

# 一柱式橋脚の振動解析と耐震性に関する研究\*

## STUDIES ON VIBRATION ANALYSIS OF SINGLE PEDESTAL-TYPE BRIDGE PIERS AND THEIR EARTHQUAKE RESISTANCE

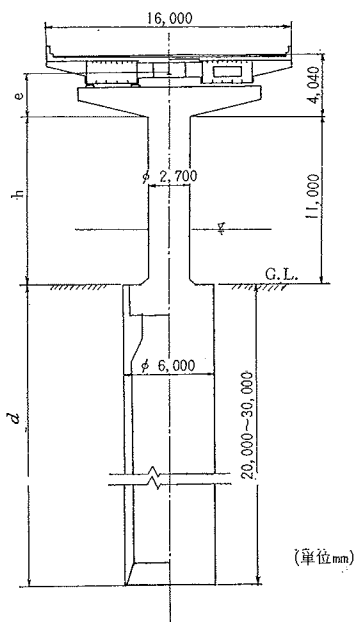
後藤 尚 男\*\*・亀田 弘 行\*\*\*

By Hisao Goto and Hiroyuki Kameda

### 1. まえがき

本研究は、いわゆる一柱式橋脚の振動性状を理論的に取り扱い、これよりその耐震性を明らかにするための一資料を提供しようとしたものである。ここにいう一柱式橋脚とは、周知のように図-1、図-2などにみるように比較的細い1本の脚柱で、かなり幅の広い上部構造を支持する橋脚のことである。このような一柱式橋脚は、

図-1 一柱式橋脚の一实例  
(阪神高速道路公園大阪1号線)



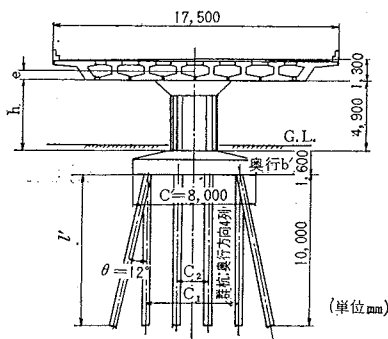
その建設用地が少なくすみ、また既設街路のグリーンベルトや水路などを利用して建設できるなど、土地利用がかなり有利に行なえるので、地価の非常に高い大都市内における高架橋などの下部構造として、最近わが国でも採用され始めている。

かかる一柱式橋脚をわが国で採用するに際しては、その形状全体がトップヘビーであることから、耐震計算に従来から慣用されてきた震度法をそのまま適用することが、妥当でなくなる可能性が大きいと推察される。すなわち一柱式橋脚は比較的たわみやすい構造であるため、その固有振動周期、特に橋軸に直角な水平方向のそれがかなり大きくなり、地震周期と相接近する危険性も十分ありうるであろう。またそれゆえに、震度法が不適な場合もありうると思われる。

このような見地から、この研究では、一柱式橋脚の振

動性状を理論的に取り扱いこれによってその耐震性を明らかにしようとするものであるが、振動解析に際しては、上・下部両構造の水平振動のみならず、それらの回転振動も、振動効果に大きな影響をおよぼすものと考えて、並進と回転にもとづく連成振動系として取り扱った。杭打基礎の場合については、著者の一人がその一部をすでに報告したが<sup>1),2)</sup>、さらに他の一人が井筒基礎の場合をも解析し、しかも前者は後者の特殊な場合として説明できたので、かかる観点より本文を記述しようとするものである。

図-2 一柱式橋脚の一試案例



### 2. 一柱式橋脚の振動モデル

#### (1) 基本仮定および振動モデルの設定

図-1および図-2のような、井筒基礎または杭打基礎(フーチングおよび群杭)を有する一柱式橋脚の振動モデルを考案するために、つぎのような基本仮定を設けた。

- 1) 振動の方向は、橋軸に直角かつ水平方向とする。
- 2) 構造物各部のたわみないしは変位量は微小振動の範囲であるとする。
- 3) 上部構造・井筒またはフーチングは、質量の分布した剛体とみなす。
- 4) 橋脚躯体は、上部構造および基礎工に剛結されているとし、橋脚自身の自重を一応無視する。
- 5) 橋脚1基には、上部構造1スパン分の自重が載荷されるとみなす。
- 6) 上部構造の橋軸まわりのねじれによる影響は考えない。
- 7) 構造物は、基礎工と地盤により、鉛直・水平両方向いずれにも弾性的に支持されているとみなす。

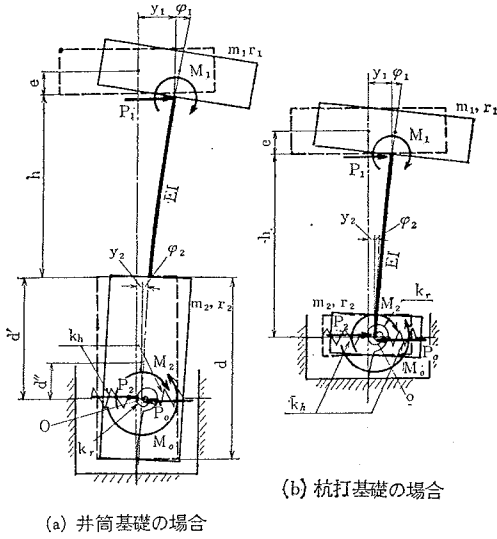
図-3は、以上の各仮定にもとづいて得られた連成振

\* 第18回土木学会年次学術講演会(昭.38.5.25)において一部を発表[講演番号 I-70].

\*\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

\*\*\* 学生会員 京都大学大学院 土木工学専攻

図-3 連成振動モデル

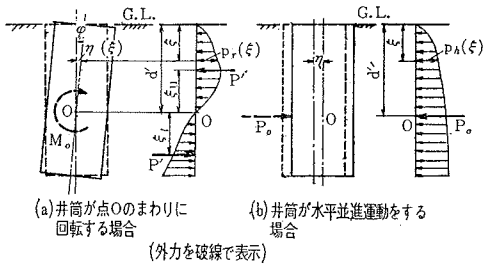


(a) 井筒基礎の場合

(b) 杭打基礎の場合

動モデルであって、いずれも上部構造および基礎工の水平並進  $y_1, y_2$  と回転  $\varphi_1, \varphi_2$  の両運動が連成した、いわゆる4自由度系であって、上部構造および基礎工(井筒またはフーチング)は、質量の分布した剛体、橋脚は質量を無視した板バネで表示されている。図-3(a)は、井筒基礎を有する場合の振動モデルであるが、ここで点O(図-4参照)は、井筒躯体が回転モーメントのみを受けた場合の回転中心である。しかもこの点Oは同時にまた井筒が水平方向に並進運動をする場合における水平地盤反力の合力の作用点に一致することが図-4から諒解される。同図において井筒上端から点Oまでの深さ  $d'$  は、水平力およびモーメントのつりあい式から次式によって求められる。

