結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析

A DYNAMIC ANALYSIS OF CONTINUOUS BEAMS ON ELASTIC SUPPORTS

平　井　一　男*
By Itio Hirai

要　旨　この研究は，変位・回転に対して抵抗を持つ弾性支承上の連続ばりの固有振動数・振動モードを結合法によって求める方法について述べたものである。この方法は，一本の連続したはりに中間支点や弾性支承を逐次結合してゆく方法であり，さらにこのはりの両端を他の部材や支点に結合することも可能である。

1. 緒　論

筆者は，結合法によるランガー桁橋や不整格子桁の動的解析をすでに発表している[1),2)]が，ここでは同様の手法すなわち結合法によって，変位あるいは回転に対して抵抗を持つ弾性支承上の連続ばりの固有振動数・振動モードを求める方法について述べる。一般に構造物の固有振動数・振動モードが与えられるならば，その動的レスポンスの解析は可能であるから，この論文では主題のはりの固有振動数・振動モードを求める方法について主として発表する。

ここでいう弾性支承とは，変形に比例した抵抗を生じる支承であり，今後変位・回転に対して抵抗を持つ支承をそれぞれ変位支承・回転支承と呼ぶことにする。この種のはりは静力学的には多く取り扱われているけれども，動力学的解析はほとんど行なわれていないようである。その動力学的解析の一つとして振動たわみ角法[3)]の適用が考えられるが，ここでは結合法と呼ぶ解析法を使用した。すなわち，連続ばりを１本のはりと考え，この１本のはりに各支承を，その支承条件を満足するように順次結合して基礎式を誘導する方法をとった。振動たわみ角法でははりを各スパンごとに切断し，その両端と支承との間における変形の条件と力の平衡条件とを考えて式を誘導する必要があるが，上に述べた解析法によると，単に連続した１本のはりに支承を結合することのみを考えて基礎式をたてることができるから，考え方が非常に簡明になる。このように１本のはりに支承を結合してゆくのでこの解析法を結合法と名づけている。はりと全支承との結合は必ずしも同時に行なわなくてよいのであって，数値計算の可能な範囲において順次結合して解析を進めてゆけばよい。特に支承が多い場合には，はり全体を適当なグループに分割し，各グループについて上述の解析を逐次行ない，最後にそれらの両端を結合して，与えられた連続ばりに組み立てることもできる。

また，振動たわみ角法によって求めた振動モードは，各スパンごとに異なった式であらわされるが，結合法によると全スパンにわたり一つの式で与えられる。したがって，走行荷重をうけるはりのレスポンスの解析のとき[4)]，振動たわみ角法ではスパンごとに異なった関数・初期条件を使用して数値計算を行なう必要が生じるが，結合法では振動モードが一つの関数であらわされるから前者のような不便が除かれる。なお，結合法によると振動モードを正規化するさい，その係数がきわめて容易に求められる点で特にすぐれていると思う。

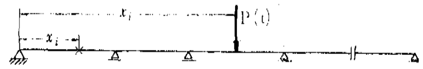
2. 理　論

固有振動数と振動モードに関する一般理論を述べるまえに，動荷重をうけるはりの基礎式と主要な記号を **(1)**，**(2)** において述べる。

(1) 動的集中荷重をうけるはりのたわみとたわみ角

筆者は，さきに 図―1 に示すはりの固有振動数 ω_m・

図―1



正規化した振動モード $\Phi_m(x)$ を求めることができたならば，集中荷重 $P(t)$ が $x=x_j$ なる点に作用するとき，$x=x_i$ 点の測定点におけるたわみのレスポンス $V(x_i,t)$ は式 (1),(2) にて求めることができることを述べた[4)]。

$$\ddot{v}_m+\omega_m{}^2 v_m=\Phi_m(x=x_i)\Phi_m(x=x_j)P(t)\cdots\cdots(1)$$

$$V(x_i,t)=\sum_{m=1}^{\infty} v_m \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに

v_m：m 次の振動モード $\Phi_m(x)$ に対応する振動の大きさ

ω_m：m 次の固有振動数

$\varphi_m(x)$：m 次の振動モード

$\Phi_m(x)$：正規化した m 次の振動モード（$c_m\varphi_m(x)=\Phi_m(x)$）

$\Phi_m(x)$ は正規化条件式

$$\int_l \rho\Phi_m{}^2(x)dx=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

