

斜格子斜桁橋の主桁の曲げモーメントの計算に関する研究

ON CALCULATING THE LONGITUDINAL BENDING MOMENT OF SKEW GRILLAGE—SKEW GIRDER BRIDGES

藤尾 武明*・成岡 昌夫**
By Takeaki Fujio and Masao Naruoka

要 旨 両端単純支持の斜格子斜桁橋を、相対する2辺で単純に支持され、他の2辺で自由な斜交異方性平行四辺形板とみなし、著者の提案した斜交座標階差法を用いて、電子計算機によって数多くの数値計算を行ない、主桁方向の曲げモーメントの影響係数を求めた。この結果を利用して、斜格子斜桁橋に鋼道路橋設計示方書に示す荷重が載荷される場合、主桁の曲げモーメントが、stiffness parameter, torsional parameter, および, skew parameter によって、いかに低減されるかを、図表、および、簡単な計算式を用いて求める方法を提案した。

1. はし が き

格子桁構造の荷重分配横桁による荷重分配荷理論、あるいは、床板をもつ桁橋構造における荷重分配理論には、F. Leonhardt, H. Homberg, Y. Guyon-Ch. Massonnet らの研究があり、直桁橋の設計計算にあたるものにとって便利のように、公式、図表が提示されている。斜桁橋の場合について、上記の研究に匹敵するものとしては、T.Y. Chen, C.P. Siess, N.M. Newmark らの研究¹⁾があるにすぎなかった。この点にかんがみ、著者は、Y. Guyon, Ch. Massonnet らと同じ出発点にたつて、直交異方性平行四辺形板の数値解析法の研究を行ない、電子計算機による数多くの数値計算の結果を用いて、直格子斜桁橋の曲げモーメントの値を合理的に計算しうる簡易式を提案した²⁾。

斜桁橋に関する上記の2つの研究のうちで、前者は5本の主桁が床板をささえている場合に限られ(横桁・対傾構による荷重分配は考慮しない)、また、後者は、横桁あるいは対傾構が主桁に直角に入っている場合に限られる(床板の影響はとり入れることができる)。しかしながら、斜桁橋においては、横桁あるいは対傾構が主桁に対してある傾斜をもっているような場合も当然ありうるが、このような場合には、直交異方性平行四辺形板理論は適用できない。このような場合への応用を目的として、李国家(Lie, Kuo-Hao)は、斜交異方性平行四辺形板理論³⁾を誘導し、福知・山本・成岡はその数値解析

法を研究した⁴⁾。

斜桁橋の設計において、横桁あるいは対傾構を主桁に直角に入れるか、あるいは、橋台・橋脚に平行にして主桁にある傾角をもって入れるかのいずれがよいかは、常におこる問題であるが、この解決は与えられていないように思う。直格子斜桁橋の場合に対しては、主桁の曲げモーメントの計算に一応の目安を与えた⁵⁾ので、斜格子斜桁橋に対しても、斜交異方性平行四辺形板理論の応用によって主桁の曲げモーメントの簡易計算式を提案して、斜格子斜桁橋の設計に役立たせようとした。

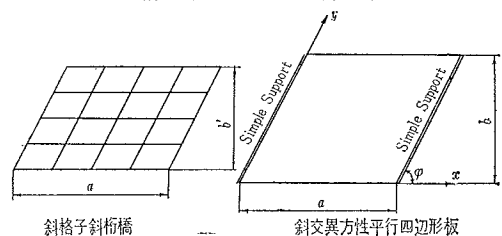
2. 斜交異方性平行四辺形板の斜交座標階差法による数値解析法の概要

斜格子斜桁橋を斜交異方性平行四辺形板とみなす。解析の対象とするのは、図一1のような、相対する2辺で単純支持され、他の2辺で弾性はり支持、あるいは、自由な斜交異方性平行四辺形板である。斜交異方性板のたわみ曲面の微分方程式は、図のような斜交座標 x, y に対して、

