

# 一般薄肉断面の曲りばりの解析

## ANALYSIS OF THIN WALLED CURVED BEAM

倉 西 茂\*  
By Shigeru Kuranishi

**要 旨** 円弧状に曲った薄肉断面のはりの変形，応力などの解析法を示したものである。薄肉断面の直ばりの解析手法にしたがい，はりの幅の影響を入れて断面諸定数などを求めている。はりの軸に沿った母線の間に働く直応力度の影響は入れられていないが，直ばり場合と同程度の仮定のもとに本解析は行なわれている。

また本方法による曲線橋の解析方法が示されている。

### 1. はじめに

曲りばりのその面内での問題はラーメン隅角部の応力分布の問題，あるいはフックの曲げの問題などとして昔より数多く取り扱われて来た。わが国でもこの方面の研究としては故大野謙博士の研究<sup>1), 2)</sup>がある。面外への変形についてもリング，コイルバネの問題，アーチの面外への変形問題<sup>3)</sup>，円環基礎の問題<sup>4)</sup>としてやはり数多く取り扱われて来た。特に曲線橋の発達につれて最近この方面の研究がさかに行なわれて来ている。

文献 9) は著者らによる直ばり断面定数を用いた場合の曲りばりの解析，文献 15) は文献 9) を発展させ曲線格子桁の一解法を示している。文献 10) は直ばりの断面ではなく，曲率の影響を，すなわち曲率半径方向の幅の影響も考えて 2 本主桁の曲線橋を解く方法を報告している。文献 16) は小西教授，小松助教授によって閉じた断面の薄肉曲りばりの基礎理論を示している。

しかし文献 16) は断面として閉じた断面のものに限られ，開いた断面のものについては触れられてない，また直ばりとの関連という点において十分でないように思われる。本論文は文献 16) と一部重複する所もあるが，特に直ばりの理論と同じ考え方のもとに，断面形不変の場合の曲りばりの面外への変形問題について開いた断面もふくめて一般的解析を行なったものである。合成桁のようにヤング率の異なる部材がふくまれる場合，多室の閉断面の場合などについては触れていないが，これは文献 2), 16) を参照しても，また直ばりの手法を知っていれば簡単に発展させることができると思われる。

また最後に本理論を基にした曲線橋の解析基礎理論を述べている。

### 2. 曲りばりの応力

#### (1) 座 標 系

ここで取り扱っている曲りばりははり軸方向の母線が，ある垂直軸を中心とする円弧となっているもので，

はり内にその垂直軸がふくまれないものである。またはりの曲率半径方向の幅は曲率半径の数倍以上のものとする。

座標軸としては今述べた垂直軸を  $\bar{x}$  軸とし極座標を図-1 に示したようにとる。曲げ変形によって伸びも縮もしない軸を中立軸とし，その半径を  $R_0$  とし，中立軸を原点として断面に  $r$  軸方向に  $x$  軸， $\bar{x}$  軸方向に  $y$  軸， $\varphi$  軸方向に  $z$  軸をとる。また断面主軸は  $\bar{x}$  軸を中心としてねじ回りに  $\theta$  だけ回転した方向にあるものとする。各点の  $(r, \bar{x}, \varphi)$  方向の変位をそれぞれ  $(u, v, w)$  とする。また断面中立軸の変位はそれぞれ  $(u_0, v_0, w_0)$  とする。ねじり角  $\beta$  は  $\varphi$  の増加方向を見て逆時計回りに回転するものを正とする。

#### (2) 単 純 曲 げ

断面形は不変とし，はり軸に直交している断面は単純曲げに対しては変形後も直交しており，軸方向直応力度の算出に対しては平面を保っているものとする。この仮定は特に曲りばりの場合にははり軸に直角方向の応力などが働くので直ばりの場合より成立しにくいと思われる。しかし薄板の面内曲げの場合で変形後の断面が平面であったとした場合と，厳密解との差は中立軸の曲率半径と同程度の幅をもったものでも 7% 程度に過ぎないので，中立軸の曲率半径に比してはりの幅が数分の一であれば十分正確に成立するものと思われる。

図-1

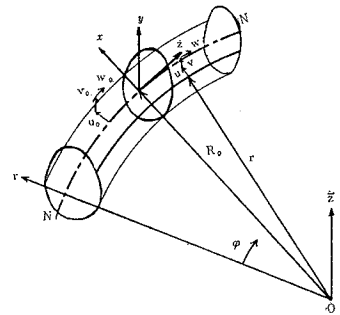
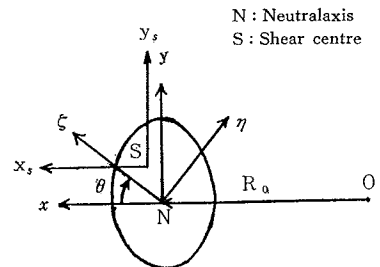


