曲率面外への変形:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \left(EJ_y + \frac{EC_{\bar{w}}}{R_0^2} - \frac{EC_y}{R_0} \right) u^{\text{IV}} - GJ_T u'' \\ - \left(\frac{EC_{\bar{w}}}{R_0^2} - \frac{EC_y}{R_0} \right) R_0 \varphi^{\text{IV}} \\ + \left(EJ_y + GJ_T - \frac{EC_y}{R_0} \right) R_0 \varphi'' \\ = R_0^4 q_x - R_0^3 m_y' + R_0^2 m_{\bar{w}}' \\ - \left(\frac{EC_{\bar{w}}}{R_0^2} - \frac{EC_y}{R_0} \right) u^{\text{IV}} + \left(EJ_y + GJ_T - \frac{EC_y}{R_0} \right) u'' \\ + \frac{EC_{\bar{w}}}{R_0} \varphi^{\text{IV}} - \left(GJ_T - 2 \frac{EC_y}{R_0} \right) R_0 \varphi'' + EJ_y R_0 \varphi \\ = R_0^3 m_z - R_0^2 m_{\bar{w}}' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(111) \end{aligned}$$

表-1 式(109)

$$D = \frac{d}{d\theta}$$

w	v	u	$R_0\varphi$	荷重項
$(EJ_x + EFR_0^2)D^2$	$EJ_x D^3 - EFR_0^2 D$	$(EJ_{xy} - \frac{EC_x}{R_0})D^3$	$\frac{EC_x}{R_0} D^3 + EJ_{xy} D$	$-R_0^4 q_z - R_0^3 m_x$
$EJ_x D^3 - EFR_0^2 D$	$EJ_x D^4 + EFR_0^2$	$(EJ_{xy} - \frac{EC_x}{R_0})D^4$	$\frac{EC_x}{R_0} D^4 + EJ_{xy} D^2$	$R_0^4 q_y - R_0^3 m_x'$
$(EJ_{xy} - \frac{EC_x}{R_0})D^3$	$(EJ_{xy} - \frac{EC_x}{R_0})D^4$	$(EJ_y - \frac{EC_\omega}{R_0^2} - 2\frac{EC_y}{R_0})D^4 - GJT D^2$	$-(\frac{EC_\omega}{R_0^2} - \frac{EC_y}{R_0})D^4 + (EJ_y + GJT - \frac{EC_y}{R_0^2})D^2$	$R_0^4 q_x - R_0^3 m_y' + R_0^2 m_\omega'$
$\frac{EC_x}{R_0} D^3 + EJ_{xy} D$	$\frac{EC_x}{R_0} D^4 + EJ_{xy} D^2$	$-(\frac{EC_\omega}{R_0^2} - \frac{EC_y}{R_0})D^4 + (EJ_y + GJT - \frac{EC_y}{R_0})D^2$	$\frac{EC_\omega}{R_0^2} D^4 - (GJT - 2\frac{EC_y}{R_0})D^2 + EJ_y$	$R_0^3 m_z - R_0^2 m_\omega'$

表-2 式(113)

$$D = \frac{d}{d\theta}$$

w	u	$R_0\varphi$	荷重項
$EJ_x D^2 (D^2 + 1)^2$	$(EJ_{xy} - \frac{EC_x}{R_0})(D^5 + D^3)$	$\frac{EC_x}{R_0} D^5 + (EJ_{xy} + \frac{EC_x}{R_0})D^3 + EJ_{xy} D$	$R_0^4 q_y' - R_0^4 q_z - R_0^3 m_x'' - R_0^3 m_x$
$(EJ_{xy} - \frac{EC_x}{R_0})(D^5 + D^3)$	$(EJ_y + \frac{EC_\omega}{R_0^2} - 2\frac{EC_y}{R_0})D^4 - GJT D^2$	$-(\frac{EC_\omega}{R_0^2} - \frac{EC_y}{R_0})D^4 + (EJ_y + GJT - \frac{EC_y}{R_0})D^2$	$R_0^4 q_x - R_0^3 m_y' + R_0^2 m_\omega'$
$\frac{EC_x}{R_0} D^5 + (EJ_{xy} + \frac{EC_x}{R_0})D^3 + EJ_{xy} D$	$-(\frac{EC_\omega}{R_0^2} - \frac{EC_y}{R_0})D^4 + (EJ_y + GJT - \frac{EC_y}{R_0})D^2$	$\frac{EC_\omega}{R_0^2} D^4 - (GJT - 2\frac{EC_y}{R_0})D^2 + EJ_y$	$R_0^3 m_z - R_0^2 m_\omega'$