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{13} + D_{31}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (D_{12} + D_{21} + 4D_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(D_{23} + D_{32}) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = ps^4, \quad (s: \sin \varphi, p: \text{単位面積あたりの荷重強度}) \dots\dots\dots (1)$$

となる。 D_{ik} の値は文献3), 4)に与えられている。この微分方程式を階差法によって数値解析するために、平行四辺形板を単純支持辺と縁ばり(あるいは、自由辺)に平行な skew network によっておおい、a) 一般の内点、b), c) 左(右)の単純支持辺の近傍の内点、d) 自由辺近傍の内点、e), f) 左(右)の単純支持辺と自由辺

図一1 斜格子斜桁橋と斜交異方性平行四辺形板



* 正員 桜田機械工業 KK 技術部, 名古屋大学研究生
**正員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学教室

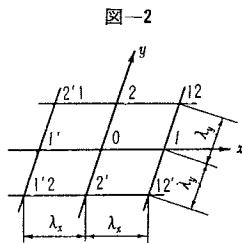
(縁ばり)によってかこまれる鈍(鋭)角隅の内点, g) 自由辺(縁ばり)上の一般点, h), i) 単純支持辺近傍の縁ばり上の点, の合計9種類の点について, 上記のたわみ曲面の微分方程式を階差方程式によって表わす。たわみ w に乗ずべき係数は, 板理論においてふくまれるすべてのポアソン比を0と仮定すると,

$$\alpha = \sqrt{\frac{B_y}{B_x}}, \quad \kappa = \frac{2K_{xy}}{\sqrt{B_x \cdot B_y}}, \quad J = \frac{EJ_R}{B_x \lambda_y} \cdot K^4,$$

$$K = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}, \quad s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi \quad \dots\dots\dots (2)$$

の6つの関数である (B_x, B_y, K_{xy} については, 文献3), 4) に与えられている)。

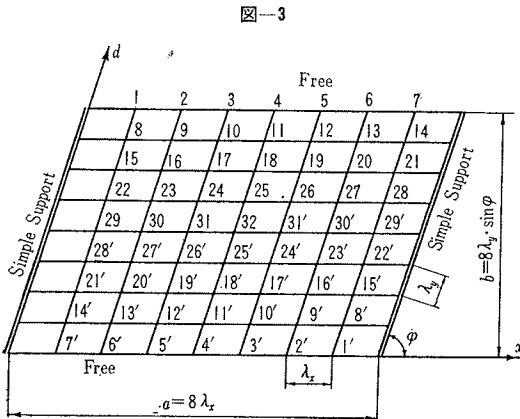
skew network の各点について, 上記の9つの階差方程式によって, 多元連立一次方程式をつくる。たとえば, スパン(幅員)方向を $m(n)$ 等分する場合には, $(m-1) \cdot (n+1)$ 元の連立一次方程式となる。この多元連立一次方程式の係数行列の逆行列を求めると, これがたわみの影響係数の値を与える。これを用いて, 主桁方向の曲げモーメントの影響係数の値は, すべてのポアソン比を0と仮定して, 図-2 に対しては, 次式で求められる。



$$(M_x)_0 = -B_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{K^2}{\lambda_y^2} B_x (w_1 - 2w_0 + w_{1'}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

3. たわみ, および, 曲げモーメントの影響係数の計算

たわみ, および, 曲げモーメントの影響係数の計算に用いた skew network は, 図-3 のように, $m=n=8$ であって, この skew network に対して, つぎの parameter の種々の値の組み合わせについて, 計算を行なった。



$J=0$ (自由辺の場合); $\alpha=1, 1/4, 1/9$;
 $\kappa=0, 0.5, 1.0$; $K=1, 0.75$; $\varphi=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

ところで, $m=n=8$ であるから, $(m-1)(n+1)=63$ 元の係数行列の逆行列がたわみの影響係数の値を与え, 式(3)から, 曲げモーメントの影響係数の値を計算する。なお, a) 9つの階差方程式の係数値の計算, b) stiffness matrix の係数行列の完成, c) 逆マトリックスの subroutine との linkage による flexibility matrix の計算, d) 曲げモーメントの影響係数の計算, をすべて名古屋大学電子計算機 NEAC-2203 で自動的に行なうよう program した。この計算においては, $m=n=8$ の場合, 1つの case に対する各段階の演算, ならびに, 印刷に要する時間は, つぎのとおりである。