図-4 井筒の回転・並進運動による水平地盤反力



(a) 井筒が点Oのまわりに回転する場合  
(外力を破線で表示)

(b) 井筒が水平並進運動する場合

$$d' = \int_0^d p(\xi) \xi d\xi / \int_0^d p(\xi) d\xi = \int_0^d K(\xi) \xi d\xi / \int_0^d K(\xi) d\xi \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $d$  は井筒の全長、 $p(\xi), K(\xi)$  は井筒の上端からの深さ  $\xi$  における水平地盤反力および基礎地盤の水平地盤係数をそれぞれ表わしている。

また一方、図-3(b) はすでに報告した杭打ち基礎を有する場合の振動モデル<sup>2)</sup> を示しており、杭と基礎地盤

はバネで表示されているが、これは 図-3(a) において、 $d' \rightarrow 0$  とおいた場合に相当するものである。

かくして基礎地盤(杭を含む)はその弾性のみを考えるかぎり、つぎの(2)で求まるバネ定数  $k_h$  と  $k_r$  を点Oに取り付けたモデルで、表示することができることになる。

(2) 基礎地盤のバネ定数  $k_r, k_h$  の算出

図-3の振動モデルにおいて基礎地盤の弾性を表わすバネ群、すなわち回転バネ定数  $k_r$  と水平バネ定数  $k_h$  についての算定式を以下に導く。

a) 井筒基礎の場合

まず、図-4(a)のように、井筒が点Oを中心として回転した場合、井筒上端からの深さ  $\xi$  における井筒の水平変位量を  $\eta(\xi)$ 、井筒の回転角を  $\varphi$  とし、かつ  $\varphi$  が小さいとすれば、

$$\eta(\xi) = (d' - \xi) \tan \varphi \approx (d' - \xi) \varphi$$

したがって、井筒上端からの深さ  $\xi$  における水平地盤反力  $p_r(\xi)$  は、

$$p_r(\xi) = b \cdot K(\xi) \cdot \eta(\xi) = b \cdot K(\xi) \cdot (d' - \xi) \varphi \dots \dots (2)$$

ここに  $b$  は、井筒の振動に直角方向の幅、すなわち奥行を表わしている。

図-4(a)においては、井筒に作用する外力は回転モーメントのみであるので、 $\Sigma H=0$  より、水平地盤反力の総和は0でなければならない。すなわち、点A、O間および点B、O間に働く水平地盤反力の合力は偶力となり、その大きさ  $P'$  は、明らかに、

$$P' = \int_0^{d'} p_r(\xi) d\xi = - \int_0^d p_r(\xi) d\xi = b \varphi \int_0^{d'} K(\xi) (d' - \xi) d\xi$$

また偶力をなすこれら2つの合力の作用点と、点Oとの間の距離をそれぞれ  $\xi_u, \xi_l$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} \xi_u &= d' - \int_0^{d'} p_r(\xi) \xi d\xi / P' \\ &= d' - \int_0^{d'} K(\xi) (d' - \xi) \xi d\xi / \int_0^{d'} K(\xi) (d' - \xi) d\xi \\ \xi_l &= -d' + \int_0^d p_r(\xi) \xi d\xi / P' \\ &= -d' + \int_0^d K(\xi) (d' - \xi) \xi d\xi / \int_0^{d'} K(\xi) (d' - \xi) d\xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

これより、 $p_r(\xi)$  による点Oのまわりのモーメント  $M_0$  は、

$$M_0 = P' (\xi_u + \xi_l) = b \varphi (\xi_u + \xi_l) \int_0^{d'} K(\xi) (d' - \xi) d\xi$$

したがって、回転バネ定数  $k_r$  は次式で与えられる。

$$k_r = \frac{M_0}{\varphi} = b (\xi_u + \xi_l) \int_0^{d'} K(\xi) (d' - \xi) d\xi \dots (4)$$

つぎに、図-4(b)のように井筒が水平方向に並進運動をする場合には、 $\eta(\xi)$  は  $\xi$  にかかわらず一定であるから、 $\eta(\xi) = \eta$  とすれば、水平地盤反力  $p_h(\xi)$  は、

$$p_h(\xi) = bK(\xi)\eta \dots \dots \dots (5)$$

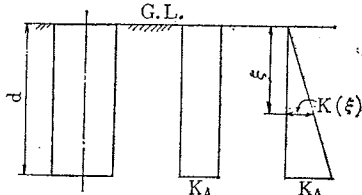
となる。また水平地盤反力  $p_h(\xi)$  の合力は、前述のように、 $\xi=d'$  なる点Oに作用し、その大きさ  $P_0$  は、

$$P_0 = \int_0^d p_h(\xi) d\xi = b\eta \int_0^d K(\xi) d\xi$$

したがって、水平バネ定数  $k_h$  は次式で与えられる。

$$k_h = \frac{P_0}{\eta} = b \int_0^d K(\xi) d\xi \dots \dots \dots (6)$$

図-5 水平地盤係数分布の仮想例



(a) 等分布 (b) 三角形分布

かくして  $K(\xi)$  分布がわかれば、式 (1)、式 (3)、式 (4) および式 (6) より  $k_r$  および  $k_h$  が算出される。いま便宜上  $K(\xi)$  が 図-

表-1 バネ深さおよびバネ定数

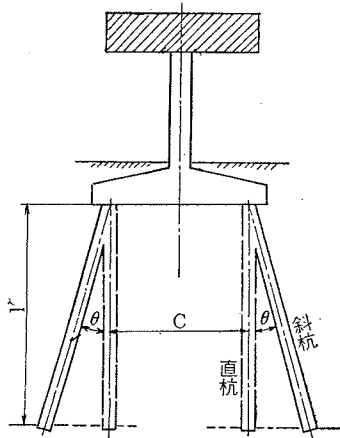
水平地盤係数	(a)	(b)
	等分布	三角形分布
$d'$	$d/2$	$2d/3$
$k_r$	$bd^2K_A/12$	$bd^2K_A/36$
$k_h$	$bdK_A$	$bdK_A/2$

5 のように等分布と三角形分布をなす場合の2つの例について  $k_r, k_h$  を計算すると、表-1 の結果が得られる。

**b) 杭打基礎（フーチングと群杭）の場合** 図-2

のような杭打基礎のバネ定数  $k_r, k_h$  に関しては、著者の一人がすでに基本式を誘導し、地盤の剛性と杭の曲げ抵抗を考慮した場合の  $k_h^{(1),(2)}$ 、杭の曲げ剛性と杭体への水平地盤反力を無視し、群杭が図-6 のようなトラス状骨組をなすものとみなした場合の  $k_r, k_h^{(1),(2)}$  の算定式をも発表してきた。これらのうち、後者は、先端支持杭に対して比較的よく適用するものと考えられる。なお前者については、文献 3) の土木学会論文集 79 号にすでに詳述しているので、ここでは後者について 図-2 の場合を対象として求めた結果のみを示せばつぎのとおりである。