これは式(108)と同形である。

中立軸の伸縮を無視することができる場合(inextensibility の仮定)には

$$\epsilon_z = \frac{1}{R_0} \left(\frac{dw}{d\theta} - v \right) = 0$$

すなわち、

$$\frac{dw}{d\theta} = v \quad \dots\dots\dots(112)$$

が成り立つ。この場合の弾性方程式は、力のつり合い式から軸力 N_z をも消去した式(100)に対応する式を用い、さらに式(112)を考慮して表-2 (v を消去した場合)のように求められる。

断面が y 軸に関して対称で、しかも中立軸の伸縮が無視できる場合には、曲率面内の変形に対して

$$EJ_x (w^{IV} + 2w^{IV} + w''') = R_0^4 q_y' - R_0^4 q_z - R_0^3 m_x'' - R_0^3 m_x \dots\dots(114)$$

曲率面外への変形はこの場合には中立軸の伸縮には無関係であり、式(111)と同一である。

曲率面内に作用する荷重がない場合 ($q_y = q_z = m_x = 0$) には、曲率面外への変形に対する弾性方程式は一般断面に対して式(111)の J_y, C_y, C_ω のかわりに次式で表わされる $\bar{J}_y, \bar{C}_y, \bar{C}_\omega$ を用いればよい。

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_y &= J_y - \frac{J_{xy}^2}{J_x} & \bar{C}_y &= C_y - \frac{J_{xy}}{J_x} C_x \\ \bar{C}_\omega &= C_\omega - \frac{C_x^2}{J_x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(115)_{a-c}$$

最後に、せん断中心軸の変形で表わした弾性方程式について記す。この場合には $C_x^* = C_y^* = 0$ を考慮すればよい。表-3 は曲げに関する断面定数は中立点の断面定数 (F, J_x, J_y, J_{xy}) を用い、ねじれに関する断面定数はせん断中心の断面定数 (J_T^*, C_ω^*) を用いて表わした弾性方程式である。同表における荷重はすべてせん断中心の単位長さあたりに作用する外力を表わしている。

断面が軸に関して対称な場合には

$$J_{xy} = 0, \quad x_s = 0$$

であるから、中立軸の変形で表わした場合と同様に、曲率面内の変形と曲率面外への変形とは分離されてつぎのようになる。

曲率面内の変形：

$$\left. \begin{aligned} &\frac{R_s}{R_0} (EJ_x + EFR_0^2) w^{IV} \\ &+ \frac{R_s}{R_0} (EJ_x + EFR_0 J_s) v^{IV} - EFR_s^2 v'' \\ &= -R_s^4 q_z^* - R_s^3 m_x^* \end{aligned} \right\}$$

表-3 式 (116)

$$D = \frac{d}{d\theta}$$

w^*	v^*	u^*	$R_s\varphi$	荷重項
$\frac{R_s}{R_0} (EJ_x + EFR_0^2) D^2$	$\frac{R_s}{R_0} EJ_x + EFR_0 y_s) D^3$ $- EFR_s^2 D$	$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFR_0 x_s) D^3$	$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFR_0 x_s) D$	$-R_s^4 q_z^* - R_s^3 m_x^*$
$\frac{R_s}{R_0} (EJ_x + EFR_0 y_s^2) D^3$ $- EFR_s^2 D$	$\frac{R_s}{R_0} (EJ_x + EFy_s^2) D^4$ $- 2 \frac{R_s}{R_0} EFR_s y_s D^2$ $+ \frac{R_s}{R_0} EFR_s^2$	$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFx_s y_s) D^4$ $- \frac{R_s}{R_0} EFR_s x_s D^2$	$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFx_s y_s) D^2$ $- \frac{R_s}{R_0} EFR_s x_s$	$R_s^4 q_y^* - R_s^3 m_x^{*'}$
$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFR_0 x_s) D^3$	$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFx_s y_s) D^4$ $- \frac{R_s}{R_0} EFR_s x_s D^2$	$\left(\frac{R_s}{R_0} EJ_y + \frac{R_s}{R_0} EFx_s^2 \right. \\ \left. + \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} \right) D^4 - GJ_T^* D^2$	$-\frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} D^4 + \left(\frac{R_s}{R_0} EJ_y \right. \\ \left. + \frac{R_s}{R_0} EFx_s^2 + GJ_T^* \right) D^2$	$R_s^4 q_x^* - R_s^3 m_y^{*'} \\ + R_s^2 m_{\omega}^{*'}$
$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFR_0 x_s) D$	$\frac{R_s}{R_0} (EJ_{xy} + EFx_s y_s) D^2$ $- \frac{R_s}{R_0} EFR_s x_s$	$-\frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} D^4 + \left(\frac{R_s}{R_0} EJ_y \right. \\ \left. + \frac{R_s}{R_0} EFx_s^2 + GJ_T^* \right) D^2$	$\frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} D^4 - GJ_T^* D^2$ $+ \frac{R_s}{R_0} (EJ_y + EFx_s^2)$	$R_s^3 m_z^* - R_s^2 m_{\omega}^{*'}$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{R_s}{R_0} (EJ_x + EFR_0 y_s) w^{*IV} - EFR_s^2 w^{*'} \\ & + \frac{R_s}{R_0} (EJ_x + EFy_s^2) v^{*IV} - 2 \frac{R_s}{R_0} EFR_s y_s v^{*''} \\ & + \frac{R_s}{R_0} EFR_s^2 v^* \\ & = R_s^4 q_y^* - R_s^3 m_x^{*'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(117)$$