- a) たわみの項 w にかかる 26 種の係数の計算, ならびに, 印字 約1分
- b) 係数行列の作成 3分
- c) 逆行列 (63元) の計算 32分, 印刷 3分 (line printer による)
- d) 曲げモーメントの影響係数の計算, ならびに, 印刷 (line printer による) 4分

合計 約 45 分を要するが, その 2/3 以上は 63 元の逆マトリックスの計算である {文献 1} では, 63 元の逆マトリックスの解法のかわりに, 対称, 逆対称荷重の場合にわけて, 32 元, 31 元の逆マトリックスを求め, その結果を加減するようにしている}。

さて, 階差方程式の右辺は, $\bar{p}_0(s \lambda_y) / B_x$ (p_0 は分布荷重の場合の強度) であるから, 集中荷重の場合に対しては, $\bar{p}_0 = P / \lambda_x \cdot (s \lambda_y)$ となり, $K = \lambda_y / \lambda_x, \lambda_x = a/8$ を考慮して, つぎのようになる。

$$[\text{stiffness matrix}][w] = \frac{P}{\lambda_x \lambda_y \cdot s} \cdot \frac{(s \lambda_y)^4}{B_x}$$

$$= \frac{Pa^2}{K' \cdot B_x} \cdot \frac{s^4 K^4}{64} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし, $K' = K \cdot s$ である。

したがって, 階差方程式の両辺に $64/s^4 K^4$ を乗じて, 係数行列を作成しておく, たわみの影響係数の単位は, $Pa^2 / K' \cdot B_x$ となる。また, 曲げモーメントの影響係数は, 式(3)からわかるように,

$$(M_x)_0 = \frac{K^2}{\lambda_y^2} B_x \cdot \frac{Pa^2}{K' B_x} (w_1 - 2w_0 + w_{1'})$$

$$= 64 \cdot \frac{P}{K'} (w_1 - 2w_0 + w_{1'}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となるから, $(w_1 - 2w_0 + w_{1'})$ の値を 64 倍したものが曲げモーメントの影響係数となり, その単位は P/K' である。

4. 主桁の曲げモーメントの計算

以上のようにして求めた曲げモーメントの影響係数と, 鋼道路橋設計示方書に定められている等分布荷重

(p), および, 線荷重 (q) とを用いて, 斜交異方性平行四辺形板のスパン中央断面の曲げモーメントの値を計算する。

曲げモーメントの影響係数の単位は, 前述のように $P/K'(K'=K \cdot s)$ であり, $\lambda_x = a/8$ を考慮して,

等分布荷重 (p) の場合 $P/K' = p \lambda_x (s \lambda_y) / K' = pa^2/64$

線荷重 (q) の場合 $P/K' = q (s \lambda_y) / K' = qa/8$

となる。曲げモーメントの影響係数の数値にこれらの値を乗じて, 斜交異方性平行四辺形板としての曲げモーメントの値が求められる。これを M 板で表わす。すなわち, M 板 = $\{\Sigma(\text{曲げモーメントの影響係数の値})\} \{(pa^2/64), \text{または}, (qa/8)\}$ となる。つぎに, 斜格子斜桁橋のある主桁を単独桁とみなした場合の主桁の曲げモーメントの幅員方向の単位長さあたりの値は,