を満足する。ただし

ρ：はりの単位長さあたりの質量

* 正員　熊本大学助教授　工学部応用力学教室

単純ばりの場合には

$$\omega_m=\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\Phi_m(x)=\sqrt{\frac{2}{M}}\sin\frac{m\pi x}{l}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ここに

l：スパン

M：はりの全質量

また，たわみ角 $\theta(x_i)$ は式 (6) により求めることができる。

$$\theta(x_i,t)=\frac{\partial V(x_i,t)}{\partial x_i}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

定常強制力　$P(t)=P_0\sin\omega t$　が作用するときには式 (1) は式 (7) となる。

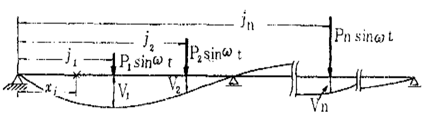
$$v_m=\Omega_m\Phi_m(x=x_i)\Phi_m(x=x_j)P_0\sin\omega t\ \cdots(7)$$

ここに

$$\Omega_m=1/\{\omega_m{}^2-\omega^2\}$$

強制周期力 $P=P_0\sin\omega t$ が作用するとき，その荷重点・測定点の座標が与えられたならば，任意の測定点のたわみ $V(x_i,t)$，たわみ角 $\theta(x_i,t)$ はそれぞれ式 (2) と (7)，(6) により求めることができるから，図—2 に示すよう

図—2



な n 個の強制周期力が作用するとき，測定点 x_i におけるたわみは式 (8) により与えられる。

$$V(x_i)=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m(x_i)\{\Phi_m(j_1)P_1+\Phi_m(j_2)P_2+\cdots\cdots\Phi_m(j_n)P_n\}\ \cdots\cdots(8)$$

ここに

$$\Phi_m(j_j)=\Phi_m(x=j_j),\ \Phi_m(x_i)=\Phi_m(x=x_i)$$

（j の添字は荷重点番号を示す）

ただし，ここで考えている集中荷重 $P_i\sin\omega t$ は同一位相の周期力であるから，$\sin\omega t=1$ における瞬間のみについて考え，式の表現を簡単にした。この論文において取り扱う荷重はすべて周期力であるから，上記のように以下の式の表現をも簡単化するが，このように表現すれば，式 (2),(6) は式 (2)′,(6)′ のように書ける。

$$V(x_i)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)'$$

$$\theta(x_i)=\frac{dV(x_i)}{dx_i}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{dv_m(x_i)}{dx_i}=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m{}'(x_i)\Phi_m(x=x_j)P_0\ \cdots\cdots(6)'$$

また，図—2 に示すはりのたわみ角 $\theta(x_i)$ は式 (8) より式 (9) にて与えられる。

$$\theta(x_i)=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m{}'(x_i)\{\Phi_m(j_1)P_1+\Phi_m(j_2)P_2+\cdots\cdots\Phi_m(j_n)P_n\}\ \cdots\cdots(9)$$

したがって，図—2 の載荷点におけるたわみ $V_1,V_2,\cdots,V_n$，たわみ角 $\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_n$ は式 (10),(11) にてあらわされる。

$$\left.\begin{array}{l}V_1=a_{11}{}^PP_1+a_{12}{}^PP_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^PP_n\\ V_2=a_{21}{}^PP_1+a_{22}{}^PP_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^PP_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ V_n=a_{n1}{}^PP_1+a_{n2}{}^PP_2+\cdots\cdots a_{nn}{}^PP_n\end{array}\right\}\cdots\cdots(10)$$