図-2



N : Neutralaxis  
S : Shear centre

\* 正員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科

曲りばりの各母線の  $r$  軸,  $\bar{z}$  軸回りの曲率の変化を  $k_r, k_z$  とし, はり軸回りのねじり率の増加を  $k_\varphi$  とするとそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_r &= \frac{1}{r^2} v'' - \frac{1}{r} \beta \\ k_z &= \frac{1}{r^2} u'' + \frac{1}{r^2} w \\ \text{または} &= \frac{1}{r^2} u'' + \frac{1}{r^2} u + \frac{1}{r} \epsilon_\varphi \\ k_\varphi &= \frac{1}{r} \beta' + \frac{1}{r^2} v' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで, ' は  $\varphi$  について微分したことを表わし,  $\epsilon_\varphi$  は円周方向のひずみを表わす。

単純曲げ, すなわち直ばりと同様に各母線ともねじり率が生じない変形を考えると

$$\frac{1}{r} \beta' + \frac{1}{r^2} v' = 0 \dots\dots\dots (2)$$

はり軸と断面が直交していることより, 断面各点の変位は中立軸の変位  $u_0, v_0, w_0$  とねじれ角  $\beta$  で書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + y \beta \\ v &= v_0 - x \beta \\ w &= -\frac{u_0'}{R_0} x - \frac{v_0'}{R_0} y + \frac{r}{R_0} w_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

円周方向の直ひずみは

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} w' \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。中立軸では

$$\frac{u_0}{R_0} + \frac{1}{R_0} w_0' = 0 \dots\dots\dots (5)$$

式 (4) に式 (3) を代入して整理すると

$$\epsilon_\varphi = -\frac{R_0}{r} y k_{r_0} - \frac{R_0}{r} x k_{z_0} \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。ただし  $k_{r_0}, k_{z_0}$  は中立軸での  $k_r, k_z$  の値である。また他のひずみ, 直ひずみ  $\epsilon_r$ , せん断ひずみ  $\psi_{r\varphi}, \psi_{r_z}, \psi_{\varphi z}$  は 0 となる。

よって直応力度は

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_\varphi \dots\dots\dots (7)$$

で与えられる。

曲げモーメントと曲率の関係ですでに文献 (6), (16) で述べられているが, 本論文の記号にしたがいあらためて書くと次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \frac{E}{1-\nu^2} k_{r_0} I_{xy} + \frac{E}{1-\nu^2} k_{z_0} I_y \\ M_x &= \frac{E}{1-\nu^2} k_{r_0} I_x + \frac{E}{1-\nu^2} k_{z_0} I_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A \frac{R_0}{r} y^2 dA \\ I_y &= \int_A \frac{R_0}{r} x^2 dA \\ I_{xy} &= \int_A \frac{R_0}{r} xy \cdot dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$R_0 \text{ は } \int_A \frac{y}{r} dA = 0, \int_A \frac{x}{r} dA = 0 \dots\dots\dots (10)$$

より定められる。

式 (8) を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} k_{r_0} &= \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \\ \frac{E}{1-\nu^2} k_{z_0} &= \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

今  $x, y$  軸より  $\theta$  だけ時計回りと回転した軸  $\xi, \eta$  軸に断面主軸があるとすれば

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \theta - \eta \sin \theta & \xi &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y &= \xi \sin \theta + \eta \cos \theta & \eta &= y \cos \theta - x \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

より,  $\xi, \eta$  軸回りの曲げモーメントは

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= \frac{E}{1-\nu^2} (k_{r_0} I_\xi \cos \theta - k_{z_0} I_\xi \sin \theta) \\ M_\eta &= \frac{E}{1-\nu^2} (k_{r_0} I_\eta \sin \theta + k_{z_0} I_\eta \cos \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} I_\xi &= \int_A \frac{R_0}{r} \eta^2 dA \\ I_\eta &= \int_A \frac{R_0}{r} \xi^2 dA \\ I_{\xi\eta} &= 0 \\ \tan 2\theta &= \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) より  $k_{r_0}, k_{z_0}$  を定めると

$$\left. \begin{aligned} k_{r_0} &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{I_\eta M_\xi \cos \theta + I_\xi M_\eta \sin \theta}{I_\xi I_\eta} \\ k_{z_0} &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{I_\xi M_y \cos \theta - I_\eta M_\xi \sin \theta}{I_\xi I_\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) を式 (16), (17) に入れ, 式 (12) の関係を考えて整理すると

$$\sigma_\varphi = -\frac{R_0}{r} \frac{\xi}{I_\eta} M_\eta - \frac{R_0}{r} \frac{\eta}{I_\xi} M_\xi \dots\dots\dots (16)$$