等分布荷重 (p) の場合 $pa^2/8$

線荷重 (q) の場合 $qa/4$

であり, これを M 桁 で表わす。

さて, 以上のようにして求めた2つの曲げモーメントの関係をしらべるために, つぎのようにおく。

$k = M \text{ 板} / M \text{ 桁} \dots\dots\dots(6)$

いま, 等分布(線)荷重の場合の Σ (曲げモーメントの影響係数の数値) を $m(m')$ で表わすものとすると,

等分布荷重の場合 $k = m/8 \dots\dots\dots(7)_1$

線荷重の場合 $k = m'/2 \dots\dots\dots(7)_2$

となる。以上のようにして, 等分布荷重, 線荷重に対する k の値を, 式 (7) より求めておく。

つぎに, Guyon-Massonnet の研究におけるように, 図-1 のように縁桁間隔 b' のかわりに, 仮想の板幅 b をとって,

$$\beta = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{B_y}{B_x}} = \frac{b}{a} \sqrt{\alpha} \dots\dots\dots(8)$$

なる parameter をあらたに導入する。 $\phi = 90^\circ$ (直橋) の場合に対しては, Guyon-Massonnet によって定義された stiffness parameter $\theta = (b/2a) \cdot (B_x/B_y)^{1/4}$ との関係は,

$$\beta = 2\theta \sqrt{\frac{B_y}{B_x}} = 2\theta\alpha$$

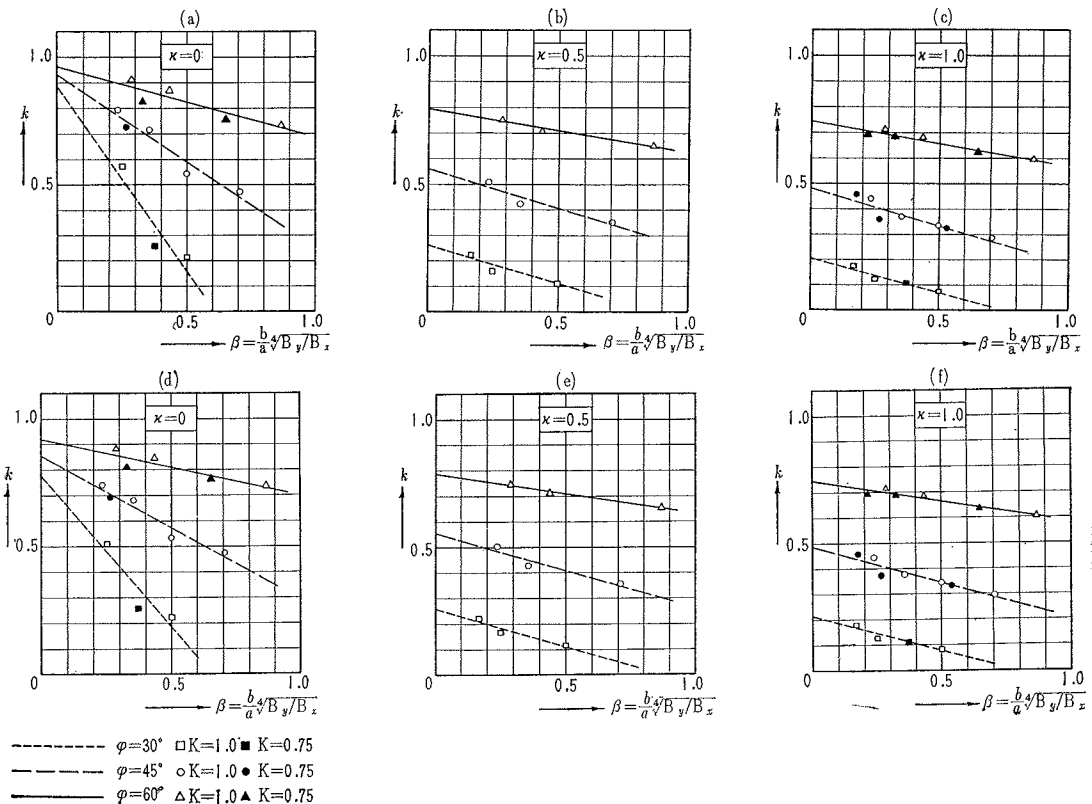
となる。

さて, β を横軸に, k を縦軸にとって, $\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ; \kappa = 0, 0.5, 1.0$ 別に, 所要の点を plot してみる。図-4 (a)~(c), (d)~(f) は, それぞれ等分布荷重, および, 線荷重載荷の場合の, 板の中心点 32 における k - β 曲線を示す。これより, k - β 座標上の諸点は, ほぼ直線点に分布するものとみなしうるから,

