

# 円弧部材をもつラーメンの立体解析\*

## THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF FRAMES WITH CURVED GIRDERS

山崎徳也\*\*・太田俊昭\*\*\*  
By Tokuya Yamasaki and Toshiaki Ota

### 1. 緒 言

立体ラーメンに用いられる曲線部材は形状よりこれを大別して、円弧、クロソイド、パラボラなどの平面曲線と円筒ら線などの空間曲線とに分類できる。本論文は前者のうちその一般性のゆえに最も多用される円弧部材を対象として、軸面に直角に荷重が作用する場合のいわゆる立体たわみ角式を導き、これを用いて多柱桁多層多スパンの立体円弧ラーメン橋や連続円弧格子橋など、すべての円弧部材をふくむラーメンに適用しうる一般的解法を誘導し、各種係数を数値化して実用に便ならしめた。

この分野の研究としては、古くはアーチの風圧解析を主題とする Müller-Breslau<sup>1)</sup>, Engesser<sup>2)</sup>, Hauraneck<sup>3)</sup>, Mörsch<sup>4)</sup>, Jakobsen<sup>5)</sup>, 大野<sup>6)</sup>氏などの最小仕事の原理を用いる方法や Unold<sup>7)</sup> の弾性曲線による解法などに始まり、国内では伴<sup>8)</sup>, 関本<sup>9)</sup>, 近藤<sup>10)</sup>, 倉西<sup>11)</sup>, 牧野<sup>12)</sup>, 島田<sup>13)</sup>, 小西<sup>14)</sup>, 小松<sup>14)</sup>の諸氏によりそれぞれ研究成果が発表され、また国外の主なるものとして、B. Velutini<sup>15)</sup> の節点変位を無視したかなり未熟なモーメント分配法や、F. Baron と J.P. Michalos<sup>16)</sup> の “Shear and Torsion Analogy” および H.H. Fickel<sup>17)</sup> の略算法などが見受けられるが、いずれも本研究とは内容を異にする。

すなわち、著者らの手法はエネルギー法を基礎とし、誘導演算を簡易にするため弾性重心に不静定力を作用させ、Castigliano の定理より求めた同点の変位を媒介として、材端の曲げおよびねじりモーメントと変位の関係を示す立体たわみ角式を求めるもので、その用途は円弧材をふくむラーメンのすべてを包含し、演算はたわみ角法における変形法形式を踏襲する。

### 2. 円弧部材の立体たわみ角式の誘導

一般に部材に作用する諸力は、部材をふくむ面内に働くものと、面に垂直な方向に作用する力とに分けられ、前者は在来の平面たわみ角式の範疇に属し、後者がこれから求めようとする立体たわみ角式を形成する。すなわち

構造を立体的に解析しようすれば、当然つりあい式を立てるに当って立体たわみ角式のみならず平面たわみ角式も必要となってくるが、後者は既往<sup>18), 19)</sup>の研究結果を利用すればよい。

ここで取り扱う円弧部材は等断面とし、その曲率があまり大きくななく、部材の微小部分に対して Navier の法则が成立するものと仮定する。

なお本法においては曲げモーメント、ねじりモーメントのほかにせん断力の影響も取り入れることとした。

図-1 のご

とく、半径  $r$ 、半開角  $\alpha$  の円弧部材 AB が直角固定座標  $x, y, z$  の  $x-y$  平面にあるものとし、部材上の任意点において部材に対する切線ならびに法線方向に  $t, r$  なる流动座標を考える。部材の弾性重心を  $G$  とし、これを原点とする直交座標  $X, Y, Z$  を規定する。

図-1

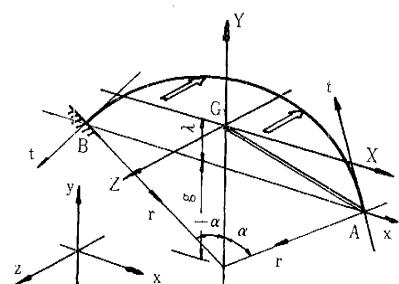
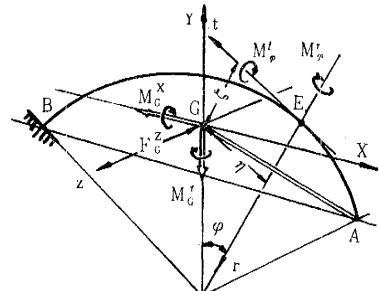


図-2



静定基本系として B 端固定の片持ばりを考え、G と A を剛構で結び、G 端にそれぞれ  $X, Y$  軸に関するモーメント  $M_G^X, M_G^Y$  やび Z 軸方向の力  $F_G^Z$  の 3 不静定力を加えると、部材上の中心軸に対して角度  $\varphi$  なる任意点 E における断面力は、次式で表わされる（図-2 参照）。

$$\begin{aligned} M_{\varphi}^r &= M_G^X \sin \varphi + M_G^Y \cos \varphi + F_G^Z \eta + M_0^r \\ M_{\varphi}^t &= M_G^X \cos \varphi - M_G^Y \sin \varphi - F_G^Z \zeta + M_0^t \\ F_{\varphi}^Z &= F_G^Z + F_0^Z \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

ただし  $\eta = (\lambda + g) \sin \varphi, g = r \cos \alpha$

\* 昭和 37 年 5 月第 17 回土木学会年次学術講演会に発表

\*\* 正員 工博 九州大学教授 工学部土木工学教室

\*\*\* 正員 九州大学大学院工学研究科修士課程在学

$$\zeta = r - (\lambda + \varphi) \cos \alpha, \quad \lambda = r(\sin \alpha / \alpha - \cos \alpha)$$

ここに  $M_{\varphi}^r, M_{\varphi}^t$  はそれぞれ E 点の  $r$  軸および  $t$  軸に関するモーメント成分を、 $F_{\varphi}^z$  は  $z$  軸方向の力を表わし、右辺の  $M_G^X, M_G^Y$  は負軸の方向に向かって右回りを正とし、 $M_{\varphi}^r, M_{\varphi}^t$  はこれらと反対に正軸方向に向かって右回りを正とする。また  $M_0^r, M_0^t$  および  $F_0^z$  は、中間荷重によって生じる E 点のモーメントおよびせん断力である。

式(1)の諸力によって生じるひずみエネルギーを  $W$  とすれば

$$W = \int_A^B \frac{(M_{\varphi}^r)^2}{2EI_r} ds + \int_A^B \frac{(M_{\varphi}^t)^2}{2GJ} ds + \int_A^B \frac{k'(F_{\varphi}^z)^2}{2GA} ds \quad (2)$$

ここに  $EI_r$ :  $r$  軸に関する曲げ剛性

$A$ : 断面積

$k'$ : 断面形状による定数で、例えば矩形断面で  $3/2$ 、円形断面で  $4/3$  となる。

$GJ$ : ねじり剛性を表わし種々の断面形状に対する  $J$  の式を付表-1 に示す。

つぎに  $G$  点の  $x$  軸、 $y$  軸に関する回転成分と  $z$  軸方向の変位成分をそれぞれ  $\theta_G^X, \theta_G^Y$  および  $\Delta_G^Z$  とすれば、Castiglano の定理より、つぎのごとく不静定量  $M_G^X, M_G^Y$  および  $F_G^Z$  の一次式で表わされる。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \theta_G^X &= \frac{\partial W}{\partial M_G^X} = \frac{S_0}{EI_r} (a_1 M_G^X \\ &\quad + b_1 M_G^Y + c_1 r F_G^Z + LX) \\ \theta_G^Y &= \frac{\partial W}{\partial M_G^Y} = \frac{S_0}{EI_r} (a_2 M_G^X \\ &\quad + b_2 M_G^Y + c_2 r F_G^Z + LY) \\ \Delta_G^Z &= \frac{\partial W}{\partial F_G^Z} = \frac{S_0 r}{EI_r} (a_3 M_G^X \\ &\quad + b_3 M_G^Y + c_3 r F_G^Z + LZ) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし  $s_0 = 2\alpha r$

式(3)の係数を算定した結果は 表-1 に示すごとく  $\alpha, \kappa_1$  および  $\kappa_2$  の関数となり、いずれも円弧の性状と断面形状とによって定まる定数であるが、部材の対称性により  $b_1 = a_2 = c_2 = b_3 = 0$  となる。

また  $LX, LY, LZ$  は中間荷重によって求められる荷重項の一種で、つぎのごとき値となる。

$$\left. \begin{aligned} LX &= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_0^r \sin \varphi d\varphi + \frac{\kappa_1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_0^t \cos \varphi d\varphi \\ LY &= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_0^r \cos \varphi d\varphi - \frac{\kappa_1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_0^t \sin \varphi d\varphi \\ LZ &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} LX - \frac{\kappa_1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_0^t d\varphi + \frac{\kappa_2}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} (r F_0^Z) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、重心  $G$  の変形成分と両材端 A および B のそれらとの関係をベクトルを用いて求めてみる。すなわち、両材端 A, B の  $r$  および  $t$  軸に関する回転成分を

表-1

$a_1$	$\frac{1}{2\alpha} ((\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + \kappa_1 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha))$	$a_3 = c_1$	$\frac{1}{2\alpha} [\phi_0 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + \kappa_1 (\phi_0 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin \alpha)]$
$b_2$	$\frac{1}{2\alpha} ((\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) + \kappa_1 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha))$	$c_3$	$\frac{1}{2\alpha} [\phi_0^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + \kappa_1 (2\alpha^2 - 4\phi_0 \sin \alpha + \phi_0^2 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)) + \kappa_2]$

$$\phi_0 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{また } \kappa_1 = \frac{EI_r}{GJ}, \quad \kappa_2 = \frac{k'EI_r}{r^2GA} \quad \text{で円弧の性状と断面の形状によって定まる定数である。}$$

それぞれ  $\theta_A^r, \theta_A^t$  および  $\theta_B^r, \theta_B^t$  とし、 $z$  軸方向の変位成分を  $\Delta_A^z$  および  $\Delta_B^z$  と表わす。

(a) 回転成分について

$$\begin{aligned} \theta_G^X &= \{(\theta_A^r)_x + (\theta_A^t)_x\} - \{(\theta_B^r)_x + (\theta_B^t)_x\} \\ \theta_G^Y &= \{(\theta_A^r)_y + (\theta_A^t)_y\} - \{(\theta_B^r)_y + (\theta_B^t)_y\} \end{aligned} \quad (5)$$

(b) 変位成分について

① 両材端 A, B の  $x$  軸に関する回転角  $\theta_A^x, \theta_B^x$  によって生じる重心  $G$  の変位は、それぞれ

$$\Delta_G^X = \lambda \theta_A^x, \quad \Delta_G^X = \lambda \theta_B^x$$

② 両材端 A, B の  $y$  軸に関する回転角  $\theta_A^y, \theta_B^y$  による重心  $G$  の変位は、またそれぞれ、

$$\Delta_G^Y = r \sin \alpha \theta_A^y, \quad \Delta_G^Y = r \sin (-\alpha) \theta_B^y$$

