土砂をふくんだ洪水流の二，三の特性について

ON THE CHARACTERS OF FLOOD FLOW CONTAINING SUSPENDED SEDIMENT

神　月　隆　一*
By Ryuichi Kozuki

要　旨　以下に洪水流中に浮遊土砂がふくまれた時の運動および連続方程式をたて，洪水流の波速などに若干の修正が従来の理論に対して必要であることが見出された。一方この研究の途中で，流水による掃流土砂の限度を求めたが，この値は，アインシュタイン氏の公式によって数値的に計算した値と，同じような傾向にあることを見出した。また同時に濃度拡散を考慮した時の平均流速係数を求めて，Vanoni と Ismail の実験との比較を行なった。

1. まえがき

従来，洪水の問題を純水理学的立場から取り扱った例は多いが，実際の洪水をよく眺めると，いちじるしい土砂の混入によって，いくぶん今までの洪水理論とくい違った様相を示すのではないかと思われる。事実，洪水中には河床は洗掘され，または上流から来る土砂が堆積して，いちじるしく初期の河床に変化を起こさせるばかりでなく，水流中にふくまれる土砂は，それが浮遊するのに必要なだけの仕事量が水流から与えられなければならない勘定である。本論文は，このような現象について理論的接近を試みたものであって，その結果洪水波速などに若干の修正が必要であることを論じたものである。

2. 理論の展開

上に述べた観点から洪水流中に土砂をふくむ場合についての理論を展開するに当たって，過程をつぎのように想定し，計算上の仮定とした。

河川は最初，一様な流速，一様な水深の定常状態であって，河水中には浮遊土砂がふくまれていない。河川の上流端に降雨などがあって，漸次河川が不定流の相をていしはじめ，流水は洪水流となり，流量や流速が上流より増加するにつれて，移動河床は掃流されはじめ，その一部は流水中にふくまれて浮遊土砂となり，流水とともに流下し，下流に向かって漸次増加の傾向を有するようになるとはいえ，一方そのうちのあるものは沈降して堆積する。このようにして河床は洪水の間中，移動や洗掘を受け，また堆積をして変動をする。この間流れの方は，これらの浮遊土砂を浮遊せしめるだけの仕事を土砂に与え続けて行かなければならない。このような過程を考慮しながら洪水流の伝播を考慮するのであるが，この計算に当たってはつぎの仮定を設けた。

（1）　河床は一様な粒子の土砂より成り立っている。

（2）　河幅は一様であって，かつ洪水前の河床勾配は一様であるとする。

（3）　水深に比して河幅は十分に広い広長方形断面とする。

（4）　浮遊土砂の流速は，水流速と同じであるとする。

（5）　流速の水深方向の速度分布は一様であるとする。

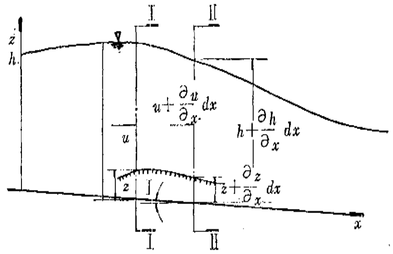
（6）　単位時間，単位面積当り掃流，浮遊する全土砂量を q_T とすると，河川の流水の方向，dx 区間において，単位時間，単位幅当たりの浮上する土砂量は $\dfrac{\partial q_T}{\partial x}\cdot dx$ であるとする。

（7）　浮遊土砂を浮遊させておく以外の仕事，たとえば，水波，砂れん等に必要な仕事量を無視するものとする。

（1）　基礎方程式

河川の任意の位置，任意の時刻での洪水の様相を図－1 のように表わし，dx の距離だけはなれた2断面について考える。以下の計算に対する記号はつぎのとおりである。

図－1



u：流速（水流中の浮遊土砂の流速も，これに等しいとする）

i_0：初期の河床勾配（河縦断にそって一様とする）

h：初期の河床より測った土砂流の水深

q_T：u なる流速によって掃流される単位面積当りの土砂量

m：断面Ⅰにおける単位体積の流水中にふくまれる土砂容量（断面Ⅱにおいては，’を付す）

---

* 正員　関西電力ＫＫ建設部土木課

$\bar{m}$：断面Iにおける単位体積の流水中にふくまれる土砂量 m のうち，断面IとIIの間で，水流から浮遊するだけの仕事量を与えられない土砂容量

w_0：土砂の水中における沈降速度（一定とする）

ρ_s：土砂の比重

ρ_w：水の比重

ρ_T：土砂混合流の比重　$=m(\rho_s-\rho_w)+\rho_w$

t　：時間の単位

g　：重力の加速度

R：径　深

A_T：土砂流の断面積

B：河幅（一定と考える）

（A）　運動方程式

運動方程式を立てるに当たって，当初の仮定によって，土砂流の位置や運動のエネルギーなどの損耗は，ちょうど河床における摩擦と土砂を浮遊させておかなければならない仕事とに使われるものとする。いま，$P_TA_Tu\equiv Q$ で表わすと，断面IとIIの間での位置のエネルギーの減少は，

$$\Delta_1=g\cdot Q\cdot\left[i_0-\frac{\partial h}{\partial x}\right]\cdot dx\cdot dt$$

であり，運動のエネルギーの減少は，

$$\Delta_2=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(Q\cdot u^2)\cdot dx\cdot dt$$

であるが，$\partial u/\partial x$ に比して，$\partial Q/\partial x$ は無視できる程度に小さいと考えて，

$$\Delta_2\fallingdotseq-\frac{Q}{2}\frac{\partial}{\partial x}\cdot u^2\cdot dx\cdot dt$$

となる。

また流速 u に時間的変化を与えるために減少する仕事量は，$\Delta_3=(\partial uQ/\partial t)\cdot dt\cdot dx$ であるが，$\partial u/\partial t$ に比して $\partial Q/\partial t$ が無視できる程度に小さいと考えて，

$$\Delta_3\fallingdotseq Q\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\alpha\, t\cdot dx$$