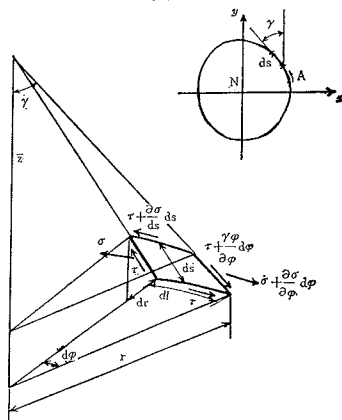
を得る。

図-3

(3) 曲げ応力によるせん断応力

球座標による応力のつりあい式より与えられるが, 今与えているだけの応力についてつりあいを求めると図-3 に示したように  $\varphi$  方向の力の平衡より

$$\left( \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} d\rho \right) t \cdot ds - (\sigma \cdot t \cdot ds) + \tau t \cdot rd\varphi - \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial s} ds \right) (r - ds \sin \gamma) t \cdot d\varphi$$



$$\begin{aligned}
 & + \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right) t \, ds \sin r \, d\varphi = 0 \\
 \therefore \quad & \frac{\partial(\sigma t)}{\partial \varphi} d\varphi \cdot ds + 2(\tau t) \sin r \, ds \, d\varphi \\
 & - \frac{d(\tau t)}{ds} r \, ds \, d\varphi = 0 \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

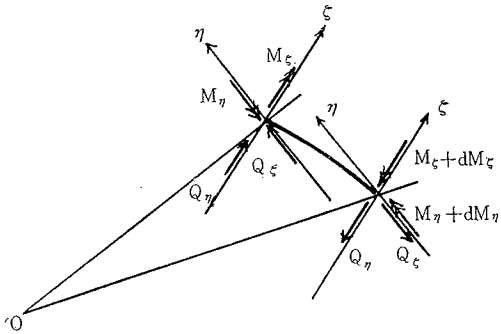
ここで  $ds$  は直ばりと同じ法則にしたがい断面の周囲に沿って計る。 $t$  は板厚である。

$$\begin{aligned}
 \text{今 } \sin r &= -\frac{dr}{ds} \text{ より} \\
 \frac{\partial(\sigma t)}{\partial \varphi} - 2(\tau t) \frac{dr}{ds} - \frac{d(\tau t)}{ds} r &= 0 \dots\dots\dots(17 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(\sigma t)}{\partial \varphi} = \frac{d(\tau t r^2)}{r \, ds} \dots\dots\dots(17 \cdot b)$$

今それぞれの主軸回りの曲げモーメントを考えると、ねじりモーメント 0 なる状態を考えているのであるから、図-4 に示すように  $\xi$  軸  $\eta$  軸に直角方向のせん断

図-4



力を  $Q_\xi Q_\eta$  とすれば

$$\frac{dM_\xi}{r \, d\varphi} = -Q_\xi, \quad \frac{dM_\eta}{r \, d\varphi} = -Q_\eta \dots\dots\dots(19)$$

なる関係がある。今  $M_\eta$  のみについて考えると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\sigma t)}{\partial \varphi} &= -\frac{R_0}{r} \frac{\xi t}{I_\eta} \cdot \frac{\partial M_\eta}{\partial \varphi} \\
 &= R_0 \frac{\xi t}{I_\eta} \cdot Q_\eta \dots\dots\dots(20)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } R_0 \frac{\xi t}{I_\eta} Q_\eta = \frac{1}{r} \frac{d(\tau t r^2)}{ds} \dots\dots\dots(21)$$

せん断力は式 (21) を積分して

$$\tau t = \frac{R_0 Q_\eta}{r^2 I_\eta} \int r \cdot \xi t \, ds + C_\eta \dots\dots\dots(22 \cdot a)$$