図-6 組杭基礎のモデル表示



ここに、 $k_r(s)$  はフーチングに対する基礎地盤の回転バ

$$\left. \begin{aligned} k_r &= k_r(s) + k_r(p) \\ k_r(s) &= b'c^2K_v/12 \\ k_r(p) &= (E_s'a'/l') \{ (1 + \cos^3 \theta)c_1^2 + 2c_2^2 \} \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

ネ定数、 $k_r(p)$  は群杭の回転バネ定数、 $K_v$  はフーチング底面における基礎地盤の鉛直方向地盤係数、 $E_s'$  は基礎杭のヤング率、 $l'$  は鉛直杭の長さ、 $\theta$  は振動面内における斜杭の傾斜角、 $a'$  は基礎杭1本の断面積を示す。また  $b'$  はフーチングの奥行、 $c', c_1, c_2$  については 図-2 を参照されたい。

$$\left. \begin{aligned} k_h &= k_h(s) + k_h(p) \\ k_h(s) &= b'c'K_h \\ k_h(p) &= (4E_s'a'/l') \sin^2 \theta \cos \theta / \{ 1 + (\cos^3 \theta)/3 \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

ここに、 $k_h(s)$  はフーチングに対する基礎地盤の水平バネ定数、 $k_h(p)$  は群杭の水平バネ定数、 $K_h$  はフーチング底面における基礎地盤の水平方向地盤係数を表わす。

**3. 水平連成振動の理論解析**

図-3 の2種の連成振動モデルのうち、図-3 (b) は図-3 (a) において  $d, d' \rightarrow 0$  なる特殊な場合として与えられるので、まず一般的な図-3 (a) の井筒基礎の場合について振動解析を行ない、しかるのち図-3 (b) の場合、さらに2,3の単純化した特別の場合について考察を進める。

(1) 自由振動

a) 井筒基礎の場合：4自由度系 図-3 (a) において、まず力のつりあい条件は、

$$\left. \begin{aligned} \sum H &= 0 : P_0 = P_1 + P_2 \\ \sum M &= 0 : M_0 = M_1 + M_2 + (h+d')P_1 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

で与えられる。ここに、 $P_1$  は上部構造の運動により橋脚頂部に働く水平力、 $P_2$  は基礎工の運動により点Oに働く水平力、 $P_0$  は井筒の並進運動に対する基礎地盤の反力の合力、 $M_1$  は上部構造の運動により橋脚頂部に作用する曲げモーメント、 $M_0$  は井筒の運動による点Oのまわりのモーメント、 $M_2$  は井筒の回転運動に対して井筒に働く水平地盤反力による点Oのまわりのモーメントを、それぞれ表わす。

つぎに力と変形のつりあい条件は、下記の式 (10) で表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_2 + (h+d')\varphi_2 + P_1h^2/3EI + M_1h^2/2EI \\ \varphi_1 &= \varphi_2 + P_1h^2/2EI + M_1h/EI \\ k_h y_2 &= P_0, \quad k_r \varphi_2 = M_0 \end{aligned} \right\} (10)$$

ここに、 $y_1$  および  $y_2$  はそれぞれ上・下部両構造の水平並進変位、 $\varphi_1$  および  $\varphi_2$  はそれぞれ上・下部両構造の回転角を表わす。

さらに、上・下部両構造の運動方程式はつぎの式 (11) で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -m_1(\ddot{y}_1 + e\ddot{\varphi}_1), \quad P_2 = -m_2(\ddot{y}_2 + d''\ddot{\varphi}_2) \\ M_1 &= -m_1r_1^2\ddot{\varphi}_1 + P_1e = -m_1\{e\ddot{y}_1 + (e^2 + r_1^2)\ddot{\varphi}_1\} \\ M_2 &= -m_2r_2^2\ddot{\varphi}_2 + P_2d'' = -m_2\{d''\ddot{y}_2 + (d''^2 + r_2^2)\ddot{\varphi}_2\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 $m_1$  は上部構造1連の質量、 $m_2$  は基礎躯体1基の質量、 $r_1$  および  $r_2$  はそれぞれ上部構造および基礎躯体の橋軸方向重心軸のまわりの回転半径 ( $r^2 = J_G/m$ ;  $J_G$  は重心軸のまわりの慣性能率、 $m$  は質量)、 $e$  は橋脚頂部と上部構造重心との鉛直距離、 $d''$  は点Oと基礎躯体重心との鉛直距離をそれぞれ表わしている。なおこの場合、橋脚躯体の質量を、適宜  $m_1$  と  $m_2$  に換算付加させることも考えられる。

さて、式(9)および式(10)から  $P_0, M_0$  を消去しさらに  $P_1, M_1, P_2, M_2$  を求めて式(11)に代入して整理すれば結局自由振動の微分方程式がつぎのように得られる。

$$M\ddot{y} + Ky = 0 \dots\dots\dots(12)$$

ここに、

$$M = \begin{pmatrix} m_1, & 0, & m_1e, & 0 \\ 0, & m_2, & 0, & m_2d'' \\ m_1e, & 0, & m_1(e^2+r_1^2), & 0 \\ 0, & m_2d'', & 0, & m_2(d''^2+r_2^2) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{hp}, & -k_{hp}, & -\frac{k_{hp}h}{2}, & -\frac{k_{hp}l}{2} \\ -k_{hp}, & (k_h+k_{hp}), & \frac{k_{hp}h}{2}, & \frac{k_{hp}l}{2} \\ -\frac{k_{hp}h}{2}, & \frac{k_{hp}h}{2}, & k_{rp}, & \left(\frac{3l}{h}-1\right)\frac{k_{rp}}{4} \\ -\frac{k_{hp}l}{2}, & \frac{k_{hp}l}{2}, & \left(\frac{3l}{h}-1\right)\frac{k_{rp}}{4}, & \left\{k_r + \left(1 + \frac{3l^2}{h^2}\right)\frac{k_{rp}}{4}\right\} \end{pmatrix} \dots\dots(14)$$

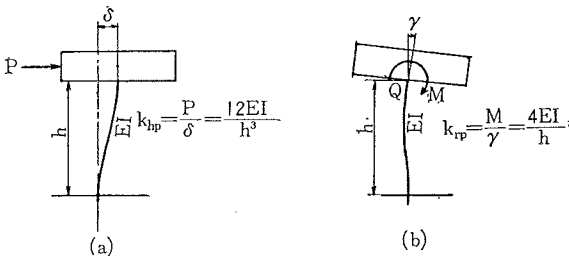
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