曲率面外への変形:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{R_s}{R_0} EJ_y + \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} \right) u^{*IV} - GJ_T^* u^{*''} \\ & - \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} \varphi^{IV} + \left(\frac{R_s}{R_0} EJ_y + GJ_T^* \right) R_s \varphi'' \\ & = R_s^4 q_x^* - R_s^3 m_y^{*'} + R_s^2 m_{\omega}^{*'} \\ & - \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} u^{*IV} + \left(\frac{R_s}{R_0} EJ_y + GJ_T^* \right) u^{*''} \\ & + \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} \varphi^{IV} - GJ_T^* R_s \varphi'' + \frac{R_s}{R_0} EJ_y R_s \varphi \\ & = R_s^3 m_z^* - R_s^2 m_{\omega}^{*'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(118)$$

中立軸の伸縮を無視できる場合には

$$\epsilon_z = \frac{R_s}{R_0} (\epsilon_z^* + y_s \epsilon_x^* + x_s \epsilon_y^*) \approx 0$$

すなわち,

$$\frac{R_0}{R_s} w^{*'} + \frac{y_s}{R_s} v^{*''} - v^* + \frac{x_s}{R_s} (u^{*''} + R_s \varphi) = 0 \dots\dots\dots(119)$$

したがって、式 (119) を式 (112) のかわりに用いればよい。特に断面の主軸の一つが曲率面に平行な場合には $J_{xy} = 0$

である。この場合の曲率面外への変形の弾性方程式は式 (118) と一致する。すなわち、せん断中心軸の変形で表わすと、中立軸の伸縮を無視できる場合には、断面の主

軸の一つが曲率面に平行であれば、y軸に関して対称な断面でなくても、曲率面外への変形は独立に解くことができる。u*,φ を知れば、曲率面内の変形は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{R_s}{R_0} EJ_x (w^{*VI} + 2w^{*IV} + w^{*''}) \\ & + \frac{x_s}{R_s} EJ_x (u^{*VI} + u^{*IV} + R_s \varphi^{IV} + R_s \varphi''') \\ & + R_s^3 y_s q_y^{*'''} - R_s^4 q_y^{*'} - R_s^4 q_z^{*''} + R_s^4 q_x^* \\ & - R_s^2 y_s m_x^{*IV} - R_s^2 (R_s - y_s) m_x^{*''} + R_s^3 m_x^* \\ & = 0 \dots\dots\dots(120) \end{aligned} \right\}$$

曲率面内の作用荷重がない場合の曲率面外への変形の弾性方程式を、せん断中心軸の変形で表わせば、一般断面に対してつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{R_s}{R_0} EJ_y + \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} \right) u^{*IV} - GJ_T^* u^{*''} \\ & - \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} \varphi^{IV} + \left(GJ_T^* + \frac{R_s}{R_0} EJ_y \right) R_s \varphi'' \\ & = R_s^4 q_x^* - R_s^3 m_y^{*'} + R_s^2 m_{\omega}^{*'} \\ & - \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} u^{*IV} + \left(GJ_T^* + \frac{R_s}{R_0} EJ_y \right) u^{*''} \\ & + \frac{EC_{\omega}^*}{R_s^2} \varphi^{IV} - GJ_T^* R_s \varphi'' + \frac{R_s}{R_0} EJ_y R_s \varphi \\ & = R_s^3 m_z^* - R_s^2 m_{\omega}^{*'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(121)$$

式中の \bar{J}_y はすでに式 (115)_a で与えられている。

以上、各種の弾性方程式を列記したが、実際問題を解くにあたっては、荷重の種類、支点条件、断面性質などから総合的に判断して、いずれの方程式を用いるかを定めるべきである。たとえば、鉛直荷重を受ける曲線橋の解析には、式 (121) を用いるのが普通である。