となる。

一方，河床の摩擦によって失なわれる仕事量は，径深を R とおいて，Chézy による平均流速係数を C_s とおいて，

$$\Delta_4=Q\frac{g}{C_s^2}\frac{u^2}{R}\cdot dx\cdot dt$$

となる。ここで流水中に浮遊土砂がある時の平均流速係数を C_s とおいたのであるが，後記するように，浮遊土砂がない時の流速係数 C_0 とは，若干その値を異にするようである。C_s は濃度，水深，水面勾配などによって変わるが，ここでは式の取扱い上で一定と考えた。

つぎに土砂を浮遊せしめるための仕事量は，図-1 のIの断面から，dt 時間に侵入した浮遊土砂量は，$m\cdot B\cdot(h-z)\cdot u\cdot dt$ であり，このうち仮定によって，$\bar{m}\cdot B\cdot(h-z)\cdot u\cdot dt$ なる量が浮遊するだけの仕事量が与えられないため，流水から浮遊するだけの仕事量を与えなければならない土砂量は，dt 時間において，$B\cdot(m-\bar{m})\cdot(h-z)\cdot u\cdot dt$ である。この土砂量の水中における重量は，$B\cdot g\cdot(m-\bar{m})(h-z)\cdot u(\rho_s-\rho_w)\cdot dt$ でありこの量は，もし外部からなんら浮遊するだけの仕事量が与えられないときには，dt 時間の間に，w_0dt なる高さを落下することになるから，これだけの土砂量を沈降させることなくその位置を保っておくための仕事量は，

$$\Delta_5=B\cdot g\cdot(m-\bar{m})(h-z)\cdot(\rho_s-\rho_w)\cdot u\cdot w_0\cdot dt\cdot dt$$

となる。さていま $udt=dx$ であることを考え合わせて結局，

$$\Delta_5=B\cdot g\cdot(m-\bar{m})\cdot(h-z)\cdot(\rho_s-\rho_w)\cdot w_0dt\cdot dx$$

として得られる。

また掃流によって浮上させられる土砂量は，仮定によって，$(\partial q_T/\partial x)\cdot dx$ であるが，これを浮上させなければならない仕事量は，

$$B\cdot(\rho_s-\rho_w)\frac{\partial q_T}{\partial x}\cdot dx\cdot g\cdot w_0\cdot dx\cdot dt$$

であって，これは $\Delta_1\sim\Delta_5$ に比して高次の微少であるから，この項を無視することとして，今までの値を累計して，運動方程式

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2g}\frac{\partial u^2}{\partial x}-i_0+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{C_s^2}\frac{u^2}{R}+\frac{w_0}{Q}\{B(\rho_s-\rho_w)\cdot(m-\bar{m})(h-z)\}=0$$

が得られる。

（B）　連続方程式

a） 水の連続方程式　断面Iに侵入してくる水の量は，単位幅当り，$(1-m)\cdot(h-z)udt$ であり，断面IIから出て行く水の量は，$(1-m')(h'-z')\cdot u'dt$ であってその差額は単位幅当り，

$$\{(1-m)(h-z)u-(1-m')(h'-z')u'\}dt=\left\{\frac{\partial}{\partial x}m(h-z)u-\frac{\partial}{\partial x}(h-z)\cdot u\right\}\cdot dx\cdot dt$$

であり，この値は dx 区間における水量の増加，または減少によって表わされるものであるから，したがって，

$$\frac{\partial}{\partial x}m(h-z)u-\frac{\partial}{\partial x}(h-z)u=\frac{\partial}{\partial t}(1-m)(h-z)$$

または，

$$\frac{\partial}{\partial t}(h-z)+\frac{\partial}{\partial x}u(h-z)u=\frac{\partial}{\partial t}m(h-z)+\frac{\partial}{\partial x}m\cdot u(h-z)$$

が得られる。

b） 浮遊土砂の連続方程式　水は，dx の区間において水位の上昇となって貯留されるか，または水位の低下となって補給される以外は，いま考えている一様断面の水路においては変化はないが，土砂の方は，dx 区間において，水流の密度の増加となって貯留され，または減少によって補給される以外に，沈降によって底部に堆積したり掃流によって移動浮上したりする土砂量の変化も勘案する必要がある。$\bar{m}$は土砂流の単位体積中の土砂の

うち，水流から浮遊を維持するだけの仕事量を与えられない土砂容積であるから，dx 区間で，dt 時間に沈降してしまう土砂量は，単位幅当り，

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\bar{m}(h-z)+\frac{\partial}{\partial x}\bar{m}(h-z)\cdot u\right\}\cdot dxdt$$

である。一方同区間，同時間において水流中に貯留される土砂量は，単位幅当り，

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}m(h-z)+\frac{\partial}{\partial x}m(h-z)u\right\}\cdot dt\cdot dx$$

であり，仮定によって掃流による増加砂量は $(\partial q_T/\partial x)\cdot dx\cdot dt$ であるから，断面 I と II の間での土砂の連続方程式として，

$$\frac{\partial}{\partial t}m(h-z)dx\cdot dt+\frac{\partial}{\partial x}m(h-z)\cdot u\cdot dx\cdot dt$$
$$=\frac{\partial q_T}{\partial x}\cdot dx\cdot dt+\frac{\partial}{\partial t}\bar{m}(h-z)dx\cdot dt$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\bar{m}(h-z)\cdot u\cdot dx\cdot dt$$

すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial t}(m-\bar{m})(h-z)+\frac{\partial}{\partial x}(m-\bar{m})(h-z)\cdot u=\frac{\partial q_T}{\partial x}$$