ただし、

$$l = 2d' + h, \quad k_{hp} = 12EI/h^3, \quad k_{rp} = 4EI/h \dots\dots(16)$$

ここに  $k_{hp}$  は、図-7(a)のように、上部構造および基礎を回転させることなく、両者の間に単位長さの相対水平変位を与えるのに要する水平力、 $k_{rp}$  は、図-7(b)のように、基礎を固定したまま、上部構造を点Qのまわりに単位角だけ回転させるのに要するモーメントをそれぞれ表わしており、上部構造の水平並進および回転に対するバネ定数ともいうべきものである。また対称行列  $M, K$  の作る2次形式は明らかに正値である。

図-7  $k_{hp}, k_{rp}$  の説明図



ここで 図-3 の系の固有振動数を  $n$  として、式(12)の解を、

$$y = y_0 \cos nt = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \end{pmatrix} \cos nt$$

とすれば、

$$\ddot{y} = -n^2 y_0 \cos nt$$

となり、これらを式(12)に代入することによって、周知のように、振動数方程式がつぎの固有方程式として得られる。

$$\det(n^2 M - K) = 0 \dots\dots\dots(17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{または、} \det(n^2 E - H) = 0 \\ \text{ただし、} H = M^{-1}K \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17')$$

**b) 杭打基礎の場合(I): 4自由度系** 図-3(b)

においては、 $d, d', d'' \rightarrow 0$  であるから、式(16)より  $l=h$ 。したがって、 $d''=0, l=h$  を式(13), (14)に代入して得られる  $M, K$  を式(17)または式(17')に用いた結果が、杭打基礎に対する固有振動数方程式を与える(ただしバネ定数は式(7), (8)などを使用)。

**c) 井筒基礎の場合(II): 2自由度系** 図-3(a)

の振動モデルにおいて、基礎躯体の質量  $m_2$  が上部構造の質量  $m_1$  に比較して振動効果上かなり小さいか、または基礎地盤のバネ定数  $k_r, k_h$  がかなり大きい場合には、 $m_2 \rightarrow 0$  とおいてその振動を2自由度として取り扱っても、これから得られる1次および2次の固有振動数の値は、上述のような4自由度系としての計算結果と大きな差はないものと推察される。このような場合には、式(11)において  $m_2=0$ 、したがって  $P_2=M_2=0$  となるので、計算がかなり簡単となる。この場合の独立変数を  $y_1, \varphi_1$  に選び、4自由度系の場合と同様の演算を行なうと、自由振動の微分方程式(12)に対する  $M, K, y, \dot{y}$  がつぎの形として求まる。すなわち、

$$M = \begin{bmatrix} m_1, & m_1e \\ m_1e, & m_1(e^2+r_1^2) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{k_r} + \frac{h}{EI}\right)A_1, & -\left(\frac{h+d'}{k_r} + \frac{h^2}{2EI}\right)A_1 \\ -\left(\frac{h+d'}{k_r} + \frac{h^2}{2EI}\right)A_1, & \left\{\frac{1}{k_h} + \frac{(h+d')^2}{k_r} + \frac{h^3}{3EI}\right\}A_1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}$$

ただし、

$$A_1 = \begin{vmatrix} \left\{\frac{1}{k_h} + \frac{(h+d')^2}{k_r} + \frac{h^3}{3EI}\right\}, & \left(\frac{h+d'}{k_r} + \frac{h^2}{2EI}\right) \\ \left(\frac{h+d'}{k_r} + \frac{h^2}{2EI}\right), & \left(\frac{1}{k_r} + \frac{h}{EI}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \det K$$

これらの関係を式 (12) に用いた結果は  $n^2$  に関する 2 次方程式となり、この場合の 1 次, 2 次の固有振動数  $n_1, n_2$  を求める式が容易に次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} 1/n_1^2 \\ 1/n_2^2 \end{aligned} \right\} = \frac{m_1}{2} (B \pm \sqrt{B^2 - 4C}) \dots\dots\dots(18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} B &= 4\alpha_1(1+3\beta_1+3\beta_2^2) \\ &\quad + \alpha_2 + \alpha_3(2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \\ C &= (\beta_2^2 - \beta_1^2) \{12\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 \\ &\quad + 4\alpha_1\alpha_3(1-3\beta_2+3\beta_3^2) + \alpha_2\alpha_3\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 1/k_{hb} = h^2/3k_{rp} = h^3/12EI, \quad \alpha_2 = 1/k_h, \quad \alpha_3 = h^2/k_r \\ \beta_1 &= e/h, \quad \beta_2 = \sqrt{e^2 + r_1^2}/h, \quad \beta_3 = 1 + d'/h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

e) 杭打基礎の場合 (II) : 2 自由度系 c) と同様に杭打基礎についてもフーチングの質量  $m_2$  を振動上無視できて  $m_2=0$  とおける場合には、式 (20) において  $d'=0$ , すなわち式 (19) において  $\beta_3=1$  とおけばよくこれを用いて式 (18) から  $n_1$  および  $n_2$  を算出できる。

f) 橋脚下端完全固定の場合 : 2 自由度系 基礎地盤がきわめて強固で、かつ基礎工が完全に地盤中に埋め込まれている場合には、橋脚下端は基礎地盤に剛結されているとみなされ、この場合には基礎地盤のバネ定数が無限大になるものと考えてよい。すなわち式 (20) で  $k_h, k_r \rightarrow \infty$ , したがって式 (19) で  $\alpha_2, \alpha_3 \rightarrow 0$  において得られる次式の結果を式 (18) に用いればよい。

$$B = 4\alpha_1(1+3\beta_1+3\beta_2^2), C = 12\alpha_1^2(\beta_2^2 - \beta_1^2) \dots\dots(21)$$

(2) 強制振動

強制振動の最も簡単な場合として単弦地動

$$x = a_0 \cos pt \dots\dots\dots(22)$$

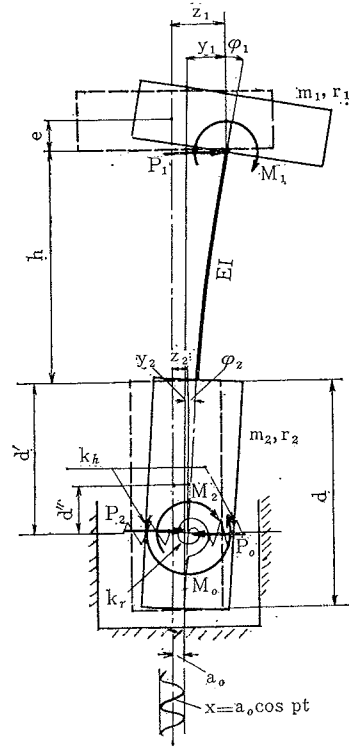
が作用する状態における一柱式橋脚の振動性状について、自由振動解析で行なったのと同様の順序にしたがって解析を進める。いうまでもなく、実際の地震動は式 (22) のような簡単な形のものでなく、非常で複雑な波形を呈するので、それらに対する応答解析は引き続き研究することにして、ここでは研究の第 1 段階として、式 (22) による定常的な強制振動を取り扱うことにする。