8. 垂直応力とせん断応力

(1) 垂直応力

曲線材の任意な変形, すなわち引張り(あるいは圧縮), 曲げ, 曲げねじれによって, 断面上の任意点 P に生ずる垂直応力 σ_θ は, 定点 D を通る軸線の変形で表わせば, 式 (73)_a より

$$\sigma_\theta = \frac{R_D}{\rho} E(\varepsilon_z - \bar{y} \kappa_x - \bar{x} \kappa_y - \bar{\omega} \vartheta_\omega) \dots\dots\dots (122)$$

となる。垂直応力を直接断面力で表わすには, 式 (88) から $\varepsilon_z, \kappa_x, \kappa_y, \vartheta_\omega$ を解き, 式 (122) に代入すればよい。

特に, 断面力として $N_x, M_x, M_y, M_\omega^*$ を用いると, つぎのように簡単な表式が得られる。まず, 式 (82) を用いて

$$\sigma_\theta = \frac{R_0}{\rho} E \varepsilon_z - \frac{R_s}{\rho} E(y \kappa_x^* + x \kappa_y^* + \omega \vartheta_\omega^*) \dots\dots\dots (123)$$

つぎに, (94)_a, (95)_d, (96) の諸式から $\varepsilon_z, \kappa_x^*, \kappa_y^*, \vartheta_\omega^*$ を求めると

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_z &= \frac{N_z}{F} \\ E \kappa_x^* &= -\frac{R_0}{R_s} \cdot \frac{M_x J_y - M_y J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} \\ E \kappa_y^* &= -\frac{R_0}{R_s} \cdot \frac{M_y J_x - M_x J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} \\ E \vartheta_\omega^* &= -\frac{M_\omega^*}{C_\omega^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots (124)_{a-d}$$

したがって, (123), (124) の両式から

$$\sigma_\theta = \frac{R_0}{\rho} \left[\frac{N_z}{F} + \frac{M_y J_x - M_x J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} \cdot x + \frac{M_x J_y - M_y J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} \cdot y + \frac{R_s}{R_0} \frac{M_\omega^*}{C_\omega^*} \omega^* \right] \dots\dots\dots (125)$$

断面の主軸に関する量を用いて表わすと, さらに簡単な式となる。座標系 ($O-x, y$) と ($O-X, Y$) との関係式

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha$$

$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

を式 (123) に代入し整理すると

$$\sigma_\theta = \frac{R_0}{\rho} E \varepsilon_z - \frac{R_s}{\rho} E[(\kappa_x^* \sin \alpha + \kappa_y^* \cos \alpha) X + (\kappa_x^* \cos \alpha - \kappa_y^* \sin \alpha) Y + \omega \vartheta_\omega^*] \dots\dots (126)$$

ここで, 主軸 X, Y 軸のまわりの曲げモーメントをそれぞれ M_X, M_Y とすると

$$M_X = \int_F \sigma_\theta Y dF, \quad M_Y = \int_F \sigma_\theta X dF$$

式 (126) を代入して, 式 (11) を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} M_X &= -\frac{R_s}{R_0} E J_X (\kappa_x^* \cos \alpha - \kappa_y^* \sin \alpha) \\ M_Y &= -\frac{R_s}{R_0} E J_Y (\kappa_x^* \sin \alpha + \kappa_y^* \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots (127)_{a,b}$$

結局, (126), (127) の両式から

$$\sigma_\theta = \frac{R_0}{\rho} \left[\frac{N_z}{F} + \frac{M_Y}{J_Y} X + \frac{M_X}{J_X} Y + \frac{R_s}{R_0} \frac{M_\omega^*}{C_\omega^*} \omega^* \right] \dots\dots\dots (128)$$

(2) 垂直応力とともなうせん断応力

まず薄肉断面における垂直応力とそれにとまうせん断応力との関係式を求める。応力のつり合い式を円柱座標 (ρ, θ, ζ) を用いて表わすと¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta\zeta}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\zeta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\zeta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\tau_{\rho\zeta}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (129)_{a-c}$$

式 (129)_b を薄肉断面に対して設けた曲線座標 (s, n, θ) で表わすと次式が得られる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial s} (\rho^2 \tau_s) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial n} (\rho^2 \tau_n) = 0 \dots\dots\dots (130)$$

ここに, つぎのような関係式が考慮された。

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} &= -\tau_s \cos \beta - \tau_n \sin \beta \\ \tau_{\theta\zeta} &= -\tau_s \sin \beta + \tau_n \cos \beta \\ \frac{\partial \tau_s}{\partial s} &= -\frac{\partial \tau_s}{\partial \rho} \cos \beta - \frac{\partial \tau_s}{\partial \zeta} \sin \beta \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial n} &= -\frac{\partial \tau_n}{\partial \rho} \sin \beta + \frac{\partial \tau_n}{\partial \zeta} \cos \beta \\ \cos \beta &= -\frac{\partial \rho}{\partial s}, \quad \sin \beta = -\frac{\partial \rho}{\partial n} \end{aligned}$$