ここに

$$a_{ij}{}^P=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m(x_i)\Phi_m(j_j),\ (i,j=1,2,3,\cdots,n)$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1=b_{11}{}^PP_1+b_{12}{}^PP_2+\cdots\cdots b_{1n}{}^PP_n\\ \theta_2=b_{21}{}^PP_1+b_{22}{}^PP_2+\cdots\cdots b_{2n}{}^PP_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \theta_n=b_{n1}{}^PP_1+b_{n2}{}^PP_2+\cdots\cdots b_{nn}{}^PP_n\end{array}\right\}\cdots\cdots(11)$$

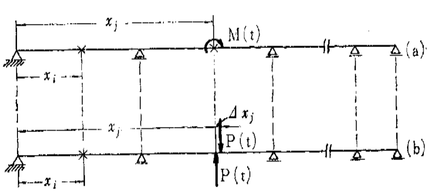
ここに

$$b_{ij}{}^P=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m{}'(x_i)\Phi_m(j_j),\ (i,j=1,2,3,\cdots,n)$$

（2）動的モーメント荷重をうけるはりのたわみとたわみ角

図—3 (a) に示すはりに動的モーメント荷重が作用するとき，このモーメント荷重は図—3 (b) に示すように

図—3



微小な距離 Δx_j に作用する偶力として置き換えることができる。このようにモーメント荷重を2つの集中荷重として等価的にあらわすならば，このときのたわみは，式 (1) の関係がそのまま使用できて次式が成立する。

$$\ddot{v}_m+\omega_m{}^2v_m=\Phi_m(x_i)\{\Phi_m(x_j+\Delta x_j)-\Phi_m(x_j)\}P(t)$$
$$=\Phi_m(x_i)\left\{\frac{\Phi_m(x_j+\Delta x_j)-\Phi_m(x_j)}{\Delta x_j}\right\}P(t)\cdot\Delta x_j$$
$$=\Phi_m(x_i)\Phi_m{}'(x_j)M(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

すなわちモーメント荷重が作用するときはりに生じるたわみを求めるには，集中荷重が作用するときのたわみを求める式 (1) において，単に $\Phi_m(x_j)$ のかわりに $\Phi_m{}'(x_j)$，荷重 $P(t)$ のかわりにモーメント荷重 $M(t)$ と置けばよいことがわかる。

また，たわみ角 $\theta(x_i)$ は式 (6) がそのまま使用できる。集中荷重の場合におけると同様に，この論文中において作用させるモーメント荷重は定常周期モーメント荷重のみであるから，$M\sin\omega t$ の代りに M または $M(t)$ と書くことにする。

図—3 (a) のはりにモーメント荷重 M が作用するとき，$x=x_i$ 点のたわみは次式にてあらわされる。

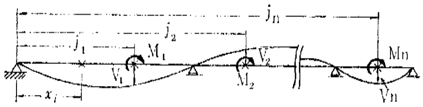
$$V(x_i)=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m(x_i)\Phi_m'(x_j)M \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

また，たわみ角 $\theta(x_i)$ は式 (14) にて与えられる。

$$\theta(x_i)=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m'(x_i)\Phi_m'(x_j)M \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

したがって，図—4 に示すように n 個のモーメント荷重

図—4



が作用するとき，$x=x_i$ 点のたわみ $V(x_i)$，たわみ角 $\theta(x_i)$ は式 (15),(16) にてあらわされる。

$$V(x_i)=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m(x_i)\{\Phi_m'(j_1)M_1+\Phi_m'(j_2)M_2+\cdots\cdots\Phi_m'(j_n)M_n\}\cdots(15)$$

$$\theta(x_i)=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m'(x_i)\{\Phi_m'(j_1)M_1+\Phi_m'(j_2)M_2+\cdots\cdots\Phi_m'(j_n)M_n\}\cdots(16)$$

また，載荷点におけるたわみ $V_1,V_2,\cdots\cdots,V_n$，たわみ角 $\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_n$ は式 (17),(18) にて示される。

$$\left.\begin{array}{l}V_1=a_{11}{}^{M}M_1+a_{12}{}^{M}M_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^{M}M_n\\ V_2=a_{21}{}^{M}M_1+a_{22}{}^{M}M_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^{M}M_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ V_n=a_{n1}{}^{M}M_1+a_{n2}{}^{M}M_2+\cdots\cdots a_{nn}{}^{M}M_n\end{array}\right\}\cdots(17)$$