a) 井筒基礎の場合 (I) : 4 自由度系 図-3 (a) に式 (22) の地動が作用する場合の振動モデルは 図-8 のように表示される。この場合にも、つりあい条件式 (9) および変形条件式 (10) がそのまま成り立つ。一方、運動方程式 (11) においては、図-8 からわかるように、式 (11) における  $y_1, y_2$  をそれぞれ  $z_1, z_2$  で置き換えればよく、かつ  $z_1 = y_1 + x, z_2 = y_2 + x$  であるから、図-8 に対する上・下部両構造の運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -m_1(\ddot{y}_1 + \ddot{x} + e\ddot{\phi}_1), \quad P_2 = -m_2(\ddot{y}_2 + \ddot{x} + d''\ddot{\phi}_2) \\ M_1 &= -m_1\{e(\ddot{y}_1 + \ddot{x}) + (e^2 + r_1^2)\ddot{\phi}_1\} \\ M_2 &= -m_2\{d''(\ddot{y}_2 + \ddot{x}) + (d''^2 + r_2^2)\ddot{\phi}_2\} \end{aligned} \right\}$$

前節 (1) a) と同様に、式 (9), (10) から  $P_1, P_2, M_1, M_2$  を求めて式 (23) に代入すれば、強制振動の微分方程式がつぎのように得られる。

図-8 連成振動モデル (強制振動)



$$M\ddot{y} + Ky = -M\ddot{x} \dots\dots\dots(24)$$

ここに  $M, K, y, \ddot{y}$  は、それぞれ式 (13), (14), (15) で与えられ、 $x, \ddot{x}$  はつぎのように表わされる。

$$x = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \cos pt \\ a_0 \cos pt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_0 \cos pt$$

ただし、

$$x_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\ddot{x} = -p^2 x_0 \cos pt$$

ここで式 (24) の解を、

$$y = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{pmatrix} \cos pt = y_0 \cos pt \dots\dots\dots(25)$$

とすれば、

$$\ddot{y} = -p^2 y_0 \cos pt$$

となり、以上を式 (24) に用いれば、4 個の定常振幅を

求める方程式がつぎのように得られる。

$$(p^2 M - K)y_0 = -p^2 Mx_0 \dots\dots\dots(26)$$

式(25)は、結局  $y_{10}$ ,  $y_{20}$ ,  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{20}$  に関する4個の連立1次方程式である。

つぎに、式(23)において、

$$[P_1, P_2, M_1, M_2] = [P_{10}, P_{20}, M_{10}, M_{20}] \cos pt$$

とおけば、式(23), (26)から、橋脚に生ずる各断面力の定常振幅をつぎの式によって算出することができる。

$$\left. \begin{aligned} P_{10} &= m_1 a_0 p^2 (1 + y_{10}/a_0 + \beta_1 h \varphi_{10}/a_0) \\ M_{10} &= m_1 a_0 p^2 h \{ \beta_2^2 h \varphi_{10}/a_0 + \beta_1 (1 + y_{10}/a_0) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(27)$$

ここに  $P_{10}$  は橋脚躯体のせん断力,  $M_{10}$  は橋脚頂部の曲げモーメントのそれぞれ定常振幅を与えている。

また式(27)を、水平震度  $k_0 = a_0 p^2/g$  を用いて表わすと、

$$\left. \begin{aligned} P_{10} &= k_0 W_1 (1 + y_{10}/a_0 + \beta_1 h \varphi_{10}/a_0) \\ M_{10} &= k_0 W_1 h \{ \beta_2^2 h \varphi_{10}/a_0 + \beta_1 (1 + y_{10}/a_0) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(27')$$

ここに  $W_1 = m_1 g$  は、上部構造1スパン分の重量である。さらに橋脚下端、基礎躯体との節点の曲げモーメントを  $M_{30}$  とすると、明らかに、

$$M_{30} = M_{10} + P_{10} h \dots\dots\dots(28)$$

つぎに、井筒基礎に作用する最大水平地盤反力を求める式を導く。すなわち、式(2)において  $\varphi = \varphi_{20}$ , 式(5)において  $\eta = y_{20}$  とおけば、井筒に対する水平地盤反力の定常振幅  $p_0(\xi)$  は、容易につぎの形で書ける。

$$\begin{aligned} p_0(\xi) &= [p_r(\xi)]_{\varphi=\varphi_{20}} + [p_h(\xi)]_{\eta=y_{20}} \\ &= bK(\xi) \{ (d' - \xi)\varphi_{20} + y_{20} \} \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{d}{d\xi} p_0(\xi) = 0 \dots\dots\dots(30)$$

とおいて、これを  $\xi$  について解いた解を式(29)に代入し、そのうち最大のものを  $p_0 \max$ , それに対応する式(30)の解  $\xi$  の値を  $d_0$  とすれば、 $p_0 \max$  が求める最大地盤反力を与える。

$$p_0 \max = p_0(d_0) \dots\dots\dots(31)$$

いま 図-5 (b) の場合について式(29)を計算すると、

$$p_0(\xi) = bK_A \cdot \frac{\xi}{d} \left\{ \left( \frac{2}{3} d - \xi \right) \varphi_{20} + y_{20} \right\} \dots\dots(32)$$

したがって、 $d_0$  および  $p_0 \max$  は次式のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \frac{d}{3} + \frac{1}{2} \frac{y_{20}}{\varphi_{20}} = \frac{1}{2} \left\{ (\beta_3 - 1)h + \frac{y_{20}}{\varphi_{20}} \right\} \\ p_0 \max &= \frac{bK_A}{4d\varphi_{20}} (y_{20} + d'\varphi_{20})^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(33)$$

**b) 杭打基礎の場合 (I) : 4自由度系** 式(13), (14)において、本節 3. (1) b) と同様に、 $d''=0, l=h$  として  $M, K$  を求め、それらを式(26)に用いれば、図-3(b)の杭打基礎の場合に対する定常解が得られる。

**c) 井筒基礎の場合 (II) : 2自由度系** 本節 3. (1) c) と同様に、井筒の質量を無視して2自由度系にする場合には、方程式(26)の未知量の中で独立なものは2

個となる。これをいま  $y_{10}$  および  $\varphi_{10}$  に選ぶと、

$$\left. \begin{aligned} y_{10} &= m_1 a_0 p^2 (-m_1 C p^2 + B - B')/d \\ h \varphi_{10} &= m_1 a_0 p^2 D/d \end{aligned} \right\} \dots\dots(34)$$

ここに、 $d = m_1^2 C p^4 - m_1 B p^2 + 1$

これを、水平震度  $k_0$  を用いて書き直すと、

$$\left. \begin{aligned} y_{10} &= k_0 W_1 (-m_1 C p^2 + B - B')/d \\ h \varphi_{10} &= k_0 W_1 D/d \end{aligned} \right\} \dots\dots(34')$$