が得られる。

c) 沈降する土砂に関する方程式　沈降する土砂量は，dx 区間において，dt 時間に単位幅では，

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}\bar{m}(h-z)+\frac{\partial}{\partial x}(h-z)\bar{m}\cdot u\right]\cdot dx\cdot dt$$

であるが，この値は一方ではつぎのように考えてみることができる。いま断面 I における水深を $h-z$ であるとすると，I の断面において，水流から浮遊するだけの仕事を与えられない土砂量は，単位幅あたり，$\bar{m}(h-z)\cdot u\cdot dt$ であって，もしいま，流水が定常的であると考えると，I の断面以降にあっては浮遊するだけの仕事が流水より与えられないものとして，この量は $T=(h-z)/w_0$ 時間後には全部沈降してしまうはずであり，また沈降したものの分布は I の断面より下流 uT の範囲にわたることになる。もしいま，沈降粒子が uT の長さに沿って一様に分布するものとすると，単位幅，単位長さにわたって

$$\bar{m}(h-z)u\cdot dt/uT=\bar{m}(h-z)dt/T$$

の量が沈澱することになる。したがって，dx の区間では，沈澱砂量は，

$$\bar{m}(h-z)u\cdot dt\cdot dx/T$$

であって，$T=(h-z)/w_0$ なることを考慮して，この値は $\bar{m}\cdot w_0\cdot dt\cdot dx$ となるから，これらのことを勘案のうえ，沈降する量に関する連続方程式として，

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{m}(h-z)+\frac{\partial}{\partial x}\bar{m}(h-z)u+\bar{m}w_0=0$$

の関係が得られる。

d) 河床変動に関する連続方程式　z は初期の河床より，任意の時間の河床の上昇を表わすものであって，一方掃流量の I 断面と II 断面での差，$\partial q_T/\partial x\cdot dx\cdot dt$ なる量が，dt 時間，dx 区間において浮上し，一方沈澱量として，$\bar{m}w_0\cdot dt\cdot dx$ が加わってくるから，河床の空げき率を λ とし，単位幅当りの dx 区間の dt 時間に変動を受ける土砂量 $(1-\lambda)\cdot\partial z/\partial t\cdot dt\cdot dx$ の連続条件は，

$$(1-\lambda)\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial q_T}{\partial x}=\bar{m}w_0$$

として得られる。

いままでの諸式を総合すれば，つぎのようになる。

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2g}\frac{\partial u^2}{\partial x}-i_0+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{C_s^2}\frac{u^2}{R}$$
$$+\frac{w_0}{Q}\{B(\rho_s-\rho_w)(m-\bar{m})(h-z)\}=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}m(h-z)u+\frac{\partial}{\partial t}m(h-z)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(h-z)u+\frac{\partial}{\partial t}(h-z)\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(m-\bar{m})(h-z)\cdot u+\frac{\partial}{\partial t}(m-\bar{m})(h-z)$$
$$=\frac{\partial q_T}{\partial x}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{m}(h-z)u+\frac{\partial}{\partial t}\bar{m}(h-z)+\bar{m}w_0=0\quad\cdots(4)$$

$$(1-\lambda)\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial q_T}{\partial x}=\bar{m}w_0\quad\cdots\cdots(5)$$

未知数 $h, z, u, m, \bar{m}$ の5つに対し，5つの方程式が立ち，原則的に解けることになる。

2. 基礎方程式の検討

上に導いた基礎方程式は，かなり複雑であり，もちろん非線型であるから，容易に解きがたいところである。そのためできるだけ項の省略を行なって検討することとした。

(A) 運動方程式の検討

運動方程式は，

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2g}\frac{\partial u^2}{\partial x}-i_0+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{C_s^2}\frac{u^2}{R}+\frac{w_0}{Q}$$
$$\times\{B(\rho_s-\rho_w)(m-\bar{m})(h-z)\}=0$$

であるが，このうち加速度を表わす

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2g}\frac{\partial u^2}{\partial x}$$

の項を無視し，h の x に関する変化に比して，z の x に関する変化が小さいと考え，$h-z\equiv H$ として表わすと，上記仮定によって，$\partial h/\partial x\fallingdotseq\partial H/\partial x$ であるから，この関係を用いて運動方程式を整理すると，

$$-i_0+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{C_s^2}\frac{u^2}{R}+\frac{w_0}{Q}$$
$$\times\{B(\rho_s-\rho_w)(h-z)(m-\bar{m})\}=0$$

となり，一般の水理学上の運動方程式に補正項が加わった形となる。

いま，$m(h-z)=a_s$，$\bar{m}(h-z)=\bar{a}_s$ とおけば，上の運動方程式ならびに式 (3) の連続方程式は，

$$-i_0+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{C_s^2}\frac{u^2}{R}+\frac{w_0}{Q}$$
$$\times\{B(\rho_s-\rho_w)(a_s-\bar{a}_s)\}=0\quad\cdots\cdots(1)'$$

$$\frac{\partial a_s}{\partial t}+\frac{\partial a_s u}{\partial x}=\frac{\partial \bar{a}_s u}{\partial x}+\frac{\partial \bar{a}_s}{\partial t}+\frac{\partial q_T}{\partial x} \quad \cdots\cdots\cdots(2)'$$

となる。式 (2)′ において，$\partial a_s/\partial t$, $\partial \bar{a}_s/\partial t$ が他の諸量に比して無視できるものと考えると，

$$\frac{\partial(a_s-\bar{a}_s)u}{\partial x}=\frac{\partial q_T}{\partial x}$$

となり，これを積分して，積分常数 $F(t)$（t のみの関数）を，$a_s=0$, $\bar{a}_s=0$ で $q_T=0$ から定めると，$F(t)=0$ となるから，式 (2)′ は，$(a_s-\bar{a}_s)\cdot u=q_T$ となる。この関係を，式 (1)′ に代入し，また，$Q\fallingdotseq A_T\rho_T u\fallingdotseq B\cdot H\cdot u\cdot q_T$ として表わし，径深 R については水路が広長方形断面であることから，$R\fallingdotseq H$ とすると，

$$\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\cdot H\cdot u^2=\frac{1}{C_s^2}\cdot u^4+\mu q_T$$

$$ただし \ \mu=\frac{\rho_s-\rho_w}{\rho_w}\cdot w_0$$

となる。これから u を求めると，

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{C_s^2H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\sqrt{\left\{C_s^2\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\cdot H\right\}^2-4\mu C_s^2 q_T}}$$