ただし

$$a_{ij}{}^{M}=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m(x_i)\Phi_m'(j_j)$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1=b_{11}{}^{M}M_1+b_{12}{}^{M}M_2+\cdots\cdots b_{1n}{}^{M}M_n\\ \theta_2=b_{21}{}^{M}M_1+b_{22}{}^{M}M_2+\cdots\cdots b_{2n}{}^{M}M_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \theta_n=b_{n1}{}^{M}M_1+b_{n2}{}^{M}M_2+\cdots\cdots b_{nn}{}^{M}M_n\end{array}\right\}\cdots(18)$$

ただし

$$b_{ij}{}^{M}=\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m\Phi_m'(x_i)\Phi_m'(j_j)$$

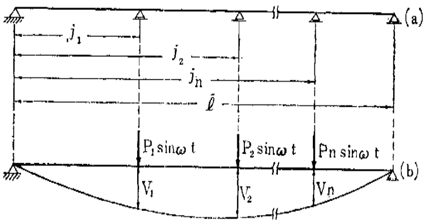
(3) 連続ばりの自由振動

従来，連続ばりの固有振動数・振動モードを決定するには，各支点上の左右のたわみ角・端モーメントが等しいという条件が用いられてきた。このような方法では，基礎式は比較的簡単にたてることができても，数値計算にはかなりの労力を要する。以下に述べる方法による方[5),6)]が便利である。

図—5 (a) に示す連続ばりについて考える。図—5 (b) に示すように，まず中間支点を取り去った単純ばりに集中荷重 $P_1,P_2,\cdots\cdots,P_n$ を中間支点に作用させる。この時の載荷点のたわみ $V_1,V_2,\cdots\cdots,V_n$ は式 (10),(4),(5) により求められる。しかるに与えられた連続ばり上の中間支点では

$$V_1=V_2=\cdots\cdots=V_n=0$$

図—5



である。すなわち式 (19) が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}{}^{P}P_1+a_{12}{}^{P}P_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^{P}P_n=0\\ a_{21}{}^{P}P_1+a_{22}{}^{P}P_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^{P}P_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}{}^{P}P_1+a_{n2}{}^{P}P_2+\cdots\cdots a_{nn}{}^{P}P_n=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(19)$$

すべてが 0 でない $P_i,(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ の値に対して上式が成立するためには式 (20) が必要である。

$$\begin{vmatrix}a_{11}{}^{P} & a_{12}{}^{P}\cdots\cdots a_{1n}{}^{P}\\ a_{21}{}^{P} & a_{22}{}^{P}\cdots\cdots a_{2n}{}^{P}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}{}^{P} & a_{n2}{}^{P}\cdots\cdots a_{nn}{}^{P}\end{vmatrix}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

上式は連続ばりの振動数方程式にほかならない。式 (20) より得られた固有振動数 ω_c, $(c=1,2,3,\cdots\cdots,\infty)$ の値を式 (19) に代入すれば，$P_1,P_2,\cdots\cdots,P_n$ の比が決定できる。この比を式 (8) に代入すれば，連続ばりの振動モード $\varphi_c(x)$ が決定できる。単純ばりの振動モード $\Phi_m(x)$ は式 (5) により与えられる正弦波関数であるから，上述の解析法では連続ばりの振動モードを sin のフーリェ級数に展開したことになる。いまこれを次式のように書けたとする。

$$\varphi_c(x)=d_1\sin\frac{\pi x}{l}+d_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots \quad \cdots\cdots(21)$$

この正規化した振動モード $\Phi_c(x)$ は次式により求めることができる。

$$\Phi_c(x)=\sqrt{\frac{2}{M}\cdot\frac{1}{d_1{}^2+d_2{}^2+\cdots}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}d_i\sin\frac{i\pi x}{l}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