ただし  $B, C$  は式(19)で与えられ、 $B'$  および  $D$  は次式より算出される。

$$\left. \begin{aligned} B' &= 6\alpha_1(\beta_1 + 2\beta_2^2) + \alpha_3(\beta_1\beta_3 + \beta_2^2) \\ D &= 6\alpha_1(1 + 2\beta_1) + \alpha_3(\beta_1 + \beta_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots(35)$$

またこの場合には、 $m_2=0$  としているから、式(23)において  $P_2=M_2=0$  である。したがって、式(10), (23), (25), (26)より  $y_{20}$ ,  $\varphi_{20}$  が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} y_{20} &= m_1 a_0 p^2 \alpha_2 (1 + y_{10}/a_0 + \beta_1 h \varphi_{10}/a_0) \\ h \varphi_{20} &= m_1 a_0 p^2 \alpha_3 \{ \beta_2^2 h \varphi_{10}/a_0 + \beta_1 (1 + y_{10}/a_0) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

**d) 杭打基礎の場合 (II) : 2自由度系** 杭打基礎で同様に  $m_2=0$  とする場合も、明らかに式(34), (34'), (36)が成り立つ。このときも自由振動の場合と同様に式(19), (35)で  $\beta_3=1$  とおけばよい。

**e) 橋脚下端完全固定の場合 : 2自由度系** 本節 3. (1) e) と同じく橋脚下端が基礎地盤に完全に固定されているとする場合にも、 $y_{10}, \varphi_{10}$  は、同様に式(34)から算出される。ただし  $B, C$  はいうまでもなく式(21)で与えられ、また  $B', D'$  は次式より算出される。

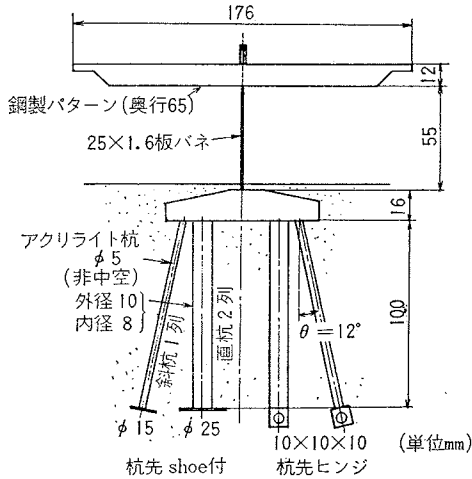
$$B' = 6\alpha_1(\beta_1 + 2\beta_2^2), D = 6\alpha_1(1 + 2\beta_1) \dots\dots(37)$$

#### 4. 模型振動実験

前節 3. で行なった連成振動としての理論解析の妥当性を検討するために、一柱式橋脚の模型を作製して、その振動実験を行なった。この実験では第1次の固有振動数を確認することに主眼点を置き、あわせてわれわれによるこれまでの研究成果とも対比するため、図-2の試案例を原型に選びその縮尺は1/100とした。上部構造1連分の重量は、横断面内の質量分布が原型に相似であるような鋼製パターンとして作製し、さらにフーチングおよび杭基礎は、メタアクリル酸樹脂(アクリライト)で作製した。

ただしこの場合基礎杭に関しては、図-2における斜杭  $2 \times 2 = 4$  本(奥行に2組)と直杭  $4 \times 4 - 4 = 12$  本(奥行に4組)を模型では簡単のため図-9のように斜杭2本と直杭4本(奥行に2組)で表示し、模型斜杭と模型直杭における断面積のそれぞれの和の比を原型におけるそれに等しくした。また地盤については弾性反力のみを考えて、寸法効果を考慮した地盤係数値やバネ定数で対応させることを考え、さらに模型自身における杭と地盤の剛性との関係は、例えば本文の式(7), (8)や文

図-9 一柱式橋脚模型概略図



献2) の式 (1) における  $k(p)$  と  $k(s)$  について原型と相似に近からしめようとした。

かくしてでき上がった模型の振動台への取り付け方法は、① フーチング下面を完全に固定した状態、② 杭先に基礎地盤の支持層を近似的に再現するために杭断面の6~9倍の面積を有する円形状の小さいシューを取り付けたもの、および③ 杭先をヒンジの状態に固定したもので基礎に乾燥砂を有する場合と④ これのない場合の、合計4種類とした。この場合①は最も簡明に構造のみに注目したものであり、②は杭の支持層を模型砂層の下に実現することが困難であったので、杭先を拘束しながらそこで若干の回転と変位が許容されるように近似的に考えたものであり、③は杭先を明瞭な機械的ヒンジと仮定して具現したものであり、④は③において基礎砂の影響を端的に見出そうとしたものである。図-9は、かくして得られたこれらの模型の概要を示したものである。

実験は、主として第1次固有振動数についての理論計算値が妥当であるかどうかを調べるために、上記の各模型の定常加振を行なって共振振動数を求め、さらに一部については、初期変位を与えた場合の自由振動記録より固有振動数を求めて、理論値と比較した。ここで取り扱った模型には、3.(1)e) の場合が適用できるものと考えて、式(18)、(19)および式(21)によって理論値を算出した。

表-2は、このような方法によって得られた固有振動数(連成第1次)の実験値と理論値とを比較表示したものである。この場合当然のことながら、強制振動による模型の共振振動数は、近似的にその模型の固有振動数とみなしている。同表で、フーチング下面が完全固定の状態より基礎砂と杭に支持された状態、さらに基礎砂がなくて杭のみで支持された状態へと固有振動数が漸減しているのは、フーチング下面が完全固定より弾性固定と

表-2 模型の固有振動数 (c/s)

	実験値		理論値	
	強制振動	自由振動	連成1次	慣用質点バネ系
① フーチング下面完全固定	14.4	14.1	15.4	28.8
② 杭先シューつき	13.5	—	—	—
③ 杭先ヒンジ(砂あり)	13.5	—	—	—
④ 杭先ヒンジ(砂なし)	13.0	13.1	14.3	—

なると固有振動数が低下するという現象でよく説明できる。また強制振動による共振振動数と、自由振動による固有振動数との間に実質的な差異が認められないのも当然の結果である。

一方同表中、固有振動数の計算値は、上述の実験値より若干大きい、両者の間に大差は認められない。この両者における約10%程度の差は、もちろん無視できる値とはいえないが、これは、3.(1b)のような4自由度系としての第1次固有振動数の理論値は14.3c/sより若干低下しようこと、模型頂部に載荷した小型加速度計の慣性モーメントが、実験共振振動数をいくぶん低下させたであろうことなどにもとづく結果であろうと考えられる。