通常の薄肉断面では $\tau_n \approx 0$ とすることができ, また板厚 t を s のみの関数とすると, 式 (130) はつぎのように書きなおすことができる^{5), 6)}。

$$t \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (\rho^2 \tau_s t) = 0 \dots\dots\dots (131)$$

さて, 式 (131) の関係を知って, 垂直応力 σ_θ にとまうせん断応力 τ_s の算式を, 開いた断面, 閉じた断面についてそれぞれ別々に求める。

a) 開いた断面 s 座標の原点 A で $\tau_s = 0$ となるように原点 A を定める。すなわち, 開いた断面の自由端に原点 A をとると, 式 (131) から

$$q_s = \tau_s t = -\frac{1}{\rho^2} \int_0^s \rho t \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} ds \dots\dots\dots (132)$$

この式に式 (122) を代入し

$$\left. \begin{aligned} f(s) &= \int_0^s t ds, & g_x(s) &= \int_0^s \bar{y} t ds \\ g_y(s) &= \int_0^s \bar{x} t ds, & g_\omega(s) &= \int_0^s \bar{\omega} t ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (133)$$

とおくと, τ_s がつぎのように定点 D を通る軸線の変形で表わされる。

$$\tau_s = \frac{q_s}{t} = -\frac{R_D^2}{\rho^2} \cdot \frac{E}{t} \left[f \frac{d\varepsilon_z}{R_D d\theta} - g_x \frac{d\kappa_x}{R_D d\theta} - g_y \frac{d\kappa_y}{R_D d\theta} - g_\omega \frac{d\vartheta_\omega}{R_D d\theta} \right] \dots\dots\dots (134)$$

特に、式 (128) を用いて断面力で表わすとつぎのようになる。

$$\tau_s = -\frac{R_0^2}{\rho^2} \left[\frac{V}{Ft} f + \frac{Q_Y}{J_X t} g_X + \frac{Q_X}{J_Y t} g_Y \right] - \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{T_{\omega^*}}{C_{\omega^*} t} g_{\omega^*} \dots\dots\dots (135)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{R_0} \frac{dN_z}{d\theta}, & Q_X &= \frac{1}{R_0} \frac{dM_Y}{d\theta} \\ Q_Y &= \frac{1}{R_0} \frac{dM_X}{d\theta}, & T_{\omega^*} &= \frac{1}{R_s} \frac{dM_{\omega^*}}{d\theta} \\ g_X(s) &= \int_0^s Y t ds, & g_Y(s) &= \int_0^s X t ds \\ g_{\omega^*}(s) &= \int_0^s \omega^* t ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (136)$$

b) 閉じた断面 式 (131) から、積分定数を C とし

て

$$\rho^2 t \tau_s = - \int_0^s \rho \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} t ds + C \dots\dots\dots (137)$$

いま \bar{R} を任意の定数として、 k 室に関する積分定数を $C = \bar{R}^2 \check{q}_k$ とすると、図-4 に示すような並列多室断面の場合には、 k 室に属する断面のせん断流 $q_{s,k}$ は

$$\left. \begin{aligned} q_{s,k} = \tau_{s,k} t &= \frac{\bar{R}^2}{\rho^2} (\check{q}_k - \check{q}_{k-1}) - \frac{1}{\rho^2} \int_0^s \rho \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} t ds \\ &\dots\dots\dots k-1 \text{ 室と } k \text{ 室との境界壁} \\ &= \frac{\bar{R}^2}{\rho^2} \check{q}_k - \frac{1}{\rho^2} \int_0^s \rho \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} t ds \\ &\dots\dots\dots \text{境界でない壁} \\ &= \frac{\bar{R}^2}{\rho^2} (\check{q}_k - \check{q}_{k+1}) - \frac{1}{\rho^2} \int_0^s \rho \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} t ds \\ &\dots\dots\dots k \text{ 室と } k+1 \text{ 室との境界壁} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (138)$$

上式中の $\frac{\bar{R}^2}{\rho^2} \check{q}_k$ は k 室の不静定せん断流と呼ぶこともできる。 σ_{θ} にともなう τ_s によるそりに対して、式 (21)_a と同形の式が成り立つから、閉じた断面のそりの連続の条件から、たとえば k 室については⁹⁾

$$\oint_k \frac{1}{\rho} \tau_{s,k} ds = 0 \dots\dots\dots (139)$$

でなければならない。(138)、(139) の両式から、 \check{q}_k を定める次式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\check{q}_{k-1} \int_{k-1,k} \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds + \check{q}_k \int_k \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\ & - \check{q}_{k+1} \int_{k,k+1} \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} ds \\ & = \frac{1}{\bar{R}^2} \int_k \frac{1}{\rho^3} \left[\int_0^s \rho \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} t ds \right] \frac{1}{t} ds \dots\dots\dots (140) \end{aligned}$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ に対し式 (140) で表わされる n 元一次連立方程式を解くと

$$\check{q}_k = \frac{1}{\bar{R}^2} \sum_{j=1}^n \left[a_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \left\{ \int_0^s \rho \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} t ds \right\} \frac{1}{t} ds \right] \dots\dots\dots (141)$$