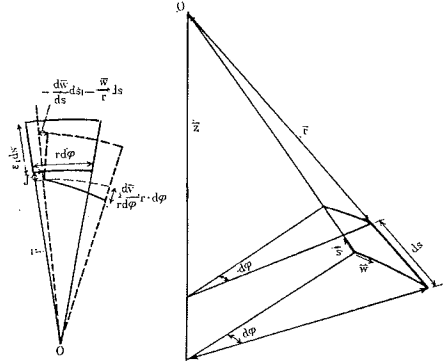
と得られる。積分定数  $C_\eta$  は開いた断面では  $\tau=0$  の点より積分を始めれば  $C_\eta=0$  となる。閉じた断面ではせん断力による断面のそりが断面を一周してもとの値にもどることにより定められる。 $M_\xi$  についても同じような関係が得られ

$$\tau t = \frac{R_0 Q_\xi}{r^2 I_\xi} \int r \cdot \eta t \, ds + C_\xi \dots\dots\dots(22 \cdot b)$$

となる。

今図-5 に示すように断面のはり軸方向の変位を  $\bar{w}$ 、周囲の接線方向の変位を  $\bar{v}$  とすれば、はり軸方向の 2

図-5



本の母線と 2 つの断面とによって切り出される側面の微小部分の受けるせん断ひずみ  $\psi$  は

$$\psi = -\frac{d\bar{w}}{ds} - \frac{\bar{w}}{r} \frac{d\bar{v}}{rd\varphi} \dots\dots\dots(23)$$

と与えられる。今ここで

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{w} &= w \quad \bar{v} = -u \sin r + v \cos r \\
 \bar{r} &= \frac{r}{\sin r} \quad \sin r = -\frac{dr}{ds}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23 \cdot a)$$

なる関係がある。

はり断面はこの曲げによるせん断力により平面状態より  $w_b$  だけそると考えれば式 (3) は

$$\left. \begin{aligned}
 u &= u_0 + y \beta \\
 v &= v_0 - x \beta \\
 w &= w_b - \frac{u_0'}{R_0} x - \frac{v_0'}{R_0} y + \frac{r}{R_0} w_0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

と  $w$  は  $w_b$  だけ増加した形となる。

式 (23 \cdot a)、式 (24) の関係を式 (23) に入れて整理すると

$$\begin{aligned}
 \psi &= -\frac{dw_b}{ds} + \frac{w_b}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{\beta'}{r} (y \sin r + x \cos r) \\
 &+ \frac{v_0'}{R_0 r} (y \sin r + x \cos r) \dots\dots\dots(25)
 \end{aligned}$$

ここではねじり率 0 なる変形を考えているのであるから

$$\beta' + \frac{v_0'}{R_0} = 0$$

より式 (25) は

$$\begin{aligned}
 \psi &= -\frac{dw_b}{ds} + \frac{w_b}{r} \frac{dr}{ds} \\
 &= -r \frac{d}{ds} (w_b \cdot r^{-1}) \dots\dots\dots(26 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{\tau}{G} = -r \frac{d}{ds} (w_b r^{-1}) \dots\dots\dots(26 \cdot b)$$

$w_b$  は積分を一周して元の値にもどることにより

$$\int \frac{\tau}{rG} ds = 0 \dots\dots\dots(27)$$

より積分定数は定められる。また式 (26) はせん断おくりの形を見るときにも役立つことができる。

式 (27)、式 (22) よりせん断応力の分布が定めれば

せん断中心の位置を定めることができる。文献 16) ではせん断中心を曲げねじりによる直応力度によって曲げモーメントが生じないことより定めているが、ここでは一般の直ばりの解法にしたがい曲げによるせん断応力度の中心にとる。

(4) 単純ねじり

はりの各母線はねじり変形のみを受け曲げ変形を受けない場合を考える。またねじり率は変化せずはりに直応力度は働かないものとする。

式 (18) より直応力度が働いていない時のせん断流は

$$\frac{d(\tau tr^2)}{ds} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

より  $\tau t = \frac{C_q}{r^2}$

なる形で与えられる。

今せん断中心位置でののはりの変位を  $u_s, v_s, w_s$  とし、その座標を  $(R_s, \varphi, \bar{z}_s)$  で表わす。せん断中心に新たに  $x, y$  軸に平行に  $x_s, y_s$  軸をとり、断面平面よりの断面のそりを  $w_s$  とすれば式 (25) で  $w_b$  を求めたときと同じような操作により

$$\psi = -r \frac{d}{ds} (w_s r^{-1}) + \frac{\beta'}{r} (y_s \sin r + x_s \cos r) + \frac{v_s'}{R_s r} (y_s \sin r + x_s \cos r) \dots\dots\dots (30)$$