となる。

土砂を混入しない時の Chézy による平均流速を，

$$u_0=C_0\sqrt{H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)}$$

で表わすことにすると，上の平均流速は，

$$u=\frac{u_0}{\sqrt{2}}\frac{C_s}{C_0}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\mu C_s^2}{u_0^4}\cdot q_T\left(\frac{C_0}{C_s}\right)^4}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

という形で求められる。

この式から u の値が意味をもつためには，$C_0\fallingdotseq C_s$ と考えると，式 (6) から $u_0^4\geqq 4\mu C_s^2 q_T$ すなわち，

$$q_T\leqq u_0^4/4\mu C_s^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

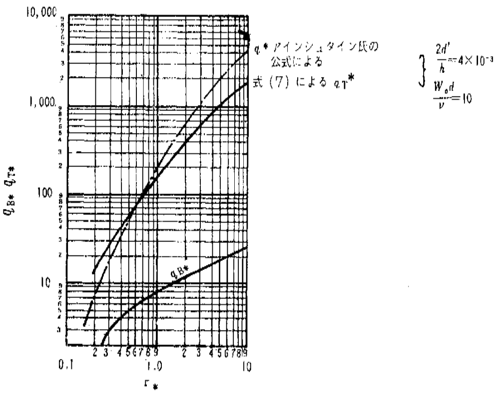
でなければならないことになる。すなわち，実際の流水中には種々の状態で浮遊砂や掃流砂が存在しうるはずであるが，ある勾配，流量，底面の粗度がきまると，必然的に可能最大運搬土砂量が存在することを示したものであって，たとえば，もしこの限度以上に浮遊砂がふくまれれば浮遊のエネルギーを失ないある部分は沈殿を始めることを意味する。

式 (6) はまた流水中の中にふくまれる土砂量によっていかなる程度に平均流速が変化するかを示し，合わせて可能運搬土砂量の限度に関する条件を提起したものであるが，この限界の q_T が他の人達によって見出されて来た全土砂運搬量とどのような関係にあるかを知るために，つぎの処置を施して，特に底面の粗度に関しては過去の実験結果より得られた値を用いたのであるが，一つの例としてアインシュタインの求めた全土砂輸送量との比較を行なってみたが，ここに求めた可能土砂輸送量の限度とはほぼ同様の傾向を有することが認められる。もちろん式 (7) は幅の広い長方形断面とし，水深の変化に比して底部の変化が小さいと考えているためにさらに一般に拡張するためにはこれらの要素を勘案のうえ検討を加えなければならないと思われる。

式 (7) で得た q_T の値について，アインシュタインの求めた値と比較するために，式 (7) を q^* と τ^* との関係に書きかえる必要がある。

まずアインシュタインの値の方は，摩擦速度を，$u_*=\sqrt{gHI}$ とし，$q_T{}^*=q_T/u_*\cdot d$, $\tau_*=u_*^2/\{\rho_s/\rho_w-1\}\cdot g\cdot d$ で表わし，$2d/h=4\cdot10^{-3}$, $w_0 d/\nu=10$ の場合について $q_T{}^*$ と τ_* の関係を表わす。図—2 の鎖線のようになる。

図—2



この線といま求めた $q_T=u_0^4/4\mu C_s^2$ との関係をしらべるために，この式を $q_T{}^*$ と τ_* とで表現することにする。

さて，$u/u_*=C_s/\sqrt{g}$ なることを加味すれば，上の式は，

$$q_T{}^*=\frac{1}{4}\left(\frac{u}{u_*}\right)^2\cdot\frac{u_*}{w_0}\cdot\tau_*$$

となる。つぎに，次元解析法によるつぎの関係

$$u/u_*=6.0+5.75\log_{10}(R/k_s)$$

と，水中での土砂粒子の落下速度

$$w_0=\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{\rho_s}{\rho_w}-1\right)\cdot\frac{gd}{C_D}\right\}^{1/2}$$

の関係を用いると，

$$q_T{}^*=\frac{1}{4}\left(\tau_* C_D\cdot\frac{3}{4}\right)^{1/2}\cdot\tau_*\left[6.0+5.75\log_{10}\left(\frac{R}{k_s}\right)\right]^2$$

の形に書き改められる。つぎに過去における実験によって，滑面水路に砂を混入して流した時の k_s/d と τ_* の関係は，砂れんが発生しない時は，

$$\log_{10}\left(\frac{k_s}{d}\right)=1+0.769\log_{10}\tau_*$$

で表わされることが実験上認められているので，この関係を上に代入して，

$$q_T{}^*=\frac{1}{4}\left(\tau_* C_D\frac{3}{4}\right)^{1/2}\cdot\tau_*\left[0.25+5.75\log_{10}\left(\frac{h}{d}\right)-4.428\log_{10}\tau_*\right]^2$$

という形が得られた。これについて，図—2 の点線と同じ条件，$2d/h=4\cdot10^{-3}$，$w\cdot d/\nu=10$ の場合についての計算の結果を実線で表わしたが，よく類似の関係が得られている。