$$k = -A\beta + B \dots\dots\dots(9)$$

なる一次式で近似させることにする。

図-4 板の中心点に対する k - β 曲線
(a)~(c) 等分布荷重の場合, (d)~(f) 線荷重の場合



たとえば、等分布荷重載荷の場合の $k-\beta$ 直線は、つぎのようになる。

φ	$\kappa = 0$		$\kappa = 0.5$		$\kappa = 1.0$	
	A	B	A	B	A	B
30°	1.434	0.887	0.298	0.261	0.267	0.209
45°	0.676	0.928	0.306	0.560	0.293	0.484
60°	0.277	0.963	0.190	0.795	0.175	0.749

したがって式(9)における定数 A, B が既知となる。

つぎに、この等分布荷重載荷の場合の A, B を縦軸に、斜角 φ を横軸にとって、 $\kappa=0, 0.5, 1.0$ 別に表示したのが、図-5である。ここで、 $\varphi=90^\circ$ (直橋)の場合の A, B の値は Guyon-Massonet の方法より算出したものである。

なお、線荷重載荷の場合の $A, B-\varphi$ 曲線も、等分布荷

図-5 等分布荷重の場合の $A, B-\varphi$ 曲線 (格点32)

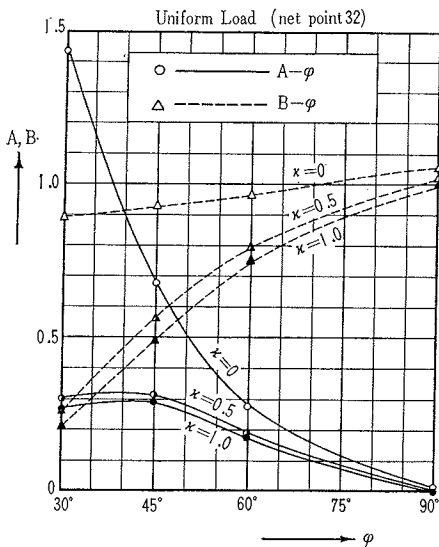
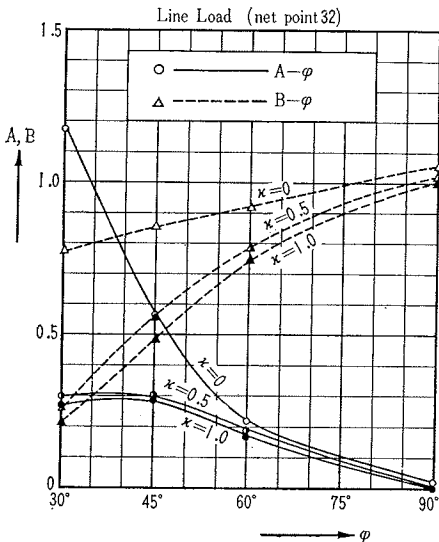


図-6 線荷重の場合の $A, B-\varphi$ 曲線 (格点32)



重載荷の場合と同様にして求められる。これを、図-6に示す。

縁桁のスパン中点に対して、同様の $A, B-\varphi$ 曲線を求めるために、格子点 11 に対して、全く同様の操作を行なった。この結果を、図-7, 8 に示す。

さて、これらの図、式を用いて、等分布(線)荷重載荷の場合の、たとえば板の中心における、主桁方向の曲げモーメントを求めることができるが、これを要約すると、つぎのようである。

- 1) 斜格子, 斜桁橋を斜交異方性平行四辺形板とみなす。
- 2) 与えられた板の寸法, a, b , および, 曲げ剛度 B_x, B_y より

図-7 等分布荷重の場合の $A, B-\varphi$ 曲線 (格点11)