とせん断ひずみは求められる。

今せん断中心より周辺におろした垂線の長さを  $d$  とすれば、

$$d = y_s \sin r + x_s \cos r \dots\dots\dots (31)$$

よって式 (30) は次式となる。

$$\psi = -r \frac{d}{ds} (w_s r^{-1}) + \frac{d}{r} \frac{R_s}{R_s} \left( \beta' + \frac{v_s'}{R_s} \right) = -r \frac{d}{ds} (w_s r^{-1}) + \frac{R_s \cdot d}{r} k_{\varphi s} \dots\dots\dots (32)$$

$k_{\varphi s}$  はねじり中心軸でのねじり率を表わす。

よって  $\frac{\tau}{G} = -r \frac{d}{ds} (w_s r^{-1}) + \frac{R_s \cdot d}{r} k_{\varphi s} \dots\dots\dots (33)$

開いた断面では  $\tau t = 0$  より断面のそりは

$$\frac{d}{ds} (w_s r^{-1}) = \frac{R_s \cdot d}{r^2} k_{\varphi s}$$

より

$$w_s = R_s r \cdot k_{\varphi s} \int \frac{d}{r^2} ds + C_s \cdot r \dots\dots\dots (34)$$

で与えられる。積分定数  $C_s$  は軸方向力が無いことより

$$\int_s \frac{w_{st}}{r} ds = 0 \dots\dots\dots (35)$$

より定めることができる。

閉じた断面では断面周辺上の 2 点  $A, B$  でのそりの差は

$$\left( \frac{w_s}{r} \right)_A - \left( \frac{w_s}{r} \right)_B = - \int_A^B \frac{\tau}{G r} ds + R_s k_{\varphi s} \int_A^B \frac{d}{r^2} ds \dots\dots\dots (36)$$

で与えられる。今断面に働いているねじりモーメントを  $MT$  とすれば

$$MT = \oint \tau \cdot t d ds = \oint \frac{C_q}{r^2} \cdot d \cdot ds$$

で与えられるゆえ

$$2F = R_s^2 \oint \frac{d}{r^2} ds, C_q = \frac{R_s^2}{2F} MT, \tau = \frac{R_s}{2F r^2 t} MT \dots\dots\dots (37)$$

と置けば式 (36) は

$$\left( \frac{w_s}{r} \right)_A - \left( \frac{w_B}{r} \right)_B = - \int_A^B \frac{MT}{G \cdot 2 F t r^3} ds + R_s k_{\varphi s} \int_A^B \frac{d}{r^2} ds \quad (36 \cdot a)$$

となる。

閉じた断面では、断面を一周して積分すれば  $w_s$  は最初の値にもどるゆえ、式 (36・a) は

$$- \oint \frac{R_s^2 MT}{G \cdot 2 F t r^3} ds + R_s \cdot k_{\varphi s} \oint \frac{d}{r^2} ds = 0 \dots\dots\dots (38)$$

となり、結局ねじりモーメントとねじり率の関係は次式で与えられる。注1,2)

$$MT = G \cdot J_T \cdot k_{\varphi s} \dots\dots\dots (39)$$

$$G J_T = \frac{4 F^2}{R_s^3 \oint \frac{1}{G r^3 t} ds} \dots\dots\dots (39 \cdot a)$$

開いた断面では各母線のねじり剛性の和であるから

$$G J_T = R_s \int_s \frac{G t^3}{r} ds \dots\dots\dots (40)$$

(5) 曲げねじり

閉じた断面では、断面上の一点に  $s$  の原点をとり、その点での断面のそりを  $w_{s0}$ 、曲率半径を  $r_0$  とすれば、任意の点での断面のそりは

$$w_s = \frac{r}{r_0} w_{r_0} - r \frac{2F}{R_s^3 \oint \frac{1}{G r^3 t} ds} \cdot k_{\varphi s} \int_0^s \frac{1}{G t r^3} ds + R_s r k_{\varphi s} \int_0^s \frac{d}{r^2} ds \dots\dots\dots (41)$$

で与えられる。

この断面のそりの変化による直応力度は

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \epsilon_s + \frac{w_s'}{r} \right) \dots\dots\dots (42)$$

で与えられる。ここで  $\epsilon_s$  はせん断中心軸のひずみである。軸力 0 より

$$\oint \sigma t ds = 0$$

よって

$$\oint \left( \frac{w_{s0}}{r_0} + \epsilon_s \right) t ds - \left\{ \frac{2F}{R_s^3 \oint \frac{1}{G r^3 t} ds} \int_0^s \frac{1}{G t r^3} ds ds \right.$$