上に述べた方法によると，正規化モード $\Phi_c(x)$ を式 (22) の簡単な式で決定できる点がとくにすぐれていると思う。さらに，従来の解析法[3),7)]では，振動モード $\Phi_c(x)$ の関数は，各スパンごとに異なったものとなるが，この方法によると全スパンにわたって一つの関数で表示できる。一般にはりが走行荷重をうけるとき，そのレスポンスを求める運動方程式は，式 (1) において単に荷重点の座標を時間の関数として $x_j=x_j(t)$ とおけばよい[4)]。すなわち，

$$\ddot{v}_m+\omega_m{}^2v_m=\Phi_m(x_i)\Phi_m\{x_j=x_j(t)\}P(t)\cdots(23)$$

たとえば，荷重が a の地点より初速度 v_0，加速度 u で移動を開始したとすると，$x_j(t)$ は式 (24) により与え

られる。

$$x_j(t)=a+v_0t+0.5\,ut^2 \quad \cdots\cdots(24)$$

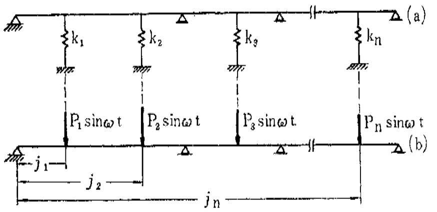
したがって，振動モードがスパンごとに異なった関数であらわされていると，スパンごとに初期条件を与え，異なった基礎式を解く必要があるが，振動モードがスパン全体にわたり一つの関数によって与えられていると，このような不便がなくなり，数値計算を容易に行なうことができる。

（4） 弾性支承を有する連続ばりの自由振動

ここで述べる弾性支承は，変位に対して抵抗を持つ支承と回転に対して抵抗を持つ支承とである。両方の場合とも変形に比例した抵抗を持つものとする。なお，最後に変位・回転ともに抵抗を有する支承についても解析を行なった。

a） 変位支承を有する場合　図—6（a）に示す連続ばりについて考える。直接この振動系の固有振動数・振動モードを求めるにはかなり複雑な解析を必要とするので，ここではこの系の支持条件を順次満足させながら解析を進める方法をとる。

図—6



まず図—6（b）に示すように変位支承を取り去った連続ばりについて考える。この連続ばりの固有振動数 ω_c・振動モード $\Phi_c(x)$ は（3）で述べた方法により求めることができる。この $\Phi_c(x)$ は原振動系（a図）の中間支点の条件を満足しているから，この $\Phi_c(x)$ を用い，これに弾性支持の条件を満足させることを考える。

いま，この連続ばりの変位支承のあった点に集中荷重 $P_i\sin\omega t$，$(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$ を作用させる（b図）。このとき荷重点のたわみ $V_1,V_2,\cdots\cdots,V_n$ は式（10）により求めることができる。ここに

$$a_{ij}=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_c^2-\omega^2}\Phi_c(x_i)\Phi_c(j_j)$$

変位支承のバネ常数を k_i，$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ とすると荷重と変形との関係は次式によりあらわされる。

$$V_i=P_i{}^S/k_i=k_i{}'P_i{}^S,\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)\cdots\cdots(25)$$

図—6（b）に示す連続ばりに集中荷重 P_i を作用させたとき，その荷重点における変位と荷重との関係は式（10）により与えられる。この連続ばりに式（25）の関係を持つ変位支承を結合すれば，図—6（a）の原系ができる。このためには，両者の変位を等しく置く必要があるが，これは式（10）と式（25）とを等置することにより満足できる。このようにしてでき上がった与系には，そのバネとの接合点部において

$$P_i+P_i{}^S=P_i,\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)\cdots\cdots(26)$$

によりあらわされる外力が作用していることになる。自由振動している時には外力は0であるはずであるから，式（26）は式（27）となる。

$$P_i+P_i{}^S=0 \quad \cdots\cdots(27)$$

上記の関係を式（10）と式（25）とを等置したものに代入すると次式を得る。

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}{}^P+k_1{}')P_1+a_{12}{}^PP_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^PP_n=0\\ a_{21}{}^PP_1+(a_{22}{}^P+k_2{}')P_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^PP_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}{}^PP_1+a_{n2}{}^PP_2+\cdots\cdots(a_{nn}{}^P+k_n{}')P_n=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(28)$$