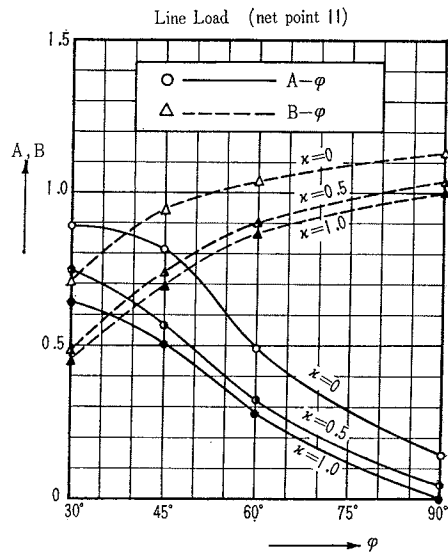
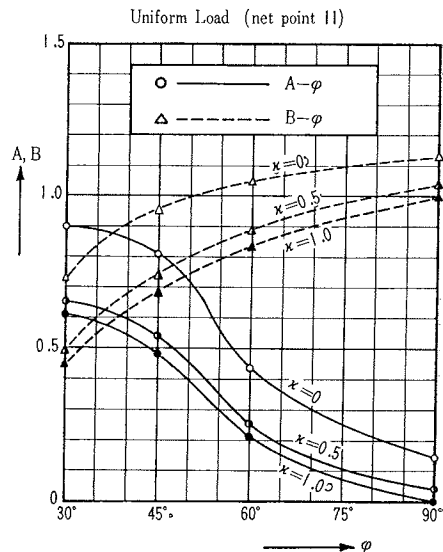


図-8 線荷重の場合の $A, B-\varphi$ 曲線 (点11)



$$\beta = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{4B_y}{B_x}}$$

を計算する。また、 κ の値を、計算に求めるか、あるいは、仮定する。

3) 図-5, 6より, 等分布(線)荷重載荷の場合の, 斜角 φ に応ずる A, B を求める。 $\kappa=0, 0.5, 1.0$ の場合は, 図よりただちに求めることができるが, κ の任意の値 ($0 < \kappa < 1.0$) に対しては, $\kappa=0, 0.5, 1.0$ の3つの値をもととする内挿法公式によって求める。

4) A, B が求められると,

$$k = -A\beta + B$$

によって, k の値を計算する。

5) 単純ばりとしての等分布(線)荷重載荷の場合の(スパン)中点の曲げモーメント(幅員方向単位長さあたり) M 桁を求め,

$$M_{板} = k \cdot M_{桁}$$

によって, 斜交異方性平行四辺形板としての板中心の曲げモーメント $M_{板}$ が求められる。

6) $M_{板}$ に桁間隔を乗ずることによって, 斜格子斜桁橋の中央桁の主桁方向の曲げモーメントを求めることができる。

以上の 図-5, 6 は, 板の中心点に対するもの, 図-7, 8 は縁桁の中点に対するもののみであり, 他は紙面の都合上省略した。したがって, 上記の方法によって計算したものは, 橋軸中心線にそう主桁, ないしは, すぐ横の主桁, および, 縁桁に対して適用され, 一般の主桁には適用しえない。しかし, 以上の方法によって計算された活荷重曲げモーメント, および後死荷重曲げモーメントに, 前死荷重曲げモーメントを加えた全曲げモーメントに対して断面を決定し, ついで Guyon-Massonnet の方法による直格子直桁橋の設計の場合にならって, 各桁の断面を適当に仮定する。このようにして仮定した断面を用いて, 改めて, 曲げモーメントの影響係数を算定して, 曲げモーメントを求めるとよい。著者らの提案した方法は, 概略設計に役立つと思う。