ここに、 a_{kj} は式 (140) の係数行列の逆行列の (kj) 要素である。

結局、式 (141) を式 (138) に代入し、さらに式 (122) を考慮すると、 τ_s がつぎのように定点 D を通る軸線の変形で表わされる。

$$\begin{aligned} \tau_{s,k} &= \frac{q_{s,k}}{t} \\ &= -\frac{R_D^2}{\rho^2} \cdot \frac{E}{t} \left[\left\{ f - \sum_{j=1}^n \left(\bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{f}{t} ds \right) \right\} \frac{d\epsilon_z}{R_D d\theta} \right. \\ &\quad - \left\{ g_x - \sum_{j=1}^n \left(\bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{g_x}{t} ds \right) \right\} \frac{d\kappa_x}{R_D d\theta} \\ &\quad - \left\{ g_y - \sum_{j=1}^n \left(\bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{g_y}{t} ds \right) \right\} \frac{d\kappa_y}{R_D d\theta} \\ &\quad \left. - \left\{ g_{\omega} - \sum_{j=1}^n \left(\bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{g_{\omega}}{t} ds \right) \right\} \frac{d\vartheta_{\omega}}{R_D d\theta} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (142)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{kj} &= a_{kj} - a_{k-1,j} \dots\dots\dots k-1 \text{ 室と } k \text{ 室との境界壁} \\ &= a_{kj} \dots\dots\dots \text{境界でない壁} \\ &= a_{kj} - a_{k+1,j} \dots\dots\dots k \text{ 室と } k+1 \text{ 室との境界壁} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (143)$$

特に、式 (122) のかわりに式 (128) を用い、断面力で表わすと、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{s,k} &= \frac{q_{s,k}}{t} \\ &= -\frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{V}{Ft} \left[f - \sum_{j=1}^n \left\{ \bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{f}{t} ds \right\} \right] \\ &\quad - \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{Q_Y}{J_X t} \left[g_X - \sum_{j=1}^n \left\{ \bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{g_X}{t} ds \right\} \right] \\ &\quad - \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{Q_X}{J_Y t} \left[g_Y - \sum_{j=1}^n \left\{ \bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{g_Y}{t} ds \right\} \right] \\ &\quad - \frac{R_s^2}{\rho^2} \frac{T_{\omega^*}}{C_{\omega^*} t} \left[g_{\omega^*} - \sum_{j=1}^n \left\{ \bar{a}_{kj} \int_j \frac{1}{\rho^3} \frac{g_{\omega^*}}{t} ds \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (144)$$

一室閉断面の場合には \check{q} は

$$\begin{aligned} \check{q} &= \frac{R_0^2}{\bar{R}^2} \frac{V}{F} \int \frac{1}{\rho^3} \frac{f}{t} ds + \frac{R_0^2}{\bar{R}^2} \frac{Q_Y}{J_X} \int \frac{1}{\rho^3} \frac{g_X}{t} ds \\ &\quad + \frac{R_0^2}{\bar{R}^2} \frac{Q_X}{J_Y} \int \frac{1}{\rho^3} \frac{g_Y}{t} ds + \frac{R_s^2}{\bar{R}^2} \frac{T_{\omega^*}}{C_{\omega^*}} \int \frac{1}{\rho^3} \frac{g_{\omega^*}}{t} ds \end{aligned} \dots\dots\dots (145)$$

であるから τ_s はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \tau_s &= -\frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{V}{Ft} \left[f - \int \frac{1}{\rho^3} \frac{f}{t} ds \right] \\ &\quad - \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{Q_Y}{J_X t} \left[g_X - \int \frac{1}{\rho^3} \frac{g_X}{t} ds \right] \\ &\quad - \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{Q_X}{J_Y t} \left[g_Y - \int \frac{1}{\rho^3} \frac{g_Y}{t} ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{Q_X}{J_Y t} \left[g_Y - \int \frac{1}{\rho^3} \frac{g_Y}{t} ds \right] \\
& -\frac{R_s^2}{\rho^2} \frac{T_{\omega}^*}{C_{\omega}^* t} \left[g_{\omega}^* - \int \frac{1}{\rho^3} \frac{g_{\omega}^*}{t} ds \right] \\
& \dots\dots\dots(146)
\end{aligned}$$