（B）　洪水波の伝播速度の検討

連続方程式を，運動方程式に使ったと同じ記号を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial t}a_s+\frac{\partial}{\partial x}a_s u=\frac{\partial}{\partial t}H+\frac{\partial}{\partial x}Hu \cdots\cdots\cdots\cdots (2)'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}a_s+\frac{\partial}{\partial x}a_s u=\frac{\partial}{\partial t}\bar{a}_s+\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_s u+\frac{\partial q_T}{\partial x}\quad (3)'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{a}_s+\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_s u+w_0\frac{\bar{a}_s}{H}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)'$$

で表わすことができるから，式 (4)′ と式 (3)′ とより

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{a}_s+\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_s u$$

を消去し，これと，式 (2)′ とから $\bar{a}_s$ を H, u, q_T で表わすと，

$$\bar{a}_s=\frac{H}{w_0}\left[\frac{\partial q_T}{\partial x}-\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Hu}{\partial x}\right)\right]$$

となる。一方，式 (3)′,(2)′ より a_s を消去した式に求めた $\bar{a}_s$ を代入すれば，結局，式 (2)′,(3)′,(4)′ から $\bar{a}_s$, a_s とが消去された形となり，

$$w_0\left(\frac{\partial}{\partial t}H+\frac{\partial}{\partial x}Hu-\frac{\partial q_T}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial t}H\left[\frac{\partial q_T}{\partial x}-\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Hu}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}Hu\left[\frac{\partial q_T}{\partial x}-\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Hu}{\partial x}\right)\right] \cdots\cdots\cdots (8)$$

という 2 階の非線型の偏微分方程式が得られた。もし $w_0=0$, $\partial q_T/\partial x=0$ であれば浮遊砂のない時に相当し，$\partial H/\partial t+\partial Hu/\partial x=0$ という一般の洪水流の連続方程式となる。

式 (8) と式 (6) は原則的には当面する問題の基本形であるが，計算の容易なるように，

$$u=C\sqrt{H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ただし，

$$C=\frac{C_s}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\mu C_s{}^2 q_T}{u_0{}^4}\cdot\left(\frac{C_0}{C_s}\right)^4}}\equiv\text{一定}$$

と考えることにする。つぎに q_T については，q_T は u と C_s とに関係するが，C はまた水深の影響を受けるから，q_T は u と H の関数となるが，いま C を一定と考えることにすると，

$$\frac{\partial q_T}{\partial x}=\frac{\partial q_T}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 q_T}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 q_T}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial q_T}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

等々となり，また流速 u を式 (9) のように表わすことによって，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\fallingdotseq\frac{C}{2}\left[\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial H}{\partial x}-H\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right]\times\left[H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right]^{-1/2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\fallingdotseq\frac{C}{2}\left[\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial H}{\partial t}-H\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}\right]\times\left[H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right]^{-1/2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\fallingdotseq\frac{C}{2}\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\left\{H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\}^{-1/2}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\frac{C}{4}\times\left\{H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\}^{-3/2}\cdot\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$$

等々……で与えられる。このほか，さらに連続方程式の形を整理するために，第一次近似として土砂をふくまないときの基本式，

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}Hu=0,\quad u=C\sqrt{Hi_0}$$

が成り立つものとすると，近似的関係として，

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{3}{2}u\cdot\frac{\partial H}{\partial x}$$

となるので，これらの諸関係を先に求めた方程式に代入すると結局，

$$A_1\equiv u+\frac{C}{2}\left(H-\frac{\partial q_T}{\partial u}\right)\cdot\sqrt{\frac{i_0-\dfrac{\partial H}{\partial x}}{H}}$$

$$A_2\equiv\frac{C}{2}\left(H-\frac{\partial q_T}{\partial u}\right)\cdot\sqrt{\frac{H}{i_0-\dfrac{\partial H}{\partial x}}}$$

$$K_1\equiv\frac{u\cdot C}{8}\cdot\sqrt{\frac{i_0-\dfrac{\partial H}{\partial x}}{H}}\cdot\left(3H-\frac{\partial q_T}{\partial u}\right)+\frac{5}{4}u^2+\frac{C^2}{4}\left(\frac{\partial q_T}{\partial u}-H-\frac{1}{2}u\frac{\partial^2 q_T}{\partial u^2}\right)\cdot\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

として

$$H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+H(u+A_1)\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}+uH\left[A_1-\frac{w_0}{uH}A_2\right]\times\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+w_0\frac{\partial H}{\partial t}+w_0 A\frac{\partial H}{\partial x}=K_1\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$$

という形になる。

さて，$A_2 w_0/uH$ は A_1 に比して小さいとし，また，$K_1(\partial H/\partial x)^2$ は他の項に比して無視できるものとすると上の式は，

$$H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+H(u+A_1)\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}+uHA_1\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+w_0\frac{\partial H}{\partial t}+w_0 A_1\frac{\partial H}{\partial x}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

となる。$H=F(x-\omega t)$ とおいて上式に代入すると，

$$HF''(x-\omega t)\{\omega^2-\omega(u+A_1)+uA_1\}+\omega F'(x-\omega t)\{-\omega+A_1\}=0$$

となって，$\omega=A_1$ とおくことによってこの式は恒等的に満足するので，式 (10) は変形することなく進行する進行波 $H=F(x-A_1 t)$ を表わすことになり，このときの波速は $\omega=A_1$ であって，

$$\omega=A_1=u+\frac{C}{2}\left(H-\frac{\partial q_T}{\partial u}\right)\cdot\sqrt{\frac{i_0-\dfrac{\partial H}{\partial x}}{H}},$$

$$C=\frac{C_s}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\mu C_s{}^2 q_T}{u_0{}^4}\left(\frac{C_0}{C_s}\right)^4}}$$

となる。この波速を式 (9) を用いて整理すると，

$$w=u+\frac{u}{2H}\left(H-\frac{\partial q_T}{\partial u}\right)=\frac{3}{2}u-\frac{u}{2H}\cdot\frac{\partial q_T}{\partial u} \quad \cdots\cdots(11)$$