5. 近似式による値と解析値との比較

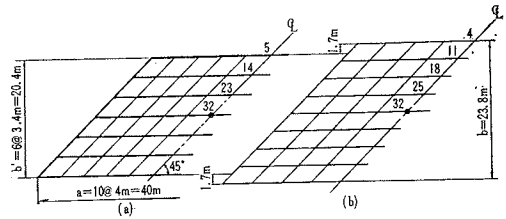
著者らは, 寡聞にして, 合理的な計算法で設計された斜格子斜桁橋のあることを知らない。著者の手元に, 斜格子斜桁橋を斜交異方性平行四辺形板とみなして, 曲げモーメントの影響係数の値を階差法によって求めた資料が2つある。これを用いて計算した値を解析値とみなし, 近似式によって計算した値(近似値)と比較しよう。

a) 第1例(図-9) 数値計算に用いた諸元はつぎのとおりである。

$a=40\text{ m}, b'=6 @ 3.4\text{ m}=20.4\text{ m}, B_x=17.700E_s,$
 $B_y=870, E_s, \varphi=45^\circ, \kappa=0$ (仮定)

この斜格子斜桁橋を斜交異方性平行四辺形板とみなし

図-9



て数値計算するために, netline を主桁にあわせるようにして, 図(a)のような skew network をくみ, スパン方向を $m=10$ 等分, 幅員方向を $n=6$ 等分した。斜交異方性平行四辺形板が縁ばりで弾性支持されていると考えて, $J=0.367$ とした。この計算法によるものが, ここにいう解析値である。

一方, Guyon-Massonnet 流に考えて, 縁ばりから, はり間隔の $1/2$ ずつ外方へとって, 平行四辺形板としての幅を考えると, $b=7 @ 3.4=23.8\text{ m}$ となる。この $a=40\text{ m}, b=23.8\text{ m}$ の平行四辺形板に $m=n=8$ の skew network をくむと, 図(b)のようになる。図(a)の格点 32 (中央桁のスパン中点) と図(b)の格点 32 (板の中心点) とは一致する。

式(8)より

$$\beta = (b/a) \cdot (B_y/B_x)^{1/4} = (23.8/40) \cdot (870/17.700)^{1/4} = 0.280$$

等分布荷重に対しては, $\varphi=45^\circ, \kappa=0$ より $A=0.675, B=0.930$ となる。したがって,

$$k = -A\beta + B = -0.675 \cdot 0.280 + 0.930 = 0.741 (0.723)$$

線荷重に対しては, $\varphi=45^\circ, \kappa=0$ より, $A=0.565, B=0.855$ となる。したがって,

$$k = -A\beta + B = -0.565 \cdot 0.280 + 0.855 = 0.697 (0.678)$$

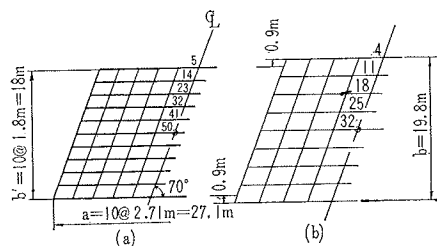
() 内の値はいわゆる解析値を示す。

b) 第2例(図-10) 数値計算に用いた諸元はつぎのとおりである。

$a=27.1\text{ m}, b'=10 @ 1.8\text{ m}=18.0\text{ m}, B_x=1784 E_s,$
 $B_y=86 E_s, \varphi=70^\circ, \kappa=0.25$ (仮定), $J=0.102$

この斜格子斜桁橋を斜交異方性平行四辺形板とみなして数値解析するために, netline を主桁にあわせるように

図-10



して、図(a)のような skew network をくみ、スパン方向を $m=10$ 等分、幅員方向を $n=10$ 等分した。斜交異方性平行四辺形板が縁ばりで弾性支持されていると考えて、 $J=0.102$ とした。この計算法によるものが、ここにいう解析値である。

一方、Guyon-Massonnet 流に考えて、図(b)のように、 $b=11 @ 1.8=19.8$ m の平行四辺形を考える。これに $m=n=8$ の skew network をくむと、図(b)のようになる。図(a)の格点 50 と図(b)の格点 32 とは一致する。