なお、任意な形をした多室断面についても、以上と同様な方法で τ_s の算式を求めることができる。また開いた断面が結合している場合には、開いた断面の部分に対しては、 $a_{kj}=0$ として計算すればよい。したがって、式(134)、(135)はそれぞれ式(142)、(144)の特別な場合と考えることもできる。

(3) St. Venant のねじれによるせん断応力

a) 開いた断面 断面上に任意に選んだ定点 D をねじりの中心とした St. Venant のねじりによるせん断応力は、式(21)より

$$\begin{aligned}
\tau_s &= G \psi_z \left[\frac{R_0}{\rho} \bar{r}_s - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \right] \\
\tau_n &= G \psi_z \left[\frac{R_D}{\rho} \bar{r}_n - \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) \right]
\end{aligned} \dots\dots\dots(147)$$

一方、応力のつり合い式は式(130)において、 $\sigma_\theta=0$ であるから、

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho^2 \tau_s) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho^2 \tau_n) = 0 \dots\dots\dots(148)$$

ここで、

$$\tau_s = \frac{R_D^2}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad \tau_n = -\frac{R_D^2}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \dots\dots\dots(149)$$

で表わされるようなねじれに関する応力関数 Φ を導入する¹⁰⁾。式(149)に式(148)を常に満たしている。

さて、式(147)から $\bar{\omega}$ を消去し、式(149)を考慮すると、曲線材のねじりに関する応力関数 Φ を定める偏微分方程式がつぎのように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) = \frac{2}{\rho^3} G \psi_z \dots\dots\dots(150)$$

薄肉断面に対しては

$$\tau_n = -\frac{R_D^2}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \approx 0$$

であるから、 Φ の微分方程式は

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{d\Phi}{dn} \right) = \frac{2}{\rho^3} G \psi_z \dots\dots\dots(151)$$

となる。式(151)を境界条件

$$n = \pm \frac{t}{2} \text{ で } \Phi = 0$$

のもとに解くと

$$\Phi = G \psi_z \left[n^2 - \left(\frac{t}{2} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(152)$$

したがって、(152)、(159)の両式より τ_s の分布がつぎのように求まる。

$$\tau_s = \frac{R_D^2}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 2 \frac{R_D^2}{\rho^2} G \psi_z n \dots\dots\dots(153)_a$$

あるいは、式(92)_aを用いると

$$\tau_s = 2 \frac{R_D^2}{\rho^2} \frac{T_{zS}}{J_{TD}} n \dots\dots\dots(153)_b$$

中立点およびせん断中心をねじりの中心とした場合はそれぞれつぎのようになる；

中立点をねじりの中心とした場合：

$$\tau_s = 2 \frac{R_0^2}{\rho^2} G \psi_z n = 2 \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{T_{zS}}{J_T} n \dots\dots\dots(154)$$

せん断中心をねじりの中心とした場合：

$$\tau_s = 2 \frac{R_s}{\rho^2} G \psi_z^* n = 2 \frac{R_s}{\rho^2} \frac{T_{zS}^*}{J_T^*} n \dots\dots\dots(155)$$

b) 閉じた断面 閉じた断面の場合の St. Venant

のねじりによるせん断応力 τ_s については、(29)、(31)の両式から直接につぎのように表わすことができる。

$$\tau_s = \frac{q_{D,k}}{t} = \frac{R_D^2}{\rho^2} \cdot \frac{\check{q}_k}{t} G \psi_z \dots\dots\dots(156)_a$$

あるいは、式(92)_aを用いて

$$\tau_s = \frac{R_D^2}{\rho^2} \cdot \frac{T_{zS}}{J_{TD}} \cdot \frac{\check{q}_k}{t} \dots\dots\dots(156)_b$$

ここに、 \check{q}_k は k 室に属するねじり関数を表わし、式(32)、(37)によって定められる。

一室閉断面に対しては、(37)、(49)_dの両式を考慮して、

$$\tau_s = \frac{T_{zS}}{t \rho^2 \oint \frac{1}{\rho^2} \bar{r} ds} \dots\dots\dots(157)$$

となる。

式(156)、(157)は断面上の任意な定点 D をねじりの中心とした場合の式であるが、中立点およびせん断中心に関してはそれぞれつぎのようになる。

中立点をねじりの中心とした場合：

$$\tau_s = \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{\check{q}_k}{t} G \psi_z = \frac{R_0^2}{\rho^2} \frac{T_{zS}}{J_T} \cdot \frac{\check{q}_k}{t} \dots\dots\dots(158)$$

$$\tau_s = \frac{T_{zS}}{t \rho^2 \oint \frac{1}{\rho^2} r ds} \text{ (一室閉断面)} \dots\dots\dots(159)$$