しかし、フーチング下面完全固定の場合、鋼製パターンの質量が1点に集中していると仮定する、いわゆる質点  $m$ -バネ  $k$  という慣用計算法によって得られた固有振動数 28.8 c/s は、実験固有振動数 14.1 c/s もしくは 14.4 c/s さらに連成1次の計算固有振動数 15.4 c/s の2倍にも達している。固有振動数は、一般に  $n = \sqrt{k/m}$  のように、質量  $m$  やバネ定数  $k$  の平方根に対応するものである。慣用計算値が実験値の2倍に達することはその計算法が不相当であることを明示している。したがってここで対象としている一柱式橋脚の振動は、本文で行なったような連成振動として取り扱うべきであるという研究方針に対する妥当性が裏づけられたわけである。さらに、同表中において、杭の周囲に基礎砂を有する場合と、これがない場合との差がわずかであることは、杭の水平たわみに応じて生ずる水平地盤反力の影響が大きくなり、したがって結果的にはこの模型実験のような場合には、基礎の反力を無視しても大過なからうことがわかる。

### 5. 実橋脚に対する数値計算適用例

本節では、3.で得た理論解を、図-1に示した一実例および図-2の一試案例に適用して数値計算を行なった。すなわち、これらの橋脚についての連成固有周期を算出して1自由度系による慣用式と比較し、さらに4自由度系と2自由度系としての計算結果を相互に比較したのち、単弦地動による定常振動時に橋脚に生ずる動的曲げモーメント  $M_0$  と井筒に対する動的最大地盤反力

$p_0 \max$  とを計算し、これらを震度法による慣用静的計算値と比較検討した。以上において、4自由度系に対する数値計算には、京都大学電子計算機 KDC-1 を用いた。

本節における数値計算にあたって用いた各数値を一括すると下記のものである。

図-1 の場合： $E=2.10 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $I=2.60 \times 10^8 \text{ cm}^4$ ,  $W_1=429 \times 10^3 \text{ kg}$ ,  $m_1=W_1/g=438 \text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}$ ,  $W_2/d=262.2 \text{ kg/cm}$ ,  $m_2/d=(W_2/g)/d=0.2675 \text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}/\text{cm}$ ,  $d=1000 \sim 3000 \text{ cm}$ ,  $h=1100 \text{ cm}$ ,  $e=287 \text{ cm}$ ,  $r_1^2=22.8 \times 10^4 \text{ cm}^2$ 。

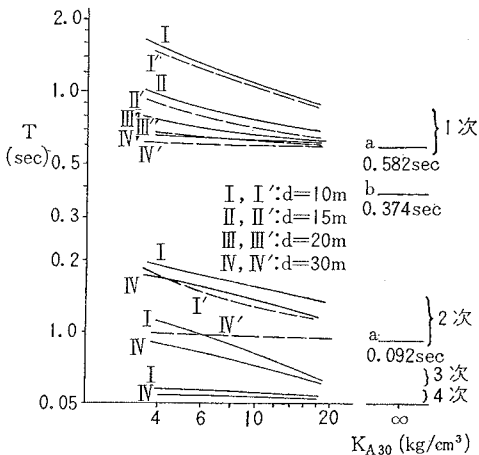
図-2 の場合： $E=2.10 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $I=2.50 \times 10^8 \text{ cm}^4$ ,  $W_1=770 \times 10^3 \text{ kg}$ ,  $m_1=W_1/g=786 \text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}$ ,  $h=490 \text{ cm}$ ,  $e=61.8 \text{ cm}$ ,  $r_1^2=21.8 \times 10^4 \text{ cm}^2$ ,  $E_s'=2.10 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $a'=141 \text{ cm}^2$  (鋼管  $\phi 500 \text{ mm}$ ),  $l'=1000 \text{ cm}$ ,  $\theta=12^\circ$ ,  $c'=800 \text{ cm}$ ,  $c_1=600 \text{ cm}$ ,  $c_2=200 \text{ cm}$ 。

杭基礎の場合は結局 図-2 を 図-3 (b) のモデルに表示した算定式を用いるが、この場合 図-2 の両端の斜直組杭の部分は杭の両端がヒンジ結合であるトラス骨組とみなして式 (7), (8) を用い、また他の鉛直杭に対しては Chang の式で算出される単杭のバネ定数の代数和をとり、これを上記の組杭によるバネ定数と合成した。すなわち斜直組杭ではその軸方向のみに依存し、鉛直杭ではその曲げ剛性と水平地盤反力に依存するという、われわれがこれまで実用計算でとってきた計算法<sup>1)~3)</sup> を踏襲したわけである。

(1) 連成固有周期

図-1 に対して 図-5 (b) の水平地盤係数分布をとり深さ 30 m における  $K_A$  の値、すなわち  $K_{A30}$  の値を変化させながら、井筒の根入長の 4 種の値について固有周期を算出図示した結果が 図-10 である。同図中で、曲線 I~IV は、4自由度系とした場合の式 (17) による値、曲線 I'~IV' は、2自由度系とした場合の式

図-10 連成固有周期の計算値 (図-1 の場合)



(18), (19) によって算出された値である。一方 図-2 に対しては、これを 2 自由度系とみなした場合の式 (18),

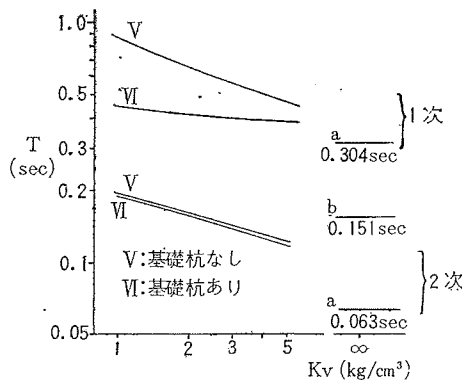
(19) を適用した。その際 フーチング 下面の鉛直地盤係数  $K_v$  を変化させながら、基礎杭を有する場合とフーチングのみの場合とについて固有周期を算出し、その結果 図-11 を得た。同図中で、曲線 V はフーチングのみの場合、曲線 VI は基礎杭を有する場合の値を示している。また 図-10 および 図-11 で、直線 a と b はいずれも橋脚下端を完全固定とした簡単な場合で ( $K_A, K_v \rightarrow \infty$ ), a は 2 自由度系として式 (18), (21) を適用した結果を示し、また b は上部構造を質点とみなした 1 自由度系に対する値を示している。

これらの図を参照すると、まず直線 b の値は、橋脚下端を完全固定と仮定した 2 自由度系の直線 a の場合と比較してもかなり小さく、これよりも一柱式橋脚に対して質点 m - バネ k なる 1 自由度系による慣用式を適用することは妥当でないといえる。

つぎに同図中の連成 1 次固有周期 (図-10: I~IV, I'~IV', 図-11: V, VI) の各値は、いずれもかなり大きな値を示している。すなわち、橋脚がそれほど細長いとはいえない 図-2 のような場合でも 1 次固有周期は 0.3~0.4 sec 程度以上となり、通常の地盤に襲撃するであろう地震の周期より小さいとはかぎらない。この傾向は、図-1 のように橋脚が非常に細長くなると当然のことながら一層助長され、図-10 に見るように、1 次固有周期は約 0.6 sec 以上となって、これらに剛構造 (一般に固有周期小) の耐震計算法において妥当な震度法を適用することは合理的であるとはいえず、完全な柔構造物として取り扱うべきであることがわかる。またこれらの実例では、2 次以上の高次固有周期はいずれも 0.2 sec 程度以下となっており、耐震的にはあまり問題としなくてもよいであろう。