という形に求められた。

u は任意の時間，任意の場所で与えられるものであって，$u=C\sqrt{H\left(i_0-\frac{\partial H}{\partial x}\right)}$ という関係をもつものである。したがって，河床において掃流がなく，浮遊土砂もないときには，周知の洪水流方程式から得られる波速，$w'=-\frac{\partial H}{\partial t}\Big/\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{3}{2}u$ と比較すると，掃流がある時には波速は，$(u/2H)\cdot(\partial q_T/\partial u)$ に応じて減少することになる（しかし，ここで Chézy の平均流速係数 C は浮遊砂があるときと，そうでないときでは様相を異にし，洪水の初めから終りにかけて一定とは見れないことは注意が必要である)。

3．浮遊土砂をふくむ水流において，濃度拡散を考慮した平均流速係数について

この問題は本論文の範囲外であるから，簡単に述べることにする。

(A)　基礎方程式

a)　運動方程式　u を河心方向にとった流水の流速で x 方向とし，w を河底から上向きにとった方向の流速で z 方向とし，拡散は x 方向と z 方向のみに存在することとし外力の影響がないものとすると，濃度は一定でないから，運動方程式として，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \rho_T u}{\partial t}+u\frac{\partial \rho_T u}{\partial x}+w\frac{\partial \rho_T u}{\partial z}=\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{xz}}{\partial z}\\ \frac{\partial \rho_T w}{\partial t}+u\frac{\partial \rho_T w}{\partial x}+w\frac{\partial \rho_T w}{\partial z}=\frac{\partial P_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(12)$$

となる。ここに ρ_T は土砂をふくんだ水流の比重であって，前のように，

$$\rho_T=m(\rho_s-\rho_w)+\rho_w \quad \cdots\cdots(13)$$

で与えられる。

b)　連続方程式　土砂の水中における沈降速度を w_0 とし，式 (13) の関係を用いて，

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t}+\frac{\partial \rho_T u}{\partial x}+\frac{\partial \rho_T w}{\partial z}=w_0\frac{\partial(\rho_T-\rho_w)}{\partial z} \quad \cdots\cdots(14)$$

となる。

(B)　レイノルズ応力

運動方程式 (12) を変形すると，

$$\frac{\partial \rho_T u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(P_{xx}-\rho_T u^2)+\frac{\partial}{\partial z}\left\{P_{xz}-\rho_T u\cdot w+\int\left(\rho_T u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho_T u\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cdot dz\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

となるが，ここで，$u=\bar{u}+u'$，$w=w'$，$\rho_T=\bar{\rho}_T+\rho_T'$ とし，$\bar{\rho}_T$ $\bar{u}$ は比重と速度の平均値，$u'w'\rho_T'$ は x 方向 z 方向の速度変動値および比重の変動値であって，

$$\frac{1}{T}\int u'dt=\frac{1}{T}\int w'dt=\frac{1}{T}\int \rho_T'dt=0$$

であるとする。いま，$\bar{\rho}_T, \bar{u}$ はともに x 方向には変化がないものとすると，式 (15) からレイノズル応力として，

$$\tau=-\bar{\rho}_T\overline{u'w'}-\bar{u}\overline{\rho_T w'}+\int\left\{\bar{u}\left(\overline{\rho_T'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{\rho_T'\frac{\partial \omega'}{\partial z}}\right)+\bar{\rho}_T\left(\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{u'\frac{\partial \omega'}{\partial z}}\right)\right\}dz$$

で表わされる。ただし $\rho_T uw$ の時間的平均値を $\overline{\rho_T uw}$ で表わすと（以下同様の記号を用いる），$\overline{w'u'\rho_T'}$ は $\bar{\rho}_T\overline{u'w'}$，$\bar{u}\overline{\rho_T'w'}$ に比して無視できるものとした。一方連続方程式にも同じ操作を施してやって，これを代入して，

$$\begin{aligned}\tau=&-\bar{\rho}_T\overline{u'w'}-\bar{u}w_0\bar{\rho}_T+\bar{u}\int\frac{\partial}{\partial x}\overline{\rho_T'u'}\,dz\\&+\int\left\{\bar{u}\left(\overline{\rho_T'\frac{\partial u}{\partial x}}+\overline{\rho_T'\frac{\partial \omega'}{\partial z}}\right)+\rho_T\left(\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{u'\frac{\partial \omega'}{\partial z}}\right)\right\}dz \quad \cdots\cdots(16)\end{aligned}$$

となる。

浮遊砂がないときは，連続方程式は，$\partial u/\partial x+\partial\omega/\partial z=0$ であるから，容易に $\partial u'/\partial x+\partial\omega'/\partial z=0$ であることがわかるので，一般に浮遊土砂があるときでも，その混合程度がいちじるしくなければ，$\frac{\partial u'}{\partial x}=\alpha\frac{\partial \omega'}{\partial z}$（純水の時には $\alpha=-1$）と置いても差し支えないように思える。そのほか，$w'=-K_2u'$(*1) が成り立つとし，また

$$\frac{\rho_T'}{\rho_{Tm}}=K_0\left(1-\frac{\rho_w}{\rho_{Tm}}\right)^m\cdot I^s\cdot\left(\frac{u'}{u_m}\right)^n$$

が成り立つものとする。ここに ρ_{Tm} は比重の全水深に関する平均値，u_m は土砂混合流の平均流速とし，$(1-\rho_w/\rho_{Tm})^m$ は，$\rho_w=\rho_{Tm}$（土砂混入なし）の時に $\rho_T'=0$ となるようにするためのものであって，K_0, n, m, s はともに実験から決める値である。いま

$$K_1=K_0\left(1-\frac{\rho_w}{\rho_{Tm}}\right)^m\cdot\frac{\rho_{Tm}}{(u_m)^n}\cdot I^s$$