③ 両材端の  $z$  軸方向の変位による  $G$  点のそれは、それぞれ

$$\Delta_G^Z = -\Delta_A^Z, \quad \Delta_G^Z = -\Delta_B^Z$$

よって①②③の場合を合せ考えれば、所要の重心  $G$  と両材端 A, B の変位成分の関係式がつぎのごとく求められる。

$$\begin{aligned} -\Delta_G^Z &= (\Delta_G^X + \Delta_G^Y + \Delta_G^Z) \\ &\quad - (\Delta_G^X + \Delta_G^Y + \Delta_G^Z) \end{aligned} \quad (6)$$

一方、ベクトル解析より  $\theta^r, \theta^t$  と  $\theta^x, \theta^y$  についてつぎの関係式がえられる。

$$\begin{aligned} (\theta^r)_x &= \theta^r \sin \alpha, \quad (\theta^r)_y = \theta^r \cos \alpha, \\ (\theta^r)_x &= (\theta^t)_x + (\theta^t)_y, \quad (\theta^t)_x = \theta^t \cos \alpha, \\ (\theta^t)_y &= -\theta^t \sin \alpha, \quad \theta^y = (\theta^t)_y + (\theta^t)_y \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を式(5), (6)に代入して整頓すれば、つぎのごとく重心  $G$  と両材端 A, B の変位成分に関する式が導びかれる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_G^X &= U_1 X \theta_A^r + U_2 X \theta_A^t + U_3 X \theta_B^r + U_4 X \theta_B^t \\ \theta_G^Y &= U_1 Y \theta_A^r + U_2 Y \theta_A^t + U_3 Y \theta_B^r + U_4 Y \theta_B^t \\ -\Delta_G^Z/r &= U_1 Z \theta_A^r + U_2 Z \theta_A^t + U_3 Z \theta_B^r + U_4 Z \theta_B^t \\ &\quad - (\Delta_A^Z - \Delta_B^Z)/r \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } U_1 X &= U_3 X = \sin \alpha, \quad U_1 Y = -U_3 Y = \cos \alpha, \\ U_1 Z &= U_3 Z = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \\ U_2 X &= -U_4 X = \cos \alpha, \quad U_2 Y = U_4 Y = -\sin \alpha, \\ U_2 Z &= -U_4 Z = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \alpha}{\alpha} \end{aligned} \quad (9)$$

式(3)と式(8)の右辺を等置すれば、それぞれつきの諸式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{S_0}{EI_r} (a_1 M_G X + 0 + c_1 r F_G Z + L X) \\ = U_1 X \theta_A^r + U_2 X \theta_A^t + U_3 X \theta_B^r + U_4 X \theta_B^t \\ \frac{S_0}{EI_r} (0 + b_2 M_G Y + 0 + L Y) \\ = U_1 Y \theta_A^r + U_2 Y \theta_A^t + U_3 Y \theta_B^r + U_4 Y \theta_B^t \\ \frac{S_0}{EI_r} (a_3 M_G X + 0 + c_3 r F_G Z + L Z) \\ = U_1 Z \theta_A^r + U_2 Z \theta_A^t + U_3 Z \theta_B^r + U_4 Z \theta_B^t - R \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)を不静定量  $M_G X, M_G Y$  やび  $F_G Z r$  について連立に解けば、結局両材端の変形成分で表わしうることになる。

他方、材端モーメントは式(1)に示す任意点モーメントの特定値たることに着目し、かつたわみ角式としての符号に注意すれば、つきのごとく表現される。

$$\begin{aligned} M_{AB}^r &= M_{(\varphi=a)}^r = M_G X \sin \alpha \\ &\quad + M_G Y \cos \alpha + r F_G Z \phi_0 \sin \alpha \\ M_{AB}^t &= M_{(\varphi=a)}^t = M_G X \cos \alpha \\ &\quad - M_G Y \sin \alpha - r F_G Z (1 - \phi_0 \cos \alpha) \\ M_{BA}^r &= -M_{(\varphi=-a)}^r = -M_G X \sin (-\alpha) \\ &\quad - M_G Y \cos (-\alpha) - r F_G Z \phi_0 \sin (-\alpha) - M_0 B^r \\ M_{BA}^t &= -M_{(\varphi=-a)}^t = -M_G X \cos (-\alpha) \\ &\quad + M_G Y \sin (-\alpha) + r F_G Z (1 - \phi_0 \cos (-\alpha)) - M_0 B^t \end{aligned}$$

よって、前記式(9)より求めた不静定量を、それぞれ上式の右辺の各項に代入すれば、材端モーメントと材端変形の関係式が確定され、これが所要の立体たわみ角式にはかならない。

以上の演算結果を整理して、下記のごとく流動座標  $r, t$  に関する円弧部材の立体たわみ角式が最終的にえられる。

$$\begin{aligned} M_{AB}^r &= EK (\alpha_A^r \theta_A^r + \alpha_A^t \theta_B^r \\ &\quad + \gamma_A^r \theta_A^t + \delta_A^r \theta_B^t - \varepsilon_1 R) + C_{AB}^r \\ M_{BA}^r &= EK (\beta_B^r \theta_A^r + \alpha_B^r \theta_B^r \\ &\quad + \delta_B^r \theta_A^t + \gamma_B^r \theta_B^t - \varepsilon_1 R) + C_{BA}^r \\ M_{AB}^t &= EK (\gamma_A^t \theta_A^r + \delta_A^t \theta_B^r \\ &\quad + \alpha_A^t \theta_A^t + \beta_A^t \theta_B^t - \varepsilon_2 R) + C_{AB}^t \\ M_{BA}^t &= EK (\delta_B^t \theta_A^r + \gamma_B^t \theta_B^r \\ &\quad + \beta_B^t \theta_A^t + \alpha_B^t \theta_B^t + \varepsilon_2 R) + C_{BA}^t \end{aligned} \quad (10)$$

ここで  $R = (d_A Z - d_B Z)/r$  ..... (11)

$$\begin{aligned} C_{AB}^r &= -K (A_1 L X + B_1 L Y + C_1 L Z) \\ C_{BA}^r &= -M_0 B^r - K (A_1 L X - B_1 L Y + C_1 L Z) \\ C_{AB}^t &= -K (A_2 L X + B_2 L Y + C_2 L Z) \\ C_{BA}^t &= -M_0 B^t + K (A_2 L X - B_2 L Y + C_2 L Z) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし  $D = 8 \alpha^3 b_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1)$ ,  $K = 2 \alpha/D$ ,  $\varepsilon_1 = KC_1$ ,  $\varepsilon_2 = KC_2$ ,  $K = I_r/S_0$

式(10)中のたわみ角の係数  $\alpha_A^r, \beta_A^r, \gamma_A^r, \delta_A^r, \dots$  は表-4に示され、式(12)の  $A_1, B_1, C_1, \dots$  は表-2と表-3に示される無次元の定数であるが、せん断力の影響を考慮した精密値を表-2に示し、せん断力を無視した実用値を表-3に算出列記した。

ここで式(11)を用いて  $R$  を変位成分  $d_A Z, d_B Z$  で置きかえたうえ、式(10)に代入すれば、いわゆる変形公式がえられ次式となる。

$$\begin{aligned} M_{AB}^r &= EK \{ \alpha_A^r \theta_A^r + \beta_A^r \theta_B^r + \gamma_A^r \theta_A^t \\ &\quad + \delta_A^r \theta_B^t - \nu_1 (d_A Z - d_B Z) \} + C_{AB}^r \\ M_{BA}^r &= EK \{ \beta_B^r \theta_A^r + \alpha_B^r \theta_B^r + \delta_B^r \theta_A^t \\ &\quad + \gamma_B^r \theta_B^t - \nu_1 (d_A Z - d_B Z) \} + C_{BA}^r \\ M_{AB}^t &= EK \{ \gamma_A^t \theta_A^r + \delta_A^t \theta_B^r + \alpha_A^t \theta_A^t \\ &\quad + \beta_A^t \theta_B^t - \nu_2 (d_A Z - d_B Z) \} + C_{AB}^t \\ M_{BA}^t &= EK \{ \delta_B^t \theta_A^r + \gamma_B^t \theta_B^r + \beta_B^t \theta_A^t \\ &\quad + \alpha_B^t \theta_B^t + \nu_2 (d_A Z - d_B Z) \} + C_{BA}^t \end{aligned} \quad (13)$$

ただし  $\nu_1 = \varepsilon_1/r$ ,  $\nu_2 = \varepsilon_2/r$

表-2

$A_1$	$4 \alpha^2 b_2 (c_3 - \phi_0 a_3) \sin \alpha$	$B_1$	$4 \alpha^2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) \cos \alpha$	$C_1$	$4 \alpha^2 b_2 (\phi_0 a_1 - c_1) \sin \alpha$
$A_2$	$4 \alpha^2 b_2 (a_3 + c_3 \cos \alpha - \phi_0 a_3 \cos \alpha)$	$B_2$	$4 \alpha^2 (a_3 c_1 - a_1 c_3) \sin \alpha$	$C_2$	$4 \alpha^2 b_2 (\phi_0 a_1 \cos \alpha - c_1 \cos \alpha - a_1) \sin \alpha$

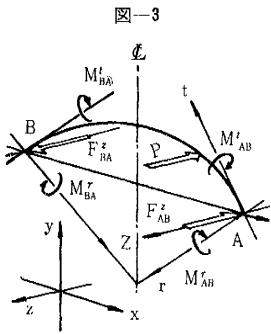
表-3

$D$	$2 \varepsilon_1 [(\alpha (\alpha^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)) + \varepsilon_1^2 (2 \alpha (d^2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)) + \varepsilon_1^2 (2 \sin \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) (d - \phi_0 \sin \alpha)) + \varepsilon_1^2 (2 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) (\alpha - \phi_0 \sin \alpha))]$
$A_1$	$\varepsilon_1 (2 \sin \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) (d - \phi_0 \sin \alpha)) + \varepsilon_1^2 (2 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) (\alpha - \phi_0 \sin \alpha))$
$B_1$	$\varepsilon_1 (2 \alpha \cos \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)) + \varepsilon_1^2 (2 \alpha \cos \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 4 \sin^2 \alpha \cos \alpha)$
$C_1$	$\varepsilon_1 (2 \sin^2 \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)) + \varepsilon_1^2 (2 \sin^2 \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha))$
$A_2$	$\phi_0 (\alpha^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) + \varepsilon_1 (2 \phi_0 \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + 2 \alpha^2 \cos \alpha - 2 \alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) + \varepsilon_1^2 (\phi_0 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)^2 + 2 \alpha^2 \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha) + 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha)$
$B_2$	$-\varepsilon_1 (2 \alpha \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)) - \varepsilon_1^2 (2 \alpha \sin \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 4 \sin^2 \alpha)$
$C_2$	$-(\alpha^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) - \varepsilon_1 (2 \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)) - \varepsilon_1^2 ((\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)^2)$