注 1) ねじり剛性は小西・小松の一室の場合と一致する。  
注 2) ねじりにともなうせん断力の項は省略している。

$$-R_s \int_0^s t \int_0^s \frac{d}{r^2} ds ds \} k_{\varphi s}' = 0$$

$$\text{今 } \frac{1}{r_0} w_{s_0}' + \varepsilon_{s_0} = C_0 R_s k_{\varphi s}' \dots\dots\dots(44)$$

と置けば

$$C_0 \int t \cdot ds = \frac{2F}{R_s^4} \int \frac{ds}{Gr^3 t} \int_0^s \frac{1}{Gtr^3} ds ds - \int_0^s t \int_0^s \frac{d}{r^2} ds ds \dots\dots\dots(45)$$

で  $C_0$  は与えられる。

よって直応力度は

$$\sigma = \frac{EW}{1-\nu^2} R_0 k_{\varphi s}' \dots\dots\dots(46)$$

で与えられる。ここで

$$W = C_0 - \frac{2F}{R_s^4} \int \frac{ds}{Gr^3 t} \int_0^s \frac{ds}{Gtr^3} + \int_0^s \frac{d}{r^2} ds \dots\dots\dots(47)$$

である。このとき桁のもっている全ポテンシャルエネルギー  $V$  は次式で与えられる。

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \int \frac{1-\nu^2}{E} \sigma^2 \cdot t \cdot r ds d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^\alpha GJ_T k_{\varphi}^2 R_s d\varphi - \int_0^\alpha MT k_{\varphi s} \cdot R_s d\varphi \dots\dots\dots(48)$$

$$\text{今 } C_{bd} = \int W^2 R_s^3 t \cdot r ds \dots\dots\dots(49)$$

と置き、断面は全スパンにわたり一定とすれば  $\delta V = 0$  より

$$-\frac{E}{1-\nu^2} \frac{C_{bd}}{R_s^2} k_{\varphi s}'' + GJ_T k_{\varphi} = MT \dots\dots\dots(50)$$

を得る。式 (49) を書きかえれば

$$-\frac{E}{1-\nu^2} C_{bd} \frac{1}{R_s^3} \left( \beta'''' + \frac{1}{R_s} v_s'''' \right) + \frac{GJ_T}{R_s} \left( \beta' + \frac{1}{R_s} v_s' \right) = MT \dots\dots\dots(51)$$

を得る。

せん断流は式 (18) より

$$\frac{\partial(\sigma t)}{\partial\varphi} = \frac{d(\tau tr^2)}{r \cdot ds} \dots\dots\dots(52) = \frac{WR_s}{1-\nu^2} k_{\varphi s}''$$

$$\text{より } \tau tr^2 = \frac{R_s k_{\varphi s}''}{1-\nu^2} \int W \cdot r \cdot ds + C_{q_0} \dots\dots\dots(53)$$

積分定数は式 (27) と同様に

$$-\int \frac{\tau}{Gr} ds = 0$$

より定める。開いた断面では式 (41) の右辺第 2 項を 0 と置き、後の操作は閉じた断面と同じようにして曲げねじり剛性を求めることができる。

### 3. 曲りばりの変形

式 (11) より  $r$  軸回りの曲げに対しては

$$\frac{1}{R_0^2} v_0'' - \frac{1}{R_0} \beta = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \dots\dots\dots(54)$$

ねじりに対しては式 (50) より

$$-\frac{EC_{bd}}{1-\nu^2} \frac{1}{R_s^3} \left( \beta'''' + \frac{1}{R_s} v_s'''' \right) + \frac{GJ_T}{R_s} \left( \beta' + \frac{1}{R_s} v_s' \right) = MT \dots\dots\dots(55)$$

今  $v_0$  と  $v_s$  の間の関係は式 (3) より

$$v_0 = v_s + (R_s - R_0) \beta \dots\dots\dots(56)$$

と書ける。この関係を式 (54) に入れると

$$\frac{1}{R_0^2} v_s'' + \frac{(R_s - R_0)}{R_0^2} \beta'' - \frac{\beta}{R_0} = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \dots\dots\dots(57)$$

よりねじり角  $\beta$  は

$$\left. \begin{aligned} &-\frac{EC_{bd}}{1-\nu^2} \frac{R_0}{R_s^4} (\beta'' + \beta'') + GJ_T \frac{R_0}{R_s^2} (\beta'' + \beta) \\ &= MT' + \frac{C_{bd} R_0^2}{R_s^4} \frac{M_x'' I_y - M_y'' I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \\ &- \frac{(1-\nu^2) GJ_T}{E} \frac{R_0^2}{R_s^2} \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(58)$$