とすると，$\rho_T'=K_1(u')^n$ と仮定したことになる。上の表現を用い，また近似的に流れは浮遊土砂のない時の関係 $\tau=-\bar{\rho}_T\overline{u'w'}$ に近いとし，また $\tau=\tau_0(1-z/h)$，$\tau_0/\bar{\rho}_T=u_*{}^2$ で表わし，一方，流水の渦動粘性係数を η とおき，$\rho_T\eta$ を近似的に一定とみることによって，

---

*1　この問題については，乱流の統計理論によれば，簡単に，$w'=-k_2u'$ とは表わせないが取扱いの便宜上このように表わした。Reichardt の実験によると，壁面近くでは，$\sqrt{\bar{u}'^2}\fallingdotseq 2\sqrt{\overline{w}'^2}$，$\sqrt{\overline{w}'^2}\fallingdotseq\sqrt{-\overline{u'w'}}$ の関係があるとされている。また乱流統計理論によれば，$\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}}\right)^2=\frac{2\bar{u}'^2}{\lambda_{xx}{}^2}$，$\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}}\right)^2=\frac{2\bar{u}'^2}{\lambda_{xx}{}^2}+\frac{1}{4}\frac{(\partial\bar{u}'^2/\partial z)^2}{\bar{u}'^2}$，$\left(\overline{\frac{\partial w'^2}{\partial x}}\right)^2=\frac{2w'^2}{\lambda_{xx}{}^2}$ であるとされている。

$\bar{u}=U-\dfrac{gI}{2\eta}\left(1-\dfrac{z}{h}\right)^2$（ただし U は表面流速）

を用いて，結局レイノズル応力は，

$$\tau=-\bar{\rho}_T\overline{u'w'}-\bar{u}[w_0\bar{\rho}_T-K_1\cdot\alpha\cdot u_*^{n+1}\cdot K_2^{(1/2)-(n/2)}]+(1+\alpha)\left[\frac{\rho_{Tm}}{2}u_*^2+K_1\cdot K_2^{(1/2)-(n/2)}\cdot u_*^{n+1}\times\left\{\frac{U}{n+1}-\frac{gI}{2\eta}\frac{1}{n+5}\right\}\right]\quad\cdots\cdots(17)$$

となる。

もし，純水のときを考えると，$w_0=0$，$K_1=0$，$\alpha=-1$，$\bar{\rho}_T=\rho_w$ であるから $\tau=-\rho_w\overline{u'w'}$ となる。

(C) Chézy の平均流速係数

式(17)において，近似的表現をうるために，$\alpha=-1$，$K_2=1$ とおくことにすると（カルマンの常数を適当にとって）

$$\tau=-\frac{\bar{\rho}_T}{\rho_w}\cdot\rho_w\cdot\overline{u'w'}-\bar{u}\lambda\bar{\rho}_T,$$

$$\lambda\equiv\{w_0(\bar{\rho}_T-\rho_w)+K_1u_*^{n+1}\}/\bar{\rho}_T\quad\cdots\cdots(18)$$

であって，$u'w'$ は純水の時の値とあまりかわらないとすると，$\rho_w\overline{u'w'}$ は純水とした時の内部せん断力にほかならないため，

$$\tau_w=\rho_w\overline{u'w'}=\rho_w l^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2,\ l=kz,\ \tau/\bar{\rho}_T=u_*^2$$

とおき，また λ には ρ_T がふくまれているため一定とは見がたいが，近似的に一定とし，また $\bar{u}\lambda/u_*^2$ は土砂混入による影響項であるから，1に比して小さいと考えることにすると，上式から

$$\bar{u}-\frac{\lambda}{4u_*^2}\bar{u}^2=\frac{u_*}{k}\log z+C$$

が得られる。C は積分常数であるが，$\lambda=0$ の時は純水の時の抵抗法則にしたがわなければならないため，Nikuradse の実験を参照して C を定めると，結局

$$u=\sqrt{g}\cdot\left[\frac{1}{k}\log\frac{z}{\varepsilon}+8.48+\frac{\lambda}{4u_*^3}\cdot\bar{u}^2\right]\sqrt{hI}\quad\cdots\cdots(19)$$

が得られた。

式(20)において，左右辺を z に関して平均値をとることによって平均流速が得られ，平均流速を u_m とすると，

$$u_m=\sqrt{g}\left[8.5+\frac{1}{k}\log\frac{h}{\varepsilon}-\frac{1}{k}+\frac{\lambda}{4u_*^3}\cdot\frac{61}{45}\cdot u_m^2\right]\sqrt{hI}\quad\cdots\cdots(20)$$

となる。純水の時の Chézy の平均流速係数を C_0 とし，浮遊砂があるときのそれを C_s とすると，式(20)から，

$$C_0=\sqrt{g}\left[8.5+\frac{1}{k}\log\frac{h}{\varepsilon}-\frac{1}{k}\right]$$

なることを考慮のうえ，

$$C_s=C_0\left\{1+\frac{\sqrt{g}}{C_0}\frac{\lambda}{u_*^3}\cdot u_m^2\cdot 0.33\right\}\quad\cdots\cdots(21)$$

ここに

$$\lambda=\{w_0(\bar{\rho}_T-\rho_w)+K_1u_*^{n+1}\}/\bar{\rho}_T,$$

$$K_1=K_0\left(1-\frac{\rho_w}{\rho_{Tm}}\right)^m\cdot\frac{\rho_{Tm}}{(u_m)^n}\cdot I^s$$