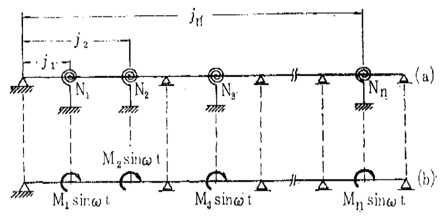
すべてが0でない P_i の値に対して上式が成立するためにはその係数行列が0でなければならない。すなわち

$$\begin{vmatrix}a_{11}{}^P+k_1{}' & a_{12}{}^P\cdots\cdots & a_{1n}{}^P\\ a_{21}{}^P & a_{22}{}^P+k_2{}'\cdots\cdots & a_{2n}{}^P\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}{}^P & a_{n2}{}^P\cdots\cdots & a_{nn}{}^P+k_n{}'\end{vmatrix}=0\ \cdots\cdots(29)$$

式（29）は振動数方程式にほかならない。式（29）より得られた固有振動数 ω_s，$(s=1,2,\cdots\cdots,\infty)$ の値を式（28）に代入すると $P_1,P_2,\cdots\cdots,P_n$ の比が決定できるから，これを式（8）に代入すると振動モード $\varphi_s(x)$ が決定できることになる。ただし，式（8）における $\omega_m,\Phi_m(x_i)$ には式（20）より得られる連続ばりの固有振動数 ω_c，式（22）により与えられる振動モード $\Phi_c(x)$ を使用する。

b） 回転支承を有する場合　図—7（a）に示す連続ばりについて考える。ただし，この回転支承は回転剛性のみを有し，鉛直方向の変位に対しては自由に変形しうるものとする。

図—7



いま，この回転支承を切り離し，中間支点のみを有する連続ばり（図—7（b））について考える。この連続ばりの，もと回転支承のあった箇所に図—7（b）に示すような周期モーメント荷重 $M_i\sin\omega t$，$(i=1,2,\cdots,n)$ を作用させ，このときのたわみ角を求めることについて考えてみる。この連続ばりの固有振動数 ω_c，振動モード $\Phi_c(x)$ を使用すれば，載荷点のたわみ角 θ_i，$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ とモーメント荷重との関係は式（18）にて与えられる。ただし

$$b_{ij}{}^M=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_c^2-\omega^2}\Phi_c{}'(x_i)\Phi_c{}'(j_j)$$

回転支承の回転剛性を N_i とすれば，モーメント荷重と回転角との関係は式 (30) にてあらわされる。

$$\theta_i = N_i M_i^S \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

(4) a) において述べたと同様の解析手法をとると，回転支承と連続ばりとが結合できて式 (31) が得られ，さらに振動数方程式は式 (32) により与えられる。

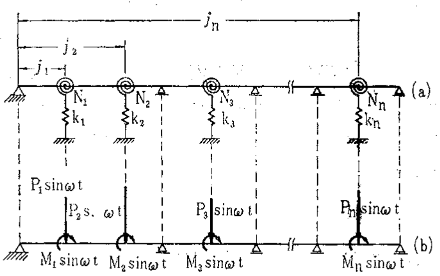
$$\left.\begin{aligned}
&(b_{11}{}^M+N_1)M_1+b_{12}{}^M M_2+\ \cdots\cdots\ b_{1n}{}^M M_n=0\\
&b_{21}{}^M M_1+(b_{22}{}^M+N_2)M_2+\ \cdots\cdots\ b_{2n}{}^M M_n=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_{n1}{}^M M_1+b_{n2}{}^M M_2+\ \cdots\cdots(b_{nn}{}^M+N_n)M_n=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$\begin{vmatrix}
b_{11}{}^M+N_1 & b_{12}{}^M & \cdots\cdots b_{1n}{}^M\\
b_{21}{}^M & b_{22}{}^M+N_2 & \cdots\cdots b_{2n}{}^M\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
b_{n1}{}^M & b_{n2}{}^M & \cdots\cdots b_{nn}{}^M+N_n
\end{vmatrix}=0\ \cdots\cdots(32)$$