で与えられる。 $\beta$  が求められれば  $v_s, v_0$  は式 (54), (55) より求められる。曲りばりの面内の曲げに対しては式 (15) がそのまま使用できる。

### 4. 多主桁の曲線橋への応用

いくつかの主桁を剛な横桁で結合しているような形式の曲線橋の解析には当然本論文の方法が適用できる。しかしここではもう少し式の簡略化を行なうため二、三の条件をつけることにする。第一に各主桁の断面定数は直桁としてのものを用い、曲率半径方向の幅の影響は考えない。つぎに各主桁の中立軸は同一の水平面内にあるものとする。主桁は外側より 1, 2, 3, ……  $k$  ……  $n$  と数え諸定数の右下にその番号をつける。

$$\text{今 } C_{bk} = \frac{EC_{bdk}}{R_k^3}, T_k = \frac{GJ_T k}{R_k}, K_k = \frac{EI_k}{R_k^2} \dots\dots\dots(59)$$

なる諸量を考え、本論文で行なったのと同じ方法により働いている荷重と変形の間の方程式を求めると

$$\left. \begin{aligned} &-C_b(\beta'' + \beta'') + T(\beta'' + \beta) \\ &= -\left(1 + \frac{T}{RK} + \frac{C_{b_0}}{RK}\right) M - \frac{C_{b_0}}{RK} (R+e) w - ew \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

を得る。

ここで

$$\left. \begin{aligned} C_b &= \Sigma \frac{(R_k - \bar{R})^2}{R_k} K_k + \Sigma \left( \frac{\bar{R}}{R_k} \right)^2 C_{bk} \\ T &= \Sigma \left\{ \left( \frac{\bar{R}}{R_k} \right)^2 T_k \right\} \\ C_{b_0} &= \Sigma \bar{R} \frac{(R - R_k)}{R_k} K_k + \Sigma \left( \frac{\bar{R}}{R_k} \right)^2 C_{bk} \\ K &= \Sigma K_k \\ \bar{R} &= \frac{\Sigma R_k K_k}{K} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

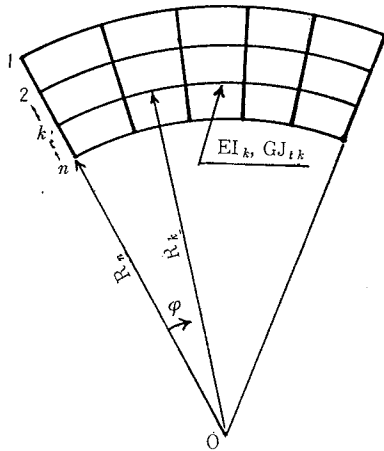
荷重は中立軸をふくんでいる水平面に垂直な荷重とし、単位角度当りの荷重強度を  $w$  とし、曲げモーメント  $M$  ははりを下方に向かって凸にするものを正とする。 $R_k$  は外側より  $k$  番目の主桁のせん断中心軸の曲率半径である。 $e$  は  $\bar{R}$  より荷重までの距離を表わし、外側にあるものを正とする。

式 (60) より荷重が与えられればねじり角  $\beta$  は求められる、ゆえに各主桁に働く曲げモーメントは

$$M_k = \frac{K_k}{K} M - \frac{K_k}{K} (R_k - \bar{R})(\beta'' + \beta) \quad (62)$$

与えられる。この形の  $k=2$  の場合は著者によって文献 10) に報告されている。

図-6



横桁は主桁間にいちように分布しているものと考えているのであるから、単位角度当り主桁との間に働いている垂直反力  $w_k$ 、ねじりモーメント  $m_k T$  は図-6 に示したように

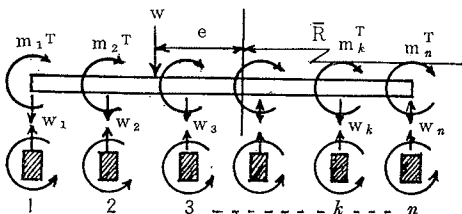
$$\left. \begin{aligned} w_k &= \frac{T_k}{R_k K} M - \left( \frac{C_{bk}}{R_k K} + \frac{K_k}{K} \right) M'' + \frac{T_k \bar{R}}{K_k} (\beta'' + \beta) \\ &+ \left\{ \frac{K_k}{K} (\bar{R} - R_k) - \frac{C_{bk} \bar{R}}{R_k} \right\} (\beta'''' + \beta'') \\ - m_k T &= \left( \frac{K_k}{K} + \frac{T_k}{R_k K} \right) M - \frac{C_{bk}}{R_k K} M'' \\ &+ \left\{ \frac{T_k \bar{R}}{R_k} - \frac{K_k}{K} (R_k - \bar{R}) \right\} (\beta'' + \beta) \\ &- \frac{C_{bk} \bar{R}}{R_k} \left\{ (\beta'''' + \beta'') \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