なお 図-10 において、4 自由度系の 1 次固有周期 (曲線 I~IV) と 2 自由度系の 1 次固有周期 (曲線 I'~IV') とは、井筒の質量が上部構造の 0.6~1.8 倍程度 ( $d=10 \sim 30 \text{ m}$  に対応) であるにもかかわらず比較的

図-11 連成固有周期の計算値 (図-2 の場合)



相接近した値を示している。したがって地盤係数のような不確かな項が入ることを考慮すれば、図-1 のような場合に対しては、実用上井筒の質量を無視して、2 自由度系として計算を

簡略化してさしつかえない場合が多いといえよう。

(2) 橋脚躯体の定常曲げモーメントおよび井筒の最



大地盤反力

図-12 および 図-13 は、それぞれ 図-1 および 図-2 について、式 (22) で与えられる地動が作用した場合に、橋脚下端に生ずる曲げモーメントの定常振幅  $M_{30}$  を、震度法による静的計算値との比で示した共振曲線である。また 図-12 には、同様に式 (22) の地動が作用する場合の井筒に対する最大動的地盤反力  $p_{0\max}$  と、物部式による静的慣用計算値  $p_s\max$  との比をも示した。

図-12 共振曲線 (図-1 の場合)

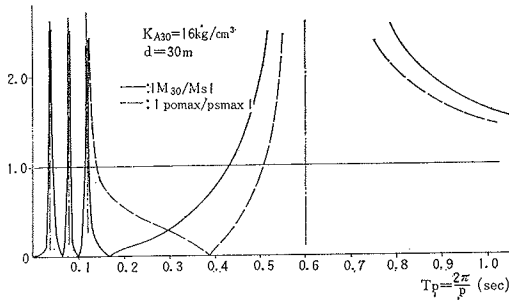
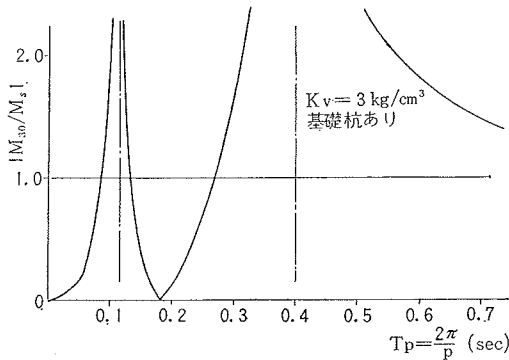


図-13 共振曲線 (図-2 の場合)



すなわち定常振動の見地からすれば、震度法による計算値は、当然のことながら図の曲線の縦距が1より小さい範囲では安全側にあり、1より大きくなれば危険側にあるといえる。例えば、図-1 の場合には、現地における常時微動の卓越周期は0.3~0.4 sec程度が多いと報告されている<sup>4)</sup>。したがって、もしも地震の周期が常時微動の卓越周期に近いものであるとみなせるならば、この場合には、図-12 からわかるように、震度法による静的計算値は大きな安全率を有することになる。一方 図-2 の場合に対しては、現地の常時微動の卓越周期は0.5~0.8 sec程度と推定されている<sup>5)</sup>。上と同様に考えれば、この場合には 図-13 からわかるように、静的計算値は危険側にあり、橋脚躯体は十分な強度をもたせるよう設計すべきである。しかしながら、これらの計算値はあくまでも定常振動時の振幅を算出した結果であり、また常時微動と実地震の相関性についてはなお疑義があるようであるので、これらのことについては、十分慎重に判断しなければならない。

6. 結 論

本研究についてはなお検討すべき点が少ないが、得られた結果を考察要約すると、一応つぎのように結論することができる。

(1) 一柱式橋脚の連成振動モデルは、上・下端に大きな分布質量を有する板バネと、これらを支持する基礎地盤の弾性バネよりなる4自由度系で近似的に表示される。

(2) 上記の振動モデルにおいて井筒基礎が用いられる場合で、井筒躯体1基の質量が上部構造の質量と同程度のオーダーかそれより小さい場合、または杭打基礎が用いられる場合などには、基礎工の質量を無視することによって、実用上2自由度の振動の問題として計算を簡略化してさしつかえない。

(3) 一柱式橋脚の連成振動においては、その1次が支配的であり、2次以上の高次振動は、耐震的にはほとんど問題にしないでよさそうである。

(4) しかし、その第1次固有振動周期は、いうまでもなく橋脚の寸法・形状や基礎工・地盤の性質などにもよるが、一般に大きな値をとる傾向がある。そのため、地震周期と橋脚の固有周期とが相接近して、共振に近い現象を起こす恐れも十分にありうる。したがって、かかる構造物を建設するに際しては、既応の地震資料を十分に調査するほか、現地の地質調査や常時微動の観測などを行なって、そこに来襲するであろう地震の周期のおおよその範囲を推定し、これと構造物の固有周期とをできることなら接近させないような設計を行なうことが望ましい。

一柱式橋脚の振動性状ならびに耐震設計に関しては、なお進んで、上部構造のねじれによる拘束、隣接橋脚の影響、減衰項の考慮、非定常・非線型振動としての研究、地震応答の計算などに関する研究が実施されなければならない。われわれは、本文で板バネで表示して一応無視した橋脚躯体の自重を考慮した場合についても同様な解析を進め、その結果当然のことながら、固有周期のさらに増大する傾向を確認している。今後減衰を考慮した場合や地震応答の研究結果などとあわせて報告致したいと思う。

終りに臨み、本文の数値計算例の一部は京都大学電子計算機 KDC-1 によったことを重ねて記し、その計算に当たって有益な御助言を与えられた当教室の山田善一助教授に深謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 後藤尚男：高速道路神戸臨港線高架橋単脚構造に関する研究，京都大学防災研究協会，昭. 37.5.
- 2) 後藤尚男・波部卓郎：高架橋一柱式橋脚の耐震性に関する研究，地震工学国内シンポジウム講演集 (1962)，pp. 141~146，昭. 37.11.
- 3) 後藤尚男・芦見忠志・滝井健司：斜杭・組杭の水平抵抗に関する模型実験の考察，土木学会論文集，79，pp. 24~34，昭. 37.3.
- 4) 日本交通技術：1号線東・西横堀常時微動測定報告書，昭. 37.10.
- 5) 後藤尚男：高架橋下部構造の耐震設計の研究中間報告，京都大学防災研究協会，pp. 55~68，昭. 38.2.

(1964.2.3・受付)