式(8)より

$$\beta = (19.8/27.1) \cdot (86/1.784)^{1/4} = 0.342$$

等分布荷重に対しては、 $\varphi=70^\circ$ の場合、 $\kappa=0$ のとき、 $A=0.165$, $B=0.990$; $\kappa=0.5$ のとき、 $A=0.120$, $B=0.880$; $\kappa=1.0$ のとき、 $A=0.105$, $B=0.850$ である。したがって $\kappa=0.25$ の場合は、内挿法公式により、 $A=0.139$, $B=0.925$ となる。ゆえに $\varphi=70^\circ$, $\kappa=0.25$ の場合には

$$k = -0.139 \cdot 0.342 + 0.925 = 0.877 (0.857)$$

線荷重に対しては、 $\varphi=70^\circ$ の場合、 $\kappa=0$ のとき、 $A=0.140$, $B=0.970$; $\kappa=0.5$ のとき、 $A=0.125$, $B=0.890$; $\kappa=1.0$ のとき、 $A=0.105$, $B=0.850$ である。したがって、 $\kappa=0.25$ の場合は、内挿法公式により、 $A=0.133$, $B=0.925$ となる。ゆえに、

$$k = -0.133 \cdot 0.342 + 0.925 = 0.880 (0.862)$$

() の値は、いわゆる解析値である。

以上2つの例において、解析値は縁ばりの弾性を考慮した値、近似値は自由辺の条件を用いた値である。Massonnet によれば、弾性支持の縁ばりの影響は幅 b を Massonnet 流にとることによって、そう大きくはならないことが示されている。特に、この例にみるように板の中心では、影響は微小であると思われる。このように考えると、著者の近似式、および、図表は、おおむね、よい結果を与えるものと考えてさしつかえないであろう。

6. む す び

著者は、山本知弘、福知 脩の両氏とともに、斜交異

方性板の数値解析法を提案したが、さらに、6つの基本値 ($\alpha, \kappa, K, J, s, c$) と network の分割数 m, n を与えるだけで、板の曲げモーメントの影響係数を自動的に計算するプログラムを名古屋大学電子計算機 NEAC-2203 で完成し、 $m=n=8$ の場合について、基本値の種々の組み合わせに対して、数値計算を行なった。この結果を $k=M$ 板 / M 桁 の形に表わし、任意の stiffness parameter β (式(8))、torsional parameter κ , skew angle φ に対する k の値を求める近似式、図表を与えた。また、この図表、近似式の使用例を示した。著者のこの方法は、斜格子斜桁橋の主桁の曲げモーメントに対して、一応の目安を与えるものにすぎないが、このような斜桁橋の概略設計にあたって寄与するところが少なくないと思う。

なお、ぼう大な数値計算に当られた名古屋大学電子計算機室の方々に対して、謝意を表する。

さて、斜桁橋の設計にあたって、直格子、斜格子のいずれが好ましいかは、よく質問される場所である。この点については、 k -値の比較のみでは十分でなく、実際の斜桁橋について、詳細な設計計算を行ない、図面をつくり、材料をひろって、比較すべきである。この点については、目下計画を進めているので、いずれ、参考となるような資料を発表したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) T.Y. Chen, C.P. Siess and N.M. Newmark: Studies of Slab and Beam Highway Bridges, Part 6; Moments in Simply Supported Skew I-Beam Bridges, Univ. of Illinois Bulletin, No. 439 (1957).
- 2) 藤尾・大村・成岡: 直格子斜桁橋の曲げモーメントに関する研究, 土木学会論文集, 第94号(昭38.6), pp. 7-11.
- 3) 李国豪: 斜交異性板の弯曲理論及其对斜橋の応用, 力学学報, 第2卷第1期(1958), pp. 78-88 (中国語).
Lie Kuo-Hao: Theorie der Schiefwinklig-Anisotropen Platte und ihre Anwendung auf Schiefe Brücken, Acta Mechanica Sinica, 2. 1 (1958), pp. 78-88 (概要のみドイツ語).
- 4) 成岡・山本・福知・岡田: 斜交異方性板の解析に関する研究, 土木学会論文集, 第78号(昭37.1), pp. 1-8.
M. Naruoka: Über die Berechnung schiefer anisotroper Platten, Bauingenieur, 37 (1962), S. 422-426.

(1963. 11. 20・受付)