式 (32) より得られた固有振動数 ω_q, $(q=1,2,\cdots\cdots,\infty)$ の値を式 (31) に代入すれば M_i, $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ の比が求められるから，この比を式 (15) に代入して振動モード $\varphi_q(x)$ が決定できる。ただし，式 (15) の Ω_m, $\Phi_m(x_i)$ には連続ばりの $\omega_c, \Phi_c(x_i)$ を使用する。

c)　変位・回転に対して抵抗を持つ場合　図—8 (a) に示す連続ばりについて考える。この弾性支承は変位・回転ともに抵抗を有するものであり，その剛性を a), b) に述べた $k_i', N_i, (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ にてあらわすことにする。

図—8



① 第1法：まず 図—8 (b) に示すように弾性支承を取り除いた連続ばりに集中荷重 $P_i\sin\omega t$, $M_i\sin\omega t$, $(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$ を作用させる。このとき載荷点のたわみ $V_1, V_2, \cdots\cdots, V_n$, たわみ角 $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_n$ は式 (10), (11), (17), (18) より求められる。

$$\left.\begin{aligned}
V_1&=a_{11}{}^P P_1+P_{12}{}^P P_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^P P_n+a_{11}{}^M M_1+a_{12}{}^M M_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^M M_n\\
V_2&=a_{21}{}^P P_1+a_{22}{}^P P_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^P P_n+a_{21}{}^M M_1+a_{22}{}^M M_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^M M_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
V_n&=a_{n1}{}^P P_1+a_{n2}{}^P P_2+\cdots\cdots a_{nn}{}^P P_n+a_{n1}{}^M M_1+a_{n2}{}^M M_2+\cdots\cdots a_{nn}{}^M M_n\\
\theta_1&=b_{11}{}^P P_1+b_{12}{}^P P_2+\cdots\cdots b_{1n}{}^P P_n+b_{11}{}^M M_1+b_{12}{}^M M_2+\cdots\cdots b_{1n}{}^M M_n\\
\theta_2&=b_{21}{}^P P_1+b_{22}{}^P P_2+\cdots\cdots b_{2n}{}^P P_n+b_{21}{}^M M_1+b_{22}{}^M M_2+\cdots\cdots b_{2n}{}^M M_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta_n&=b_{n1}{}^P P_1+b_{n2}{}^P P_2+\cdots\cdots b_{nn}{}^P P_n+b_{n1}{}^M M_1+b_{n2}{}^M M_2+\cdots\cdots b_{nn}{}^M M_n
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

ここに

$$a_{ij}{}^P=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_c{}^2-\omega^2}\cdot\Phi_c(x_i)\Phi_c(j_j),$$

$$b_{ij}{}^P=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_c{}^2-\omega^2}\cdot\Phi_c'(x_i)\Phi_c(j_j),$$

$$a_{ij}{}^M=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_c{}^2-\omega^2}\cdot\Phi_c(x_i)\Phi_c'(j_j),$$

$$b_{ij}{}^M=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_c{}^2-\omega^2}\cdot\Phi_c'(x_i)\Phi_c'(j_j)$$

ω_c：連続ばりの固有振動数

$\Phi_c(x)$：連続ばりの正規化した振動モード

図—8 (b) の連続ばりに集中荷重・モーメント荷重が作用するときのたわみ・たわみ角が上式により求めることができるから，a) において述べた解析手法をここでくり返して弾性支承を連続ばりに結合すると式 (34) が得られ，さらに与系 (図—8 (a)) の固有振動数を式 (35) により求めることができる。