表-4

$\alpha_A^r = \alpha_B^r$	$A_1 U_1 X + B_1 U_1 Y + C_1 U_1 Z$	$\alpha_A^t = \alpha_B^t$	$A_2 U_2 X + B_2 U_2 Y + C_2 U_2 Z$
$\beta_A^r = \beta_B^r$	$A_1 U_3 X + B_1 U_3 Y + C_1 U_3 Z$	$\beta_A^t = \beta_B^t$	$A_2 U_4 X + B_2 U_4 Y + C_2 U_4 Z$
$\gamma_A^r = -\gamma_B^r$	$A_1 U_2 X + B_1 U_2 Y + C_1 U_2 Z$	$\gamma_A^t = -\gamma_B^t$	$A_2 U_1 X + B_2 U_1 Y + C_2 U_1 Z$
$\delta_A^r = -\delta_B^r$	$A_1 U_4 X + B_1 U_4 Y + C_1 U_4 Z$	$\delta_A^t = -\delta_B^t$	$A_2 U_3 X + B_2 U_3 Y + C_2 U_3 Z$

つぎに部材端のせん断力を求めれば、図-3の A 点における  $y$  軸に関するモーメントのつりあい式より B 端のせん断力  $F_{BAZ}$  が、B 点におけるそれより A 端のせん断力  $F_{ABZ}$  がそれぞれつきのごとくえられる。



すなわち

$$\left. \begin{aligned} F_{BAZ} &= \frac{1}{2r} (M_{AB}^r + M_{BA}^r) \cot \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2r} (M_{AB}^t - M_{BA}^t) + F_{0BAZ} \\ F_{ABZ} &= \frac{1}{2r} (M_{AB}^r + M_{BA}^r) \cot \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2r} (M_{AB}^t - M_{BA}^t) + F_{0ABZ} \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

ここに  $F_{ABZ}$ ,  $F_{BAZ}$  は中間荷重によって定まる値で、設計計算に必要なつぎの 3 種の荷重状態について求めればつぎのごとくである。

(a) 満載等分布荷重(図-5 参照)

$$F_{BA}Z = \frac{1}{l} \int_{-\alpha}^{\alpha} \omega r^2 (\sin \alpha - \sin \varphi) d\varphi = \alpha \times \omega r$$

$$F_{AB}Z = \frac{-1}{l} \int_{-\alpha}^{\alpha} \omega r^2 (\sin \alpha + \sin \varphi) d\varphi = -\alpha \times \omega r$$

(b) 单一集中荷重(図一6 参照)

$$F_{0AB}Z = -\frac{1}{l}(r \sin \alpha - r \sin \beta)P = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right) \times P$$

(e) ねじりモーメント荷重(図-7 参照)

$$F_{0BA}Z = -\frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \times m^t/r$$

これまでではすべて流動座標  $r, t$  を基準にして考察を進めんできたが、構造物の種類によってはむしろ固定座標  $x, y$  を基準とする式の方が使用に便利なこともあるので、つぎに固定座標  $x, y$  に対する立体たわみ角を求めてみる。すなわち、前記の立体たわみ角式を両座標間の方向余弦を用いて変換すればよく、その誘導はつきのこととし。あらためて式 (10) を行列を用いた式で表示すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} [M_{AB}] &= EK\{[\alpha_A][\theta_A] \\ &\quad + [b_A][\theta_B] - [\varepsilon_A]\mathbf{R}\} + [C_{AB}] \\ [M_{BA}] &= EK\{[\alpha_B][\theta_A] \\ &\quad + [a_B][\theta_B] - [\varepsilon_B]\mathbf{R}\} + [C_{BA}] \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

7717

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha' r^r \\ r^t \alpha^t \end{bmatrix}, \quad [\beta] = \begin{bmatrix} \beta^r \delta^r \\ \delta^t \beta^t \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_A] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

$$[\varepsilon_B] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad [C_{AB}] = \begin{bmatrix} C_{AB}^r \\ C_{AB}^t \end{bmatrix}, \quad [C_{BA}] = \begin{bmatrix} C_{BA}^r \\ C_{BA}^t \end{bmatrix}$$

一方  $r, t$  軸を  $x, y$  軸に変換する行列を  $[A]$ , その逆行列を  $[A]^{-1}$  とすれば

$$[\tilde{M}] = [A][M], \quad [\tilde{\theta}] = [A][\theta] \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

ここに  $\bar{M}, \bar{\theta}$  は固定座標に関するモーメントおよび回転角を表わす。

式(15)に式(16)を代入すれば、つぎのごとき固定座標に対する所要の立体たわみ角式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} [\bar{M}_{AB}] &= EK\{[\alpha_A][\bar{\theta}_A] \\ &\quad + [\bar{b}_A][\bar{\theta}_B] - [\bar{\varepsilon}_A]\mathbf{R}\} + [\mathcal{J}_A][C_{AB}] \\ [\bar{M}_{BA}] &= EK\{[\bar{b}_B][\bar{\theta}_A] \\ &\quad + [\alpha_B][\bar{\theta}_B] - [\bar{\varepsilon}_B]\mathbf{R}\} + [\mathcal{J}_B][C_{BA}] \end{aligned} \right\} \dots (17)_a$$

たまし

$$\begin{aligned} [\alpha_A] &= [A_A][a_A][A_A]^{-1}, \quad [\bar{b}_A] = [A_A][b_A][A_B]^{-1} \\ [A_A] &= \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \\ [A_B] &= \begin{bmatrix} \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \\ \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \end{bmatrix} \\ [\bar{a}_B] &= [A_B][a_B][A_B]^{-1}, \quad [\bar{b}_B] = [A_B][b_B][A_A]^{-1} \\ [\bar{\varepsilon}_A] &= [A_A][\varepsilon_A], \quad [\bar{\varepsilon}_B] = [A_B][\varepsilon_B] \end{aligned}$$

上式のマトリックス表示を慣用形式になおせば、以下に示す諸式となる。

$$\begin{aligned}
 M_{AB}^x &= EK(\alpha_A x \theta_A x + \beta_A x \theta_B x \\
 &\quad + \gamma_A x \theta_A y + \delta_A x \theta_B y + \varepsilon_1 R) + C_{AB}^x \\
 M_{BA}^x &= EK(\beta_B x \theta_A x + \alpha_B x \theta_B x \\
 &\quad + \delta_B x \theta_A y + \gamma_B x \theta_B y - \varepsilon_1 R) + C_{BA}^x \\
 M_{AB}^y &= EK(\tau_A y \theta_A x + \delta_A y \theta_B x \\
 &\quad + \alpha_A y \theta_A y + \beta_A y \theta_B y - \varepsilon_2 R) + C_{AB}^y \\
 M_{BA}^y &= EK(\delta_B y \theta_A x + \tau_B y \theta_B x
 \end{aligned} \tag{17}_b$$

$$+ \beta_B{}^y \theta_A{}^y + \alpha_B{}^y \theta_B{}^y - \tilde{\epsilon}_2 R) + C_{BA}{}^y \Biggr\}$$

$$\text{因此, } \bar{\varepsilon}_1 = -\varepsilon_1 \sin \alpha - \varepsilon_2 \cos \alpha, \quad \bar{\varepsilon}_2 = -\varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \sin \alpha$$

式中の形状項  $\alpha_A^x, \beta_A^x, r_A^x, \delta_A^x, \dots$  お

$\alpha A^x = \alpha B^x$	$\alpha A^t \sin^2 \alpha + \gamma A^t \sin \alpha \cos \alpha + \gamma A^t \cos \alpha + \alpha A^t \cos^2 \alpha$
$\beta A^x = \beta B^x$	$-\beta A^t \sin^2 \alpha + \delta A^t \sin \alpha \cos \alpha - \delta A^t \cos \alpha + \beta A^t \cos^2 \alpha$
$\gamma A^x = -\gamma B^x$	$\alpha A^t \sin \alpha \cos \alpha - \gamma A^t \sin^2 \alpha + \gamma A^t \cos^2 \alpha - \alpha A^t \sin \alpha \cos \alpha$
$\delta A^x = -\delta B^x$	$\beta A^t \sin \alpha \cos \alpha + \delta A^t \sin^2 \alpha + \delta A^t \cos^2 \alpha + \beta A^t \sin \alpha \cos \alpha$
$\alpha A^y = \alpha B^y$	$\alpha A^t \cos^2 \alpha - \gamma A^t \sin \alpha \cos \alpha - \gamma A^t \sin \alpha \cos \alpha + \alpha A^t \sin^2 \alpha$
$\beta A^y = \beta B^y$	$\beta A^t \cos^2 \alpha + \delta A^t \sin \alpha \cos \alpha - \delta A^t \sin \alpha \cos \alpha - \beta A^t \sin^2 \alpha$
$\gamma A^y = -\gamma B^y$	$\alpha A^t \sin \alpha \cos \alpha + \gamma A^t \cos^2 \alpha - \gamma A^t \sin^2 \alpha - \alpha A^t \sin \alpha \cos \alpha$
$\delta A^y = -\delta B^y$	$-\beta A^t \sin \alpha \cos \alpha + \delta A^t \cos^2 \alpha + \delta A^t \sin^2 \alpha - \beta A^t \cos \alpha \sin \alpha$
$C_{AB}^x$	$C_{AB}^t \sin \alpha + C_{AB}^t \cos \alpha$
$C_{BA}^x$	$-C_{BA}^t \sin \alpha + C_{BA}^t \cos \alpha$
$C_{AB}^y$	$C_{AB}^t \cos \alpha - C_{AB}^t \sin \alpha$
$C_{BA}^y$	$C_{BA}^t \cos \alpha + C_{BA}^t \sin \alpha$

### 3. 形 状 項

形状項  $\alpha^r, \beta^r, r^r, \delta^r, \alpha^t, \beta^t, r^t, \delta^t$  および  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, K$ などを数表化して、前記誘導たわみ角式の実用に便ならしめた。せん断力のこれら形状項における影響はきわめて小さいことを確認したので、実用を目的とする数表化に当たってはこれを無視した。また実用に供せられる構造用材の  $\kappa_1$  は、ほとんど  $1.0 \sim 4.0$  の範囲にあると思われるが、 $\kappa_1$  の値を  $1.0$  より  $0.1$  刻みで  $4.0$  まで変化させた。なお半開角  $\alpha$  は  $0.00$  より  $0.01$  刻みで  $\pi/2$  まで変化させてプログラムを組み、本学の電子計算機を使用して計算を行なったが、結果の一部を 図表-1～6 と 付表-2～8 に示して実用に供したと思う。

図表より、半開角  $\alpha$  が  $0$  に近づけば  $\alpha^r=4, \beta^r=2, r^r=\delta^r=0$  となり、周知の直線材たわみ角式の係数値と合致し、また  $\alpha^t=1/\kappa_1, \beta^t=-1/\kappa_1, r^t=\delta^t=0$  となり、直線材のねじり角式の係数に帰することが認められる。