と変形より与えられる。横桁は一般には主桁間にいちように分布しているわけではないから、各横桁は横桁間に働いている分をそれぞれ受けもつとと考えて計算する。

また主桁が全体として受ける曲げモーメントと桁の変形との関係は次式で与えられる。

$$M = K(v'' - \bar{R} \beta) \dots \dots \dots (64)$$

図-7



ここで  $v$  は  $r = \bar{R}$  軸での変位である。

#### 4. あとがき

薄肉断面の直ばりと同様に、曲げ応力度の計算には薄板のせん断変形を考えず、またねじりに対しては断面のそりの変化によって生じる直応力度に対してもせん断変形を考えないという手法によって薄肉曲りばりの解析を行なったものである。もちろん曲りばりでははり軸方向の母線間に応力が働き、曲率半径方向の応力度を生じるが、一般断面でこの値を正確に計算するのは困難であるし、断面の変形防止に入っているダイヤフラムの影響を正確にとり入れるのも困難なので省略して計算した。この曲率半径方向に生じる応力によってI形桁などでは横桁間で突然の変形を起し、その面内でかなりの曲げ応力を生じるがその値は文献 9) などに述べた方法などにより近似的に計算できる。箱形断面の桁のカバープレートに働くこの応力は文献 5) などの公式を準用して近似的に求めることができるものと思われる。

一般には主桁は曲りの影響を受けて同じ断面の直ばりよりたわみが大きいため、相対的に横桁の剛性が大きくなり、横桁の変形はあまり主桁に働く曲げモーメントに影響しないため、多主桁の曲線橋により近似で適用できるものと思われる。この形のものはすでに小松定夫助教授らによって発表されているものと一部類似のものとなったが、本論文の一般断面のもの同一の考えで処理できるのであえて報告した。多I形主桁合成曲線橋の場合にコンクリート床版に曲率半径方向の応力が働くのでその値の一応の目安をつけておくことも必要と思われる。

#### 参考文献

- 1) Timoshenk, S & Goodier J.N.: "Theory of Elasticity" McGraw-Hill, 1951.
- 2) 倉西正嗣: "応用弾性学", 共立, 1953.
- 3) 大野 諫: "曲線の剪断応力度および半径方向の垂直応力度に対する新公式", 土木学会誌 37 巻7号, 1952.
- 4) 大野 諫: "鋼ラーメン隅角部の応力度分布", 土木学会誌 39 巻2号, 1954.
- 5) 大野 諫: "曲りばりの半径方向の垂直応力度公式", 土木学会誌 39 巻1号, 1954.
- 6) Biezeno, C.B. & Grammel, R.: "Technische Dynamik" Springer, 1939.
- 7) Anderson, C.G.: "Flexural stresses in curved beams of I and box-sections", 1950, Applied Mechanics, London.
- 8) Troy, E.V.: "Deflection of Circular Beams Resting on Elastic Foundations Obtained by Methods of Harmonic Analysis", Journal of Applied Mechanics 1953 June.
- 9) 平井・倉西: "曲線橋の理論について", 土木技術, 13 巻7号, 1958.
- 10) 平井・倉西: "曲線橋について", 第4回日本道路会議論文集, 1957.
- 11) 倉西・鎌田: "白糸曲線橋架橋工事およびその他について", 土木技術 13 巻8号, 1958.
- 12) Wansleben, E.H.F.: "Die Theorie der Drillfestigkeit von Stahlbanteilen", Stahlbau, 1956
- 13) Cutts, C.E.: "Horizontal Curved Box Beams, A.S. C.E., No. 128, 1952.
- 14) 倉西 茂: "水平横荷重を受けるアーチ橋について", 土木学会論文集 73 号, 1961.
- 15) 倉西 茂: "曲線格子桁の解法", 土木学会論文集 76 号, 1961.
- 16) 小西・小松: "薄肉曲線桁の基礎理論", 土木学会論文集 87 号, 1962.

(1964.2.5・受付)