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}P_1+a_{12}{}^P P_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^P P_n+a_{11}{}^M M_1+a_{12}{}^M M_2+\cdots\cdots a_{1n}{}^M M_n=0\\
&a_{21}{}^P P_1+a_{22}P_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^P P_n+a_{21}{}^M M_1+a_{22}{}^M M_2+\cdots\cdots a_{2n}{}^M M_n=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}{}^P P_1+a_{n2}{}^P P_2+\cdots\cdots a_{nn}P_n+a_{n1}{}^M M_1+a_{n2}{}^M M_2+\cdots\cdots a_{nn}{}^M M_n=0\\
&b_{11}{}^P P_1+b_{12}{}^P P_2+\cdots\cdots b_{1n}{}^P P_n+b_{11}M_1+b_{12}{}^M M_2+\cdots\cdots b_{1n}{}^M M_n=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_{n1}{}^P P_1+b_{n2}{}^P P_2+\cdots\cdots b_{nn}{}^P P_n+b_{n1}{}^M M_1+b_{n2}{}^M M_2+\cdots\cdots b_{nn}M_n=0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

ここに

$$a_{ii}=a_{ii}{}^P+k_i',\ b_{ii}=b_{ii}{}^M+N_i,\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}{}^{P}\cdots\cdots a_{1n}{}^{P} & a_{11}{}^{M} & a_{12}{}^{M}\cdots\cdots a_{1n}{}^{M} \\ a_{21}{}^{P} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n}{}^{P} & a_{21}{}^{M} & a_{22}{}^{M}\cdots\cdots a_{2n}{}^{M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}{}^{P} & a_{n2}{}^{P}\cdots\cdots a_{nn} & a_{n1}{}^{M} & a_{n2}{}^{M}\cdots\cdots a_{nn}{}^{M} \\ b_{11}{}^{P} & b_{12}{}^{P}\cdots\cdots b_{1n}{}^{P} & b_{11} & b_{12}{}^{M}\cdots\cdots b_{1n}{}^{M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}{}^{P} & b_{n2}{}^{P}\cdots\cdots b_{nn}{}^{P} & b_{n1}{}^{M} & b_{n2}{}^{M}\cdots\cdots b_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad\cdots\cdots(35)$$

式 (35) より得られた固有振動数 ω_k, $(k=1,2,\cdots\cdots,\infty)$ の値を式 (34) に代入すれば P_i, M_i の比を決定することができる。一方，連続ばりに集中荷重・モーメント荷重が作用するときのたわみは式 (8),(15) より次式にてあらわされる。

$$V(x_i)=\sum_{c=1}^{\infty}\Omega_c\Phi_c(x_i)[\{\Phi_c(j_1)P_1+\Phi_c(j_2)P_2+\cdots\cdots\Phi_c(j_n)P_n\}+\{\Phi_c'(j_1)M_1+\Phi_c'(j_2)M_2+\cdots\cdots\Phi_c'(j_n)M_n\}] \quad\cdots(36)$$

式 (36) に上で求めた P_i, M_i の比を代入すれば振動モード $\varphi_k(x)$ が決定できる。

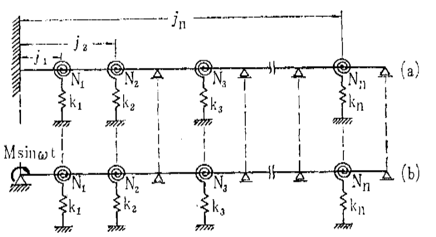
② **第2法**：第1法においては，弾性支承上の変位・回転の条件を同時に満足するようにして解析を行なったが，第2法では変位・回転の条件を逐次満足させる方法を採ろう。

与えられた 図—8 (a) の振動系において，まず回転抵抗が 0 すなわち $N_1=N_2=\cdots\cdots=N_n=0$ なる系（図—6 (a) と等価な系）について考える。この系の固有振動数 ω_s・振動モード $\Phi_s(x)$ は，**(4) a)** において述べた方法により求めることができる。この $\omega_s, \Phi_s(x)$ に回転剛性の条件を入れれば目的が達せられるが，これは **(4) b)** に述べた式において，たんに $\omega_c, \Phi_c(x)$ のかわりに ω