この直線材のねじり角式は後で必要となるので、ここで求めておく。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^t &= EK(1/\kappa_1\theta_A^t - 1/\kappa_1\theta_B^t) + C_{AB}^t \\ &+ GJ(\theta_A^t - \theta_B^t)/l + C_{AB}^t \end{aligned} \right\} \cdots (18)$$

同様に  $M_{BA}^t = GJ(\theta_B^t - \theta_A^t)/l + C_{BA}^t$

つぎに、形状項  $\alpha^r, \beta^r, r^r, \delta^r, \alpha^t, \beta^t, r^t, \delta^t$  のもつ物理的意味を考察してみる。まず 図-4(a) のごとく、B点の  $r, t$  両方向ならびに A点の  $t$  方向の回転を固定し、A点の  $r$  方向のみヒンジとして回転を許し、 $\theta_A^r=1$  のたわみ角を与えたときに生じるモーメントを式(10)より求めれば、つぎのごとくえられる。

$$M_{AB}^r = \alpha_A^r EK, \quad M_{BA}^r = \beta_B^r EK$$

$$M_{AB}^t = \gamma_A^t EK, \quad M_{BA}^t = \gamma_B^t EK$$

ここで曲げ剛性  $EK=1$  とすれば、 $\alpha_A^r, \beta_B^r, \gamma_A^t, \gamma_B^t$  はかかる系において生じるモーメントを規制する値といえ、このような観点より 図表-1～4 を観察すれば、中心角が大きくなるにしたがって全体の傾向として曲げモーメントは減少し、逆にねじりモーメントが増すことが判読される。

また  $\alpha_A^t, \beta_B^t, \gamma_A^r, \gamma_B^r$

の諸値に対しては 図-4(b) の系が考えられ、同じく A点の  $t$  方向のみヒンジとして回転を許し、 $\theta_A^t=1$  を加えて次式をうる。

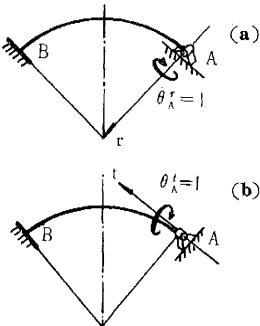
$$M_{AB}^r = \gamma_A^r EK$$

$$M_{BA}^r = \gamma_B^r EK$$

$$M_{AB}^t = \alpha_A^t EK$$

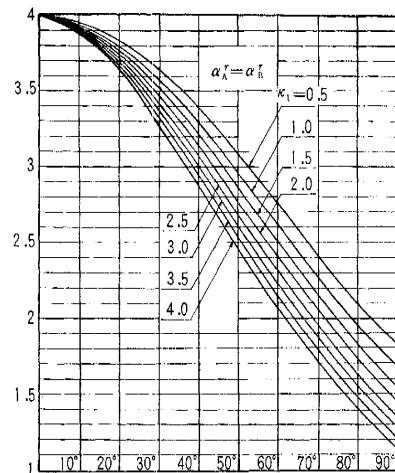
$$M_{BA}^t = \beta_B^t EK$$

図-4

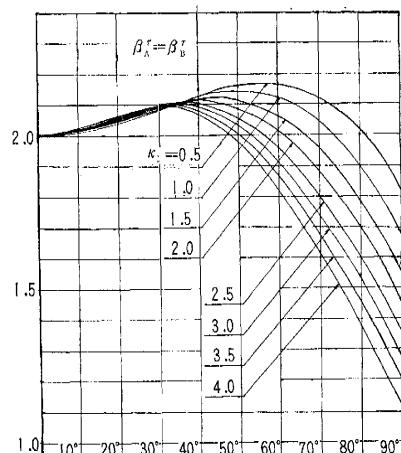


すなわち 図表-3～6 は、半開角  $\alpha$  が増せば、他端のねじりモーメントの減少率をはるかに上回って残りのモーメントが増大し、 $\alpha$  が増すにつれて材端における切線

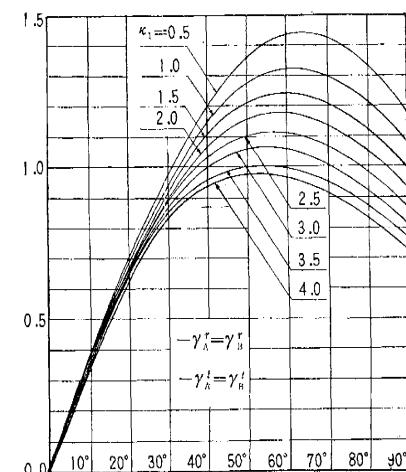
図表-1



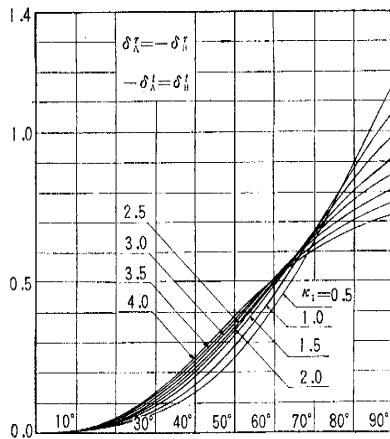
図表-2



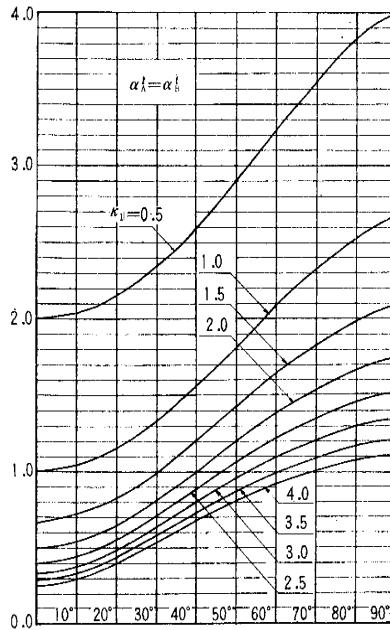
図表-3



图表 - 4



## 図表……5

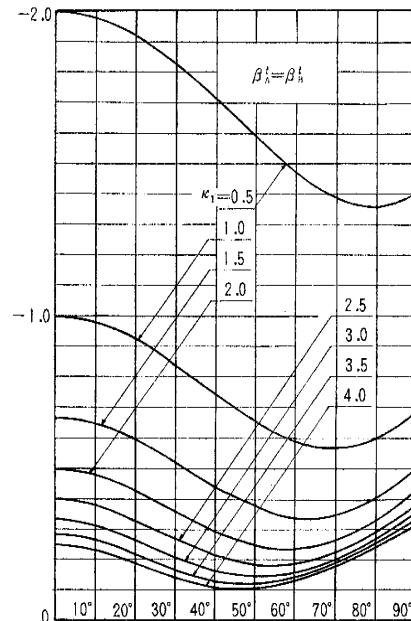


方向のねじり抵抗が大となって、切線方向にはねじりにくいという一般特性を示すことがわかる。上述の特性はいずれも常識的な予想を裏づけるもので、“モーメント分配法”の拡張を計る際などの物理的説明の一助となる。

#### 4. 荷重項

満載等分荷重と单一集中荷重が、それぞれ部材の軸面に垂直に働く場合と、ねじりモーメントが荷重として部材上任意点で、切線方向に作用する場合についての荷重項  $C_{AB}^r, C_{BA}^r, C_{AB}^t$  および  $C_{BA}^t$  を取り上げて、その算定法を述べるが、これら 3 種の荷重状態が設計に際して必要なことは前にも触れたが、満載等分布荷重は死荷重と風荷重を、单一集中荷重は活荷重を、ねじりモーメント

圖版一



ントは偏心荷重を想定している。

式(12)を参照すれば、 $C_{AB}^r, C_{BA}^r, C_{AB}^t, C_{BA}^t$  はすべて、 $L^x, L^y$  および  $L^z$  の諸係数と  $M_{AB}^r, M_{BA}^t$  との簡単な一次式で表わされており、しかも、これらの  $L^x, L^y, L^z, M_{AB}^r, M_{BA}^t$  は、いずれも作用する荷重の種類を問わず簡単に誘導されうる。

このことは、本たわみ角式の普遍性を一層高め、実用性を増すものといえる。荷重項の算定に当たっての静定基本系には、既述のごとく A 端自由、B 端固定の片持ぱりを選ぶ。

### (1) 滿載等分

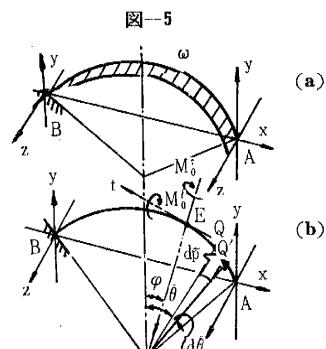
布荷重(図-5(a))

(b) 参照

図-5(b)において、A~E間に作用する等分布荷重による、任意点Eのモーメントおよびせん断力はつぎのごとく表わされる

$$\left. \begin{aligned} M_0^r &= \int_A^E dM_0^r = \int_A^E -\eta_0 d\bar{p} \\ M_0^t &= \int_A^E dM_0^t = \int_A^E -\zeta_0 d\bar{p} \\ F_0^z &= \int_A^E dF_0^z = \int_A^E d\bar{p} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (19)$$

上式に  $d\bar{p} = \omega ds = -\omega r d\theta$ ,  $\eta_0 = r \sin(\theta - \varphi)$ ,  $\zeta_0 = r\{1 - \cos(\theta - \varphi)\}$  なる関係を代入すれば次式となる。



$$\left. \begin{aligned} M_0^r &= \omega r^2 \{ \cos(\alpha - \varphi) - 1 \} \\ M_0^t &= \omega r^2 \{ \sin(\alpha - \varphi) - (\alpha - \varphi) \} \\ F_0^z &= \omega r^2 (\alpha - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (20)_a$$

よって、上式を式(4)に代入して、 $LX$ ,  $LY$  および  $LZ$  は次式で求められることになる。

$$\left. \begin{aligned} LX &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. - \kappa_1 \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \sin \alpha \right] \times \omega r^2 \\ LY &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha (2 - \cos^2 \alpha)\} \right. \\ &\quad \left. + \kappa_1 \{3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha)\} \right] \times \omega r^2 \\ LZ &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \sin^2 \alpha \right. \\ &\quad \left. + \kappa_1 \left\{ 2(\alpha^2 - \sin^2 \alpha) - \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \sin^2 \alpha \right\} \right. \\ &\quad \left. + \kappa_2 \{2\alpha^3\} \right] \times \omega r^2 \end{aligned} \right\}$$

また  $M_{0B}^r$  および  $M_{0B}^t$  は(20)<sub>a</sub> の式において  $\varphi = -\alpha$  としてえられ、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{0B}^r &= (\cos 2\alpha - 1) \times \omega r^2 \\ M_{0B}^t &= (\sin 2\alpha - 2\alpha) \times \omega r^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)_a$$