である。

1.，2. では，土砂を浮遊させなければならない仕事量を別に取り出して考えたのであるが，いまその値を平均流速係数の中にふくめることとすると，浮遊土砂を浮遊せしめるためには，水面勾配が $\varDelta$ だけ増加しなければならない。この修正を考えれば，

$$C_s\fallingdotseq C_0\left(1-\frac{\varDelta}{2I}\right)\left[1+\frac{\sqrt{g}}{C_0}\lambda\left(\frac{u_m}{u_*}\right)^2\cdot\frac{0.33}{u_*}\right]\quad\cdots\cdots(22)$$

ここで，

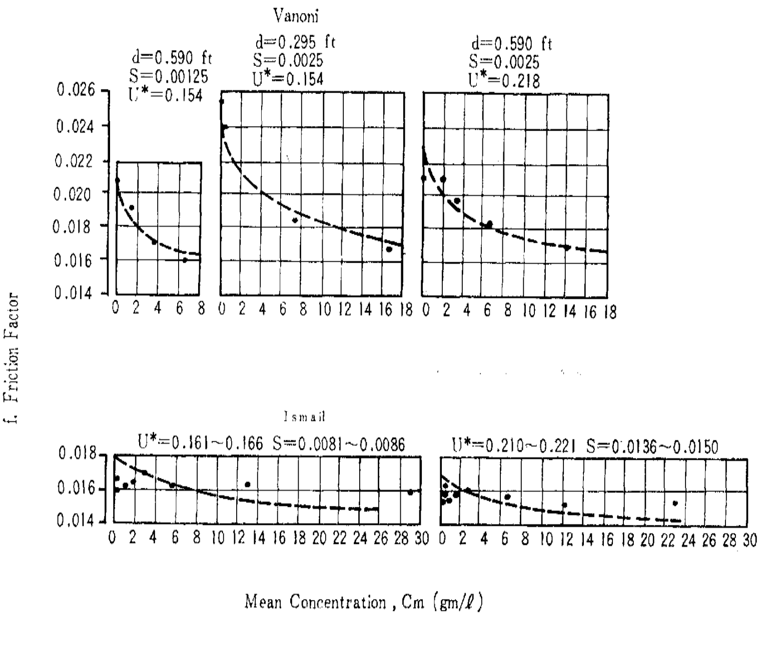
$$\varDelta=\frac{w_0}{u_m}\left(1-\frac{\rho_w}{\rho_{Tm}}\right)$$

となる。

(D) 実験との比較

Vanoni は長方形断面幅 33 in，長さ 60 ft の水路において，底部を，0.88 mm の砂でセメンテーションを行ない，水路に平均径 0.1 mm の砂を流水とともに流しその間の水面勾配などを測定して，浮遊砂の含有量と粗度係数の関係を求めた。一方，Ismail も同じような実験を行ない，10.5×3 in の水路であったが，このときは，Vanoni の時と比較して砂の投下量が多く，砂の堆積，砂れんの発生などを見ている。このときの平均粒径は，0.1～0.16 mm であった。図－3 はこの両者の実験値であ

図－3



り (Ismail の方は明らかに砂れんの発生をみたものと報告あるものは除いて), いずれも濃度につれて摩擦係数も減少する傾向にある。図中, ●印は実験の結果であるが, 式 (22) において, $m=0.5$, $n=3$, $s=0.5$, $K_0=100$ とおいて計算した結果を点線で示した。図に見られるように実測と計算とはかなりよく一致している。なお計算に当たっては, $f_0/f_s=(C_s/C_0)^2$ とし, f_0 の値は, Vanoni, Ismail の実験値から適当に定めた。

4. む す び

以上 **1.** には, もし洪水流に土砂をふくんだときには, 従来の洪水流の方程式に若干の補正が必要であることを示し, また連続方程式には水流のみならず土砂の連続性をも考慮しなければならないことを述べ, これが基本方程式中にどのようにとり入れるかを式の樹立に当たって種々考察した。**2.** には **1.** において得られた基本方程式をもととして, まず運動方程式から流水に土砂をふくんだ時には流速に若干の修正を要することをたしかめ, またこの導入に際して得られた掃流, 浮遊土砂量の限度は, アインシュタインの導いた公式によって数値的に計算した値と同じような傾向にあることを確認した。つぎに連続方程式からは先に見出した流速を用いて波速の算出を近似的に出す試みを行ない, 波速に関しても, 土砂を流水中にふくむときには若干の修正が必要であることを示した。かかる論議を遂行する上に非常に大きな役割を果たす平均流速係数は, 浮遊砂があるときとそうでない時には様相を異にするものであるから, この面からも検討を加える必要があるものとして, **3.** には, 定流状態において流水に土砂をふくむ場合の摩擦係数, 平均流速係数を求め, すでに公表されている, Vanoni や Ismail の実験の結果とを比較してよく一致することを確かめた。

波高のてい減性については, 第一次近似を用いれば, 微少変形理論を用いて線型化され容易に解くことができるが, これ以上の式の展開は蛇足になると思うのであえて省略した。

このように洪水流中に浮遊土砂の影響をとり入れると, 若干の修正を今までの理論に適用すべきであることが確かめられたが, なお考慮すべき要素も多く今後実験と相まって研究すべき多くの点が残されており, 将来の発展がのぞまれるところである。

終りにのぞみ, 本論文の作成に当たって終始御指導を賜った, 中央大学の林教授に心からなる謝意を表するものである。

参 考 文 献

1) 例えば応用水理学 など
2) 野満:新河川学
3) 佐藤:水理学
4) 矢野:洪水特論
5) 速水:On the propagation of flood waves
6) 若村:浮遊砂を有する水流の諸特性について, 土木学会論文集 第 46 号
7) 室田:浮遊砂濃度と流速分布の関連について, 土木学会誌 第 38 巻 11 号
8) 岩垣:限界掃流力に関する基礎的研究, 土木学会論文集 第 41 号
9) Leliavsky: An introduction to fluvial Hydraulics
10) Vanoni: Some effects of suspended sediment on flow characteristics

(1963. 4. 5・受付)