せん断中心をねじりの中心とした場合：

$$\tau_s = \frac{R_s^2}{\rho^2} \frac{\check{q}_k}{t} G \psi_z^* = \frac{R_s^2}{\rho^2} \frac{T_{zS}^*}{J_T^*} \frac{\check{q}_k}{t} \dots\dots\dots(160)$$

$$\tau_s = \frac{T_{zS}^*}{t \rho^2 \oint \frac{1}{\rho^2} r^* ds} \text{ (一室閉断面)} \dots\dots\dots(161)$$

\check{q}_k はねじりの中心には無関係である (4. 参照)。

9. 結 語

最近のように構造物が大型化してくると、死荷重効果の意味あいから、材料の強度をぎりぎりのところまで利用することが、経済設計のキーポイントとなってきた。そのため、ますます精度の高い構造計算が要求されるよ

うになり、部材の中心線に断面の力学量が集中しているとみなす、いわゆる棒の力学から脱脚し、断面のひろがり を考慮したより忠実な解析が今日の構造理論を形成しつつある。

本文は構造物の複雑化にともない、その利用度の増大をみている曲線材について、従来行なわれてきたような薄肉直線材の理論をそのまま準用する近似的な取り扱いから一步前進して、より厳密な解析を試みたものである。もちろん、ここではそのもっとも基本的な静力学的事項を取り扱ったにすぎず、さらにこのような部材の動力学的問題、弾性安定問題、終局耐力の問題などの理論的、実験的解明は、今後の研究にまたねばならないと思う。

なお、本文の冒頭において指摘したように、筆者はこの種の問題を扱った既発表の論文^{5),6)}に対して、いくつかの点で疑問をいただいている。本文に示した計算結果と比較対照されての読者諸賢のご批判がいただければ幸甚とするところである。

おわりに、常日頃よりご指導、ご援助をいただいている東大工学部平井教授をはじめ、奥村教授、伊藤助教授の三先生に心から感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Wagner, H. & Pretshner, W.: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Luftfahrt-Forschung, Band 11, 1934.
- 2) Bleich, F. & H.: Biegung, Drillung und Knickung von Stäben aus dünnen Wänden, Prelim. Pub. I.A.B. S.E., 1936.
- 3) Kappus, R.: Drillknicken zentrisch gedrückten Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich, Luftfahrt-Forschung, Band 14, 1937.
- 4) Bleich, F. & H.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952, p. 116.
- 5) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線材の基礎理論, 土木学会論文集, 第 87 号, 昭和 37.11.
- 6) 倉西 茂: 一般薄肉曲りばりの解析, 東北大橋梁研究室報告, 第 12 号, 昭和 38.4, ならびに土木学会論文集, 第 108 号, 昭和 39.8.
- 7) 小西・小松: 土木学会論文集, 第 90 号, 91 号および小松: 土木学会論文集, 第 93 号.
- 8) 深沢泰晴: 薄肉多角断面の曲りばりの曲げねじれ理論, 東大橋梁研究室報告, 第 123 号, 昭和 38.12.
- 9) Cheney, J.A.: Bending and Buckling of Thin-Walled Open-Section Rings, Proc. of A.S.C.E., EM 5, Oct. 1963.
- 10) 倉西正嗣: 弾性学, 日本機械学会, 昭和 23.12, p. 50, p. 236.
- 11) Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, Heft 1, 1952.

(1964.4.8・受付)

昭和39年度土木学会論文集編集委員

委員長	奥村敏恵	副委員長	三木五三郎	委員	土肥正彦	委員	宮原克典
委員	阿部津敏	委員	岡田宏	〃	中川博	〃	村上博
〃	粟津清	〃	神山光	〃	中瀬明	〃	森上良
〃	伊藤井浩	〃	小寺重	〃	中西沢紀	〃	山村和
〃	伊藤藤喜	〃	佐武正	〃	伯野元	〃	山崎慶
〃	石原昌行	〃	鈴木雄	〃	藤田嘉	〃	山崎慶
〃	池守昌一	〃	曾根大	〃	堀田孝	〃	横沢周
〃	江崎元	〃	多田宏	〃	増口重	幹事	西脇威
〃	大沼徹	〃	津野和	〃	松本嘉	夫	

昭和39年10月15日印刷
昭和39年10月20日発行

土木学会論文集 第110号

定価 150円(〒20円)

編集兼発行者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人 土木学会 羽田 巖
印刷者 東京都港区赤坂溜池5 株式会社 技報堂 大沼正吉

発行所 社団法人 土 木 学 会 振替東京 16828 番
東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷一丁目 電話(351)代表 5138 番