## (2) 単一集中荷重 (図-6 参照)

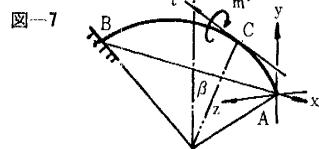
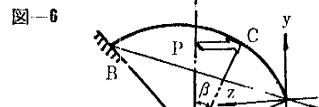
中心線より  $\angle\beta$  の点Cに单一集中荷重  $P$  が作用する時、部材に生じるモーメントおよびせん断力はつぎのごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} A \sim C \text{ 区間} : M_0^r &= M_0^t = F_0^z = 0 \\ C \sim B \text{ 区間} : M_0^r &= -Pr \sin(\beta - \varphi) \\ M_0^t &= -Pr \{1 - \cos(\beta - \varphi)\} \\ F_0^z &= P \end{aligned} \right\} \quad (20)_b$$

よって(1)と同様、式(4)より单一集中荷重に対する諸値がつぎのごとく算出される。

$$\left. \begin{aligned} LX &= \frac{1}{4\alpha} \left[ \{(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \} \right. \\ &\quad \left. + \kappa_1 \{(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \} \right. \\ &\quad \left. - 2(\sin \alpha + \sin \beta)\} \right] \times Pr \\ LY &= \frac{1}{4\alpha} \left[ - \{(\alpha + \beta) \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \} \right. \\ &\quad \left. + \kappa_1 \{2(\cos \alpha - \cos \beta) + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. - (\alpha + \beta) \sin \beta\} \right] \times Pr \\ LZ &= \frac{1}{4\alpha} \left[ \phi_0 \{(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \} \right. \\ &\quad \left. + \kappa_1 \{2(\alpha + \beta) - 2 \sin(\alpha + \beta) + \phi_0(\alpha + \beta) \cos \beta \right. \\ &\quad \left. + \phi_0 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - 2\phi_0(\sin \alpha + \sin \beta)\} \right. \\ &\quad \left. + \kappa_2(\alpha + \beta)\} \right] \times Pr \\ \text{および } M_{0B}^r &= -\sin(\alpha + \beta) \times Pr \\ M_{0B}^t &= \{\cos(\alpha + \beta) - 1\} \times Pr \end{aligned} \right\} \quad (21)_b$$

特に荷重  $P$  が中央点に作用する場合は、前式にて  $\beta = 0$  と置いて次式となる。



$$\left. \begin{aligned} LX &= \frac{1}{4\alpha} [\{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha\} + \kappa_1 \{(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha \} \\ &\quad - 2 \sin \alpha\}] \times Pr \\ LY &= \frac{1}{4\alpha} [-\{\sin^2 \alpha\} + \kappa_1 \{-2(1 - \cos \alpha) \\ &\quad + \sin^2 \alpha\}] \times Pr \\ LZ &= \frac{1}{4\alpha} [\phi_0 \{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha\} + \kappa_1 \{\phi_0(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha \} \\ &\quad - 2 \sin \alpha\} + 2(\alpha - \sin \alpha) + \kappa_2(\alpha)] \times Pr \\ \text{また } M_{0B}^r &= -\sin \alpha \times Pr, \quad M_{0B}^t = (\cos \alpha - 1) \times Pr \end{aligned} \right\} \quad (21)_c$$

## (3) ねじりモーメント荷重 (図-7 参照)

ねじりモーメント  $m^t$  が点Cにおいて、その切線(t軸)のまわりに作用する場合、部材に生じるモーメントおよびせん断力はつぎのごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} A \sim C \text{ 区間} : M_0^r &= M_0^t = F_0^z = 0 \\ C \sim B \text{ 区間} : M_0^r &= -m^t \sin(\beta - \varphi) \\ M_0^t &= m^t \cos(\beta - \varphi) \\ F_0^z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)_d$$

よって次式が同様に算出される。

$$\left. \begin{aligned} LX &= \frac{1}{4\alpha} [\{(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha\} \\ &\quad + \kappa_1 \{(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha\}] \times m^t \\ LY &= \frac{1}{4\alpha} [-\{(\alpha + \beta) \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha\} \\ &\quad + \kappa_1 \{\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha - (\alpha + \beta) \sin \beta\}] \times m^t \\ LZ &= \frac{1}{4\alpha} [\phi_0 \{(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha\} \\ &\quad + \kappa_1 \{\phi_0(\alpha + \beta) \cos \beta + \phi_0 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \} \\ &\quad - 2 \sin(\alpha + \beta)\}] \times m^t \\ \text{また } M_{0B}^r &= -m^t \sin(\alpha + \beta), \quad M_{0B}^t = m^t \cos(\alpha + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (21)_d$$

特に作用点Cが部材の中央点の時は  $\beta = 0$  より

$$\left. \begin{aligned} LX &= \frac{1}{4\alpha} [\{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha\} \\ &\quad + \kappa_1 \{\alpha + \sin \alpha \cos \alpha\}] \times m^t \\ LY &= \frac{1}{4\alpha} [-\{\sin^2 \alpha\} + \kappa_1 \{\sin^2 \alpha\}] \times m^t \\ LZ &= \frac{1}{4\alpha} [\phi_0 \{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha\} \\ &\quad + \kappa_1 \{\phi_0(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin \alpha\}] \times m^t \\ \text{また } M_{0B}^r &= -m^t \sin \alpha, \quad M_{0B}^t = m^t \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (21)_e$$

## 5. 円弧部材をもつ立体ラーメンの解法

図-8に示すとく、水平面内に円弧部材をもつ多上行多層多スパンの立体ラーメン橋や連続格子桁橋などの不静定構造が、ここに誘導した前記立体たわみ角式を適用することにより、容易に解析できることになるが、その骨子は平面ラーメンのたわみ角法による解法と全く同様であり、立体構造であるために3次元座標についてのつりあい式を考慮すべき必然性が加わるものといえる。

すなわち構造物の各節点において、 $r, t$  および  $z$  軸、または  $x, y$  および  $z$  軸に関するモーメントとせん断力の都合 6 個のつりあい式がえられ、それぞれ節点における各軸まわりの 3 個の未知たわみ角  $\theta$  と、各軸方向の 3 個の未知変位  $u$  の合わせて 6 個の未知数に対応し、結局構造物全体についての節点数を  $n$  とすれば、合計  $6n$  個の未知数に対して  $6n$  個の連立方程式がえられることになる。

この際支点での支持条件が固定であれば、6 個の変形はすべて 0 として組込まれ、ヒンジであれば、3 变位は 0 でありモーメントが 3 軸について 0 である条件が前置されるゆえ、支点における 3 個のたわみ角は消滅する。さらにローラーとすれば、可動方向についての適合条件よりこの方向の変位は消失することとなり、結局支持条件のいかんを問わず節点におけるつりあい式のみが所要の連立方程式を与えることが了解される。しかも、その取り扱い方法は平面ラーメンにおける変形法と全く軌を一にするゆえ、その規則性や単純性もそのまま受けつかれて、特に気を使うこともなく機械的に所要の連立方程式を作製しうることのはか、その解きうる対象構造がきわめて広く、一般性をもつともたわみ角法の特色として当然といえる。もちろん未知数は節点の 6 倍と多数を数

えるが、電子計算機の利用によりかなりの節点をもつ構造物を取り扱うに至ったことが、むしろ本研究を志す大きな一動機を形成するものともいえ、さわめて単純な少數節点よりなる構造物についてのくり返し試算法は現在別途研究中であることを付言し、上述の一般的解法について解式の誘導を以下に示すこととする。なお本論文では節点におけるつりあい式を考察するにあたって、土木構造物の特色に適合する意味もあって、 $r, t$  および  $z$  の 3 軸を対象にして誘導を進めることにする。 $x, y$  および  $z$  の 3 軸を取り扱うことも、全く同様の考察過程で展開できるが、その解式の適合対象は主として建築ラーメンとなるので、前述の式(17)を導いたにとどめる。

### (1) 基本公式

(a) 円弧部材に関する基本公式(図-9参照) 両材端の  $r, t$  軸のまわりのモーメント式には、もちろん本論文で導いた立体たわみ角式(10)を適用することはあるまでもないが、 $z$  軸まわりのモーメント式は本研究以前の問題に属し、モーメントをふくめて諸力および変形が、平面内でおこるいわゆる平面たわみ角式を用うことになり、円弧部材に関するたわみ角式としては文献 18) を参照した。以下にこれを転記する(表-6 参照)。

$$\begin{aligned} M_{AB}^z &= EK_z(\alpha^z \theta_A^z + \beta^z \theta_B^z) \\ &\quad + (M_R^z)_{AB} - (M_I^z)_{AB} + C_{AB}^z \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} M_{BA}^z &= EK_z(\beta^z \theta_A^z + \alpha^z \theta_B^z) \\ &\quad + (M_R^z)_{BA} - (M_I^z)_{BA} + C_{BA}^z \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

図-9

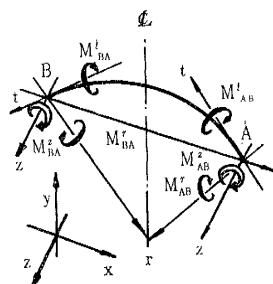


図-8

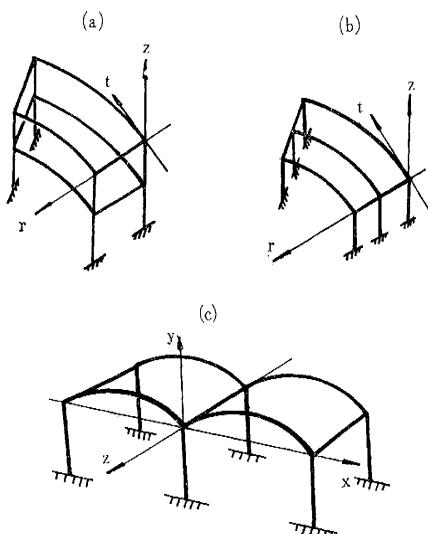


表-6

$\alpha^z$	$\beta^z$	$(M_R^z)_{AB} = (M_R^z)_{BA}$	$(M_I^z)_{AB} = -(M_I^z)_{BA}$
$\frac{1}{\sigma} + 1 + \frac{\lambda^2}{\mu}$	$\frac{1}{\sigma} - 1 - \frac{\lambda^2}{\mu}$	$-\frac{2}{\sigma} EK_z R^z$	$-\frac{\lambda}{\mu} EK_z \Delta t$

さて 2 次的要因をもすべて取り入れた、いわゆる精密解についての取り扱い方法を考えてみるのに、そもそも部材のひずみを起こす諸要因としては、曲げおよびねじりモーメントのほかに、せん断力、軸力、および曲率に起因する幾何学的変形があげられる。これら諸要因のうち、材軸面内の 2 方向ベクトルで示される曲げモーメントとねじりモーメント、およびせん断力の影響がここに誘導した立体たわみ角式にすでに取り入れられていることは、前章までの説明で了解されたことと思うが、材軸面におけるせん断力、軸力および幾何学的変形などの影響は平面たわみ角式だけで処理すればよく、したがってこれらを考慮したたわみ角式を採用すれば、これら 2 次

的要因をふくめたすべての影響が立体解析においても導入されることになる。換言すれば本論文における曲げとねじりモーメントおよびせん断力を考慮した表-2,4の係数を用いた立体たわみ角式(10)を用いるとともに、他方ここに説明した曲げモーメント、せん断力、軸力および幾何学的変形を考慮した文献19)の平面たわみ角式を併用すれば、すべての諸力の影響を取り入れた精密解法を構成する理である。

が、その式についての数理的説明は省略する。

### (b) 直線材に関する基本公式

はりおよび柱に用いられている直線部材を対象にして、前項と同じく $r, t$ および $z$ 軸方向に分けて考えれば、基本公式として曲げモーメントには周知の直線材たわみ角式をそれぞれの軸について用うるほかに、ねじりモーメント式として式(18)を採用すればよい。

① はり部材について(図-10(a)参照):

$$\left. \begin{aligned} r\text{軸: } M_{AB}^r &= GJ(\theta_A^r - \theta_B^r)/l + C_{AB}^r \\ M_{BA}^r &= GJ(\theta_B^r - \theta_A^r)/l + C_{BA}^r \\ t\text{軸: } M_{AB}^t &= EK_t(4\theta_A^t + 2\theta_B^t - 6R^t) + C_{AB}^t \\ M_{BA}^t &= EK_t(2\theta_A^t + 4\theta_B^t - 6R^t) + C_{BA}^t \\ z\text{軸: } M_{AB}^z &= EK_z(4\theta_A^z + 2\theta_B^z - 6R^z) + C_{AB}^z \\ M_{BA}^z &= EK_z(2\theta_A^z + 4\theta_B^z - 6R^z) + C_{BA}^z \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

② 柱部材について(図-10(b)参照):

$$\left. \begin{aligned} r\text{軸: } M_{AB}^r &= EK_r(4\theta_A^r + 2\theta_B^r - 6R^r) + C_{AB}^r \\ M_{BA}^r &= EK_r(2\theta_A^r + 4\theta_B^r - 6R^r) + C_{BA}^r \\ t\text{軸: } M_{AB}^t &= EK_t(4\theta_A^t + 2\theta_B^t - 6R^t) + C_{AB}^t \\ M_{BA}^t &= EK_t(2\theta_A^t + 4\theta_B^t - 6R^t) + C_{BA}^t \\ z\text{軸: } M_{AB}^z &= GJ(\theta_A^z - \theta_B^z)/h + C_{AB}^z \\ M_{BA}^z &= GJ(\theta_B^z - \theta_A^z)/h + C_{BA}^z \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

③ 部材回転角および部材伸縮: 前項①および②で列記した諸公式にふくまれる部材回転角、および部材伸縮を決定すべき条件式を考察してみると、平面ラーメンの解法における場合のごとく、幾何学条件と適合条件とでこれら未知数と固有の方程式をうるという手法が、今回の立体構造の場合にはきわめて繁雑となり、むしろつぎのごとく節点変位に統一して置き換えた方が、その後の算定が機械的に処理できて便利である。すなわち、

(i)  $R, R^z, \Delta L$ について(図-11参照)

$$\left. \begin{aligned} R &= (\Delta_A^z - \Delta_B^z)/r \\ R^z &= (\Delta_A^r - \Delta_B^r)\cos\alpha - (\Delta_A^t + \Delta_B^t)\sin\alpha/l \\ \Delta L &= -(\Delta_A^r + \Delta_B^r)\sin\alpha - (\Delta_A^t - \Delta_B^t)\cos\alpha \end{aligned} \right\} \quad (25)_a$$

図-10

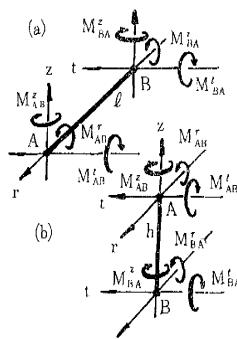


図-11

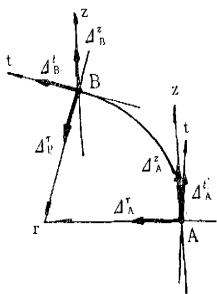


図-12

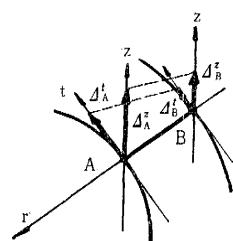


図-13

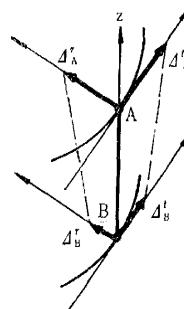
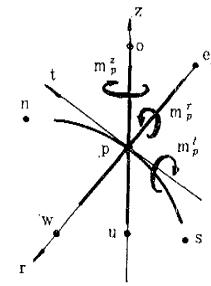


図-14



(ii) はりにおける $R^t$ および $R^z$ について(図-12参照)

$$\left. \begin{aligned} R^t &= (\Delta_A^z - \Delta_B^z)/l \\ R^z &= (\Delta_A^t - \Delta_B^t)/l \end{aligned} \right\} \quad (25)_b$$

(iii) 柱における $R^r$ および $R^t$ について(図-13参照)

$$\left. \begin{aligned} R^r &= (\Delta_A^t - \Delta_B^t)/h \\ R^t &= -(\Delta_A^r - \Delta_B^r)/h \end{aligned} \right\} \quad (25)_c$$

### (2) 節点方程式

節点が移動しない場合は、たわみ角式における未知数は各節点のたわみ角のみとなり、部材の両端節点のたわみ角がえられれば、材端モーメントおよび端せん力が求まり、ひいては部材応力を定めうことになる。すなわち、節点における材端モーメントの総和が外力のモーメントに等しいという節点方程式だけでたわみ角は求まり、以下の式で表わされる。

ラーメンの節点 $p$ において次式が成立する(図-14参照)。

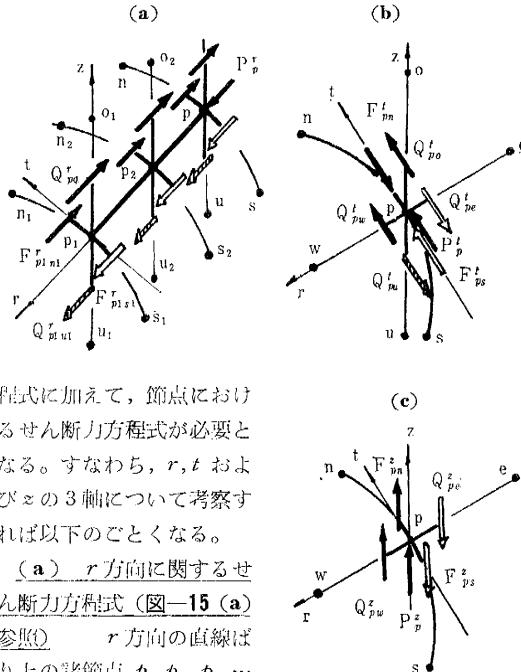
$$\left. \begin{aligned} M_{pe}^r + M_{pw}^r + M_{ps}^r + M_{pn}^r + M_{po}^r + M_{pu}^r &= m_p^r \\ M_{pe}^t + M_{pw}^t + M_{ps}^t + M_{pn}^t + M_{po}^t + M_{pu}^t &= m_p^t \\ M_{pe}^z + M_{pw}^z + M_{ps}^z + M_{pn}^z + M_{po}^z + M_{pu}^z &= m_p^z \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ただし、 $m_p$ は $p$ 点に働く、3軸に関する外力モーメントを表わす。

### (3) セン断力方程式

節点が移動する場合は、節点のたわみ角のほかに節点変位が未知数としてふくまれるので、式(26)の節点方

図-15



程式に加えて、節点におけるせん断力方程式が必要となる。すなわち、 $r$ ,  $t$  よび  $z$  の 3 軸について考察すれば以下のとくなる。

(a)  $r$  方向に関するせん断力方程式 (図-15(a) 参照)  $r$  方向の直線ばかり上の諸節点  $p_1, p_2, p_3, \dots$

の同方向の変位は、軸力による部材伸縮を無視すれば、すべて等しくなる。したがって、これらの節点に働く  $r$  方向のせん断力は従属関係にあり、つぎの通りあい式が成立する。

$$\Sigma F_{pn}^r - \Sigma F_{ps}^r + \Sigma Q_{po}^r - \Sigma Q_{pe}^r = \Sigma P_p^r \dots (27_a)$$

$$\text{ただし } Q_{po}^r = -(M_{po}^t + M_{op}^t)/h + Q_{po}^r$$

$$Q_{pe}^r = -(M_{pe}^t + M_{ep}^t)/h + Q_{pe}^r$$

(b)  $t$  方向に関するせん断力方程式 (図-15(b) 参照) 任意節点  $p$  での  $t$  方向に関する力のつりあい式は、つぎのことくなる。

$$F_{pn}^t - F_{ps}^t + Q_{po}^t - Q_{pe}^t - Q_{pw}^t = P_p^t \dots (27_b)$$

$$\text{ただし } Q_{po}^t = -(M_{po}^r + M_{up}^r)/h + Q_{po}^t$$

$$Q_{pe}^t = -(M_{pe}^r + M_{ep}^r)/h + Q_{pe}^t$$

$$Q_{pw}^t = -(M_{pw}^r + M_{wp}^r)/h + Q_{pw}^t$$

(c)  $z$  方向に関するせん断力方程式 (図-15(c) 参照) 格子節点のごとく  $z$  方向に変化を生じる場合は、その節点で同方向に関するつぎのつりあい式が成立する。

$$F_{ps}^z - F_{pn}^z + Q_{pe}^z - Q_{pw}^z = P_p^z \dots (27_c)$$

$$\text{ただし } Q_{pe}^z = -(M_{pe}^t + M_{ep}^t)/L + Q_{pe}^z$$

$$Q_{pw}^z = -(M_{pw}^t + M_{wp}^t)/L + Q_{pw}^z$$

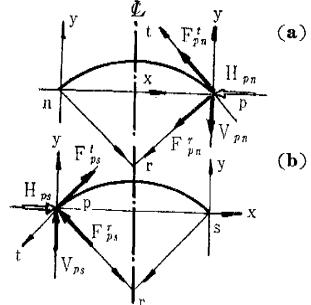
以上 (a), (b), (c) における  $P_p$  は、 $p$  節点に働く 3 軸方向の節点荷重による外力を示し、また式 (27) 中の  $F^r$  や  $F^t$  はそれぞれ次式で与えられる (図-16(a), (b) 参照)。

$$\left. \begin{aligned} F_{pn}^r &= V_{pn} \cos \alpha + H_{pn} \sin \alpha \\ F_{pn}^t &= -V_{pn} \sin \alpha + H_{pn} \cos \alpha \\ F_{ps}^r &= V_{ps} \cos \alpha - H_{ps} \sin \alpha \\ F_{ps}^t &= V_{ps} \sin \alpha + H_{ps} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } V_{pn} &= -(M_{pn}^z + M_{np}^z)/l + V_{pn} \\ V_{ps} &= -(M_{ps}^z + M_{sp}^z)/l + V_{ps} \end{aligned} \right\}$$

ここで  $V$  や  $H$

図-16



$Q$  は中間荷重による端せん力を表わし、 $H$  は平面円弧部材の材端に働く不静定水平反力である。

以上本章の (2) より (3) で求めた節点方程式およびせん断力方程式を用うれば、 $n$  個の材端変形

成分を未知数とする  $n$  個の連立方程式がえられ、これらを連立してこれら未知量が決定し、ついでたわみ角諸式に代入して所要の材端モーメントおよび端せん力が求められることになる。

#### (4) 検算法

算出された材端モーメントや端せん力が果たして正しく求められたかどうかは、ただ単に原連立方程式たる節点方程式とせん断力方程式に代入して、これらを満足するかどうかを調べる原始的な方法では検算法とはいえず、解のための連立方程式を全く離れた独立の検算法こそ考慮さるべきであり、かかる意味からいって本法で利用されるべきはつぎの通りあい条件式である。

すなわち、“部材に働くモーメントをふくめての諸力は、 $x$  軸（部材の両端を連ねる軸に選ぶ）に関して平衡状態になければならない”（図-3 参照）。これより

$$(M_{AB}^r - M_{BA}^r) \sin \alpha + (M_{AB}^t + M_{BA}^t) \cos \alpha + M_0^x = 0 \dots (29)$$

ここに、 $M_0^x$  は中間荷重によって生じる  $x$  軸のまわりのモーメントで、次式で与えられる。すなわち

(a) 満載等分布荷重 (図-5 参照)

$$M_0^x = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \varphi - r \cos \alpha) (\omega r d\varphi) \\ = 2(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \times \omega r^2$$

(b) 単一集中荷重 (図-6 参照)

$$M_0^x = (\cos \beta - \cos \alpha) \times P_r$$

(c) ねじりモーメント荷重 (図-7 参照)

$$M_0^x = m^t \cos \beta$$

#### 6. 計算例

計算例として 図-17 のとき 2 スパンの円弧ばかりもつ立体ラーメンを選ぶこととする。記号および寸法は

図-17に示すとおりで、集中荷重  $P$  は  $a_1b_1$  部材の中点に働くものとする。なお  $\kappa_2=0$  で、せん断力の影響は無視できるものとし、 $\kappa_1=EI_r/GJ$  の値は 0.5 と仮定した。

### (1) 準備計算

円弧部材の立体たわみ角式の各形状項を、 $\kappa_1=0.5$ 、 $\alpha=30^\circ$  として計算すればつぎのごとくなるが、図表-1~6 を利用しても 1 衔ぐらいの精度の低下を認めれば、読み取りうることが了解されるであろう。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_A^r = \alpha_B^r = 3.647, \quad \beta_A^r = \beta_B^r = 2.080 \\ \gamma_A^r = -\gamma_B^r = -0.962, \quad \delta_A^r = -\delta_B^r = 0.057 \\ \alpha_A^t = \alpha_B^t = 2.352, \quad \beta_A^t = \beta_B^t = -1.829 \\ \gamma_A^t = -\gamma_B^t = -0.962, \quad \delta_A^t = -\delta_B^t = -0.057 \end{array} \right\}$$

すなわち立体たわみ角式は次式のごとく示されうる。  
(ただし標準剛性  $EK_0=1$  とおいた)。

$$\left. \begin{array}{l} M_{AB}^r = 1.2(3.647\theta_A^r + 2.080\theta_B^r \\ \quad - 0.962\theta_A^t + 0.057\theta_B^t) + C_{AB}^r \\ M_{BA}^r = 1.2(2.080\theta_A^r + 3.647\theta_B^r \\ \quad - 0.057\theta_A^t + 0.962\theta_B^t) + C_{BA}^r \\ M_{AB}^t = 1.2(2.352\theta_A^t - 1.829\theta_B^t \\ \quad - 0.962\theta_A^r - 0.057\theta_B^r) + C_{AB}^t \\ M_{BA}^t = 1.2(-1.829\theta_A^t + 2.352\theta_B^t \\ \quad + 0.057\theta_A^r + 0.962\theta_B^r) + C_{BA}^t \end{array} \right\} \quad \dots\dots(30)$$

図-17に見るごとく部材の両端では  $z$  軸方向の変位ではなく、したがって上式において  $R=0$  とした。式中の荷重項  $C_{AB}^r, C_{BA}^r, \dots$  は、つぎに述べる順序で算出する。すなわち付表-2~8 を用いれば、

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.023, \quad B_1 = 0.042, \quad C_1 = 0.251, \quad A_2 = 0.083 \\ B_2 &= -0.024, \quad C_2 = -0.136, \quad K = 21.834 \end{aligned}$$

他方式 (21)c よりつぎの諸値を算出する。すなわち

$$LX = 0.329, \quad LY = -1.237, \quad LZ = 0.427$$

$$M_{ab_1}^r = -0.5, \quad M_{ab_1}^t = -1.340$$

これらを用いて式 (12) より所要の荷重項を算定すれば、つぎの諸値をうる。

$$C_{a_1b_1}^r = -C_{b_1a_1}^r = -1.381, \quad C_{a_1b_1}^t = C_{b_1a_1}^t = 0.024$$

(単位: t·m)

また円弧部材の平面たわみ角式を  $\alpha=30^\circ$ 、 $EK_0=1$  として既往公式<sup>18)</sup>より算出すれば、つぎのごとくなる。

$$\left. \begin{array}{l} M_{AB}^z = 8.799\theta_A^z - 3.019\theta_B^z \\ \quad + (M_R^z)_{AB} - (M_I^z)_{AB} \\ M_{BA}^z = -3.019\theta_A^z + 8.799\theta_B^z \\ \quad + (M_R^z)_{BA} - (M_I^z)_{BA} \end{array} \right\} \quad \dots\dots(31)$$

ここに  $(M_R^z)_{AB} = (M_R^z)_{BA} = -5.780R^z$

$$(M_I^z)_{AB} = -(M_I^z)_{BA} = -5.5224l/r$$

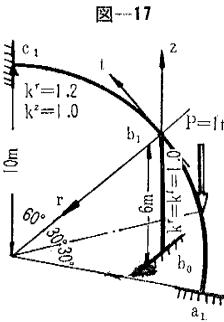


図-17

これらの部材回転角  $R^z$  および部材伸縮  $4l$  を、 $b_1$  節点の変位  $\bar{a}_{b_1}^r, \bar{a}_{b_1}^t$  で置き換える。

$a_1b_1$  部材に関しては

$$\begin{aligned} (M_R^z)_{a_1b_1} &= 0.501\bar{a}_{b_1}^r + 0.289\bar{a}_{b_1}^t \\ (M_I^z)_{a_1b_1} &= +2.761\bar{a}_{b_1}^r - 4.782\bar{a}_{b_1}^t \end{aligned}$$

$b_1c_1$  部材に関しては

$$\begin{aligned} (M_R^z)_{b_1c_1} &= -0.501\bar{a}_{b_1}^r + 0.289\bar{a}_{b_1}^t \\ (M_I^z)_{b_1c_1} &= 2.761\bar{a}_{b_1}^r + 4.782\bar{a}_{b_1}^t \end{aligned}$$

なれば、必要な直線部材に関するたわみ角式の変形公式は周知として省くが、ねじり角式の形状項  $GJ/hEK_0$  をここでは 2.0 と仮定して計算を進める。

### (2) 節点およびせん断力方程式とその解

$b_1$  点で節点方程式およびせん断力方程式を、式 (26) と式 (27)<sub>a, b</sub> を用いてつければ次式となる。

$$\left. \begin{array}{l} M_{b_1a_1}^r + M_{b_1c_1}^r + M_{b_1b_0}^r = 0 \\ M_{b_1a_1}^t + M_{b_1c_1}^t + M_{b_1b_0}^t = 0 \\ M_{b_1a_1}^z + M_{b_1c_1}^z + M_{b_1b_0}^z = 0 \\ F_{b_1a_1}^r - F_{b_1c_1}^r + Q_{b_1b_0}^r = 0 \\ F_{b_1a_1}^t - F_{b_1c_1}^t + Q_{b_1b_0}^t = 0 \end{array} \right\}$$

前記式 (30) および (31) を、式 (28) を併用した上で上式に代入して整理すれば、未知数  $\theta_{b_1}^r, \theta_{b_1}^t, \theta_{b_1}^z$  および  $\bar{a}_{b_1}^r, \bar{a}_{b_1}^t$  に関する次の 5 元連立一次方程式がえられる。

$$\begin{aligned} 12.754\theta_{b_1}^r - \bar{a}_{b_1}^t &= -1.381 \\ 9.644\theta_{b_1}^t + \bar{a}_{b_1}^r &= -0.024 \\ 19.598\theta_{b_1}^z - 8.986\bar{a}_{b_1}^t &= 0 \\ \theta_{b_1}^t + 3.612\bar{a}_{b_1}^r &= 0 \\ 8.986\theta_{b_1}^z - 9.708\bar{a}_{b_1}^t &= 0 \end{aligned}$$

上式をといてつぎの諸値が決定する。

$$\begin{aligned} \theta_{b_1}^r &= -0.1098, \quad \theta_{b_1}^t = -0.0026, \quad \theta_{b_1}^z = -0.0090 \\ \bar{a}_{b_1}^r &= 0.0007, \quad \bar{a}_{b_1}^t = -0.0197 \end{aligned} \quad \dots\dots(32)$$

式 (32) の諸値を用いて端モーメントをそれぞれ算出し、結果を表-7 にまとめて示した。

表-7

	$a_1b_1$	$b_1a_1$	$b_1b_0$	$b_0b_1$	$b_1c_1$	$c_1b_1$
$M^r$	-1.655	+0.897	-0.420	-0.200	-0.478	-0.274
$M^t$	+0.037	-0.110	-0.010	-0.004	+0.120	-0.002
$M^z$	-0.068	+0.011	-0.018	+0.018	+0.007	-0.065

### (3) 検算

式 (29) を用いる検算を行なえば、つぎのごとく正確さを確認しうる。

#### (a) $a_1b_1$ 部材において

$$(-1.655 - 0.897) \times 0.5 + (0.037 - 0.110) \times 0.866 + 1.340 = 0.001 \quad \text{OK}$$

#### (b) $b_1c_1$ 部材において

$$(0.274 - 0.478) \times 0.5 + (0.120 - 0.002) \times 0.866 + 0 = 0.000 \quad \text{OK}$$

## 7. 結 語

著者らはまずエネルギー法を用いて円弧部材の立体たわみ角式を誘導し、ついでこれらを使用して多主桁多層多スパンの立体円弧ラーメン橋や、連続円弧格子桁橋などの高次不静定構造物を解く最も一般的な解法を導き、必要係数に対する図表を作製して実際使用に便ならしめるごとくしたが、本法の特色として認められる諸点を逐次述べれば、つぎのごとく要約されるかと思う。

すなわち、誘導の基礎として採用した変分原理が、本来弾性体をすべて対象とする普遍的特質をもつため、たわみ角式中には部材の各種性状やあらゆる荷重条件を容易に包含しうることとなり、これが第1の特色としてあげられる。また本法と全く同じ考察過程で、円弧部材でない他の形状部材に対する立体たわみ角式の誘導、ひいてはそれらを部材とするラーメンの解法が、いずれも係数内容を異にするだけでえられるという理論の多用性が認められ、これが第2の特色を形成し、クロソイド部材などに対する応用研究<sup>20)</sup>が、日本著者らの研究室で進行中である。つぎに解式の構成について観察すれば、構造物の立体解析によく見受けられる一貫したマトリックス算法とは異なり、当初より3軸方向に分解して考察を進め、かつ各種係数などの具体的な数値に対する一般式が、すべて個々に確定表示されているゆえ、在来のたわみ角法に慣れた経験を生かして、平面ラーメンの解法と同じ演算手法をただ3平面について操作すればよく、円弧部材をふくむあらゆる立体構造物が、その種類のいかんを問わずほとんど機械的に解かれるという、解式作製の簡明さが第3の特色として認められる。さらに各式のもつ物理的意義も明確で理解しやすく、また演算を行なううちに解かんとする構造物の一般的な力学的特性を見出しやすい点や、他方面への応用としても、影響線解法への利用<sup>21)</sup>と、比較的簡単なラーメンの立体解析が、くり返し試算ができるごとく Kani 法を拡張適用しうることなどが、本法の特色として数えられる。

なお、本法では流動座標  $r, t$  を基準にとって諸式を表現したが、その理由は土木構造物の代表として橋梁をえらび、その解析を主目的としたためで、立体円弧ラーメン橋や連続円弧格子桁の各節点に集まる円弧部材のあり方が、大部分は流動座標系の  $r, t$  軸に合致するという特色をとらえたもので、そのまま諸式を適用できるようにしたものである。したがって 図-8(c) に示すごとき建築ラーメンでは、部材の組み方が異なるため、固定座標に関する諸式を用いた方が変換のわずらわしさが省け、便利なことはいうまでもないが、参考までにたわみ角式を式(17)として求めるだけにとどめた。

最後に本研究には文部省科学研究所の援助をうけたことを付記して謝意を表する。

付表-1

矩形断面					
$C. Back の式 J = \frac{a^3 b^3}{\psi_0 (a^2 + b^2)}$					$\frac{a^3 b^3}{\psi_0}$
$\psi_0 = 3.645 - 0.06 \frac{a}{b}$					1 2 4 8
St. Venant の式 $J = \beta ab^3$			$\beta = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} (1 - \frac{1}{12} \frac{b^2}{a^2})$		
T 形断面			I 形断面		
$J = \frac{1.12}{3} \sum b_i a_i^3$			$J = \frac{1.15}{3} \sum b_i a_i^3$		
箱形断面			円環		
$J = \frac{B H + b h}{B d_2 + (H - d_1) d_1}$			$J = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2)$		

付表-2

$K_1$	$A_1$			
$\alpha$	0.5	1.0	2.0	3.0
0	0	0	0	0
10	0.00011	0.00021	0.00043	0.00066
20	0.00362	0.00666	0.01385	0.02157
30	0.02311	0.04831	0.10498	0.17001
40	0.08838	0.19081	0.43785	0.74112
50	0.23853	0.53537	1.30403	2.30597
60	0.51234	1.20074	3.10571	5.71492
70	0.93461	2.29136	6.27130	11.93983
80	1.50632	3.85928	11.10518	21.73769
90	2.20110	5.86960	17.60881	35.21762

付表-3

$K_1$	$A_2$			
$\alpha$	0.5	1.0	2.0	3.0
0	0	0	0	0
10	0.00121	0.00121	0.00122	0.00122
20	0.01825	0.01830	0.01838	0.01840
30	0.08336	0.08368	0.08341	0.08395
40	0.22782	0.22740	0.21836	0.19840
50	0.45971	0.44923	0.38469	0.26203
60	0.74971	0.69325	0.41732	-0.07539
70	1.03034	0.83399	-0.03299	-1.53233
80	1.20753	0.68050	-1.51399	-5.22903
90	1.17810	0	-4.71239	-12.56637

付表-4

$K_1$	$B_1$			
$\alpha$	0.5	1.0	2.0	3.0
0	0	0	0	0
10	0.00061	0.00121	0.00243	0.00366
20	0.00911	0.01830	0.03690	0.05580
30	0.04146	0.08368	0.17041	0.26019
40	0.11186	0.22740	0.46950	0.72631
50	0.21896	0.44923	0.94371	1.48344
60	0.33410	0.69325	1.48664	2.38017
70	0.39660	0.83399	1.83110	2.99134
80	0.31866	0.68050	1.53370	2.55960
90	0	0	0	0

付表-5

	B <sub>2</sub>			
	0.5	1.0	2.0	3.0
0	0	0	0	0
10	-0.00011	-0.00021	-0.00043	-0.00065
20	-0.00332	-0.00666	-0.00134	-0.02031
30	-0.02394	-0.04831	-0.09838	-0.15022
40	-0.09384	-0.19081	-0.39396	-0.60945
50	-0.26095	-0.53537	-1.12467	-1.76789
60	-0.57869	-1.20074	-2.57493	-4.12258
70	-1.08966	-2.29136	-5.03090	-8.21864
80	-1.80721	-3.85928	-8.69800	-14.51613
90	-2.70110	-5.86960	-13.60881	-23.21763

付表-7

	C <sub>2</sub>			
	0.5	1.0	2.0	3.0
0	0	0	0	0
10	-0.00184	-0.00246	-0.00373	-0.00502
20	-0.02840	-0.03864	-0.06025	-0.08340
30	-0.13614	-0.18972	-0.30920	-0.44509
40	-0.39913	-0.57450	-0.98872	-1.48759
50	-0.88707	-1.32736	-2.42484	-3.81151
60	-1.64660	-2.57269	-4.99071	-8.16317
70	-2.69195	-4.39988	-9.03163	-15.28460
80	-4.00639	-6.84311	-14.76840	-25.69618
90	-5.55165	-9.86960	-22.20661	-39.47842

付表-6

	C <sub>1</sub>			
	0.5	1.0	2.0	3.0
0	0	0	0	0
10	0.01047	0.02105	0.04253	0.06443
20	0.08005	0.16333	0.33961	0.52884
30	0.25048	0.52360	1.13778	1.84256
40	0.53440	1.15380	2.64762	4.48144
50	0.91263	2.04840	4.98939	8.82296
60	1.34048	3.14160	8.12574	14.95244
70	1.76012	4.31526	11.81059	22.48600
80	2.11417	5.41664	15.58652	30.50962
90	2.35619	6.28319	18.84956	37.69911

付表-8

$K_1$	K			
$\alpha$	0.5	1.0	2.0	3.0
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
10	1632.8	811.44	400.857	264.084
20	105.19	51.342	24.493	15.603
30	21.834	10.350	4.6775	2.8376
40	7.3928	3.3687	1.4221	0.81465
50	3.2946	1.4306	0.55928	0.30180
60	1.7537	0.72125	0.26007	0.13241
70	1.0571	0.41010	0.13650	0.06582
80	0.69808	0.25518	0.07869	0.03613
90	0.49363	0.17037	0.04899	0.02154

## 参考文献

- 1) Müller Breslau : Die neuere Methoden der Festigkeitslehre. 1913.
- 2) Engesser : Der elastische stabförmige Träger von beliebiger Gestaltung. Z.f. Bauwesen. 1919.
- 3) Hauranek : Berechnung von Bogenbrücken bei räumlichen Kraftangriff. B.u.E. 1918.
- 4) Mörsch : Berechnung der Brückengewölbe für Winddruck exzentrische Belastung und einseitige Erwärmung. B.u.E. 1923.
- 5) Jakobsen : Winddruck auf Bogenbrücken. B.u.E. 1940.
- 6) 大野 博 : 鉄筋コンクリート無鉄筋の経済的並に耐震的設計(2), 土木試験所報告 第34号 1936.
- 7) Unold : Der Kreisträger. Forschungsarbeiten Heft 255, 1922.
- 8) 坂 静雄 : 両端弾性固定の張出曲梁, 建築雑誌, 第44輯 530号, 昭和5年.
- 9) 岡本舞三 : 軸線を含む面に垂直なる荷重を受ける円形曲り梁の研究, 土木学会誌, 第29巻3号, 昭和18年.
- 10) 近藤繁人 : 立体構造物の静定主系の選び方について, 土木学会論文集, 第36号, 昭和31年.
- 11) 倉西 茂 : 曲線格子桁の解法, 土木学会論文集, 第76号, 昭和36年.
- 12) 牧野 稔 : 3次元挠角法公式による円弧部材を含む立体ラーメンの解法, 建築学会論文報告集, 第69号, 昭和36年.
- 13) 島田静雄 : 曲線梁の階差式表示, 第16回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和36年.
- 14) 小西一郎・小松定夫 : 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集, 第87号, 昭和37年, 単純曲線桁橋の立体制的解析, 土木学会論文集, 第90号, 昭和38年, 薄肉連続曲線桁橋の立体制的解析, 土木学会論文集, 第91号, 昭和38年.
- 15) B. Velutini : Analysis of Continuous Circular Curved Beams. Proceeding of the A.C.I., Vol. 47, 1951.
- 16) F. Baron and J.P. Michalos : Laterally Loaded Plane Structures and Structures Curved in Space. Transactions of the A.S.C.E., 1952.
- 17) H.H. Fickel : Analysis of Curved Girders, Transactions of the A.S.C.E., 1961.
- 18) T. Murakami : Studies on the Slope-Deflection Method, 九大工学部紀要, 1953.
- 19) T. Yamasaki : Analysis of Frames with Curved Members Considering the Effects of Axial and Shearing Forces, Proceeding 11th Japan National Congress for Applied Mechanics, March 1962.
- 20) 山崎・太田・入江 : 面に垂直な荷重をうけるクロソイド曲線材の立体制角式, 第18回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和38年.
- 21) 山崎・太田・緒方 : 伸縮部材をもつ立体ラーメンの影響線解法, 第18回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和38年.

(1964.2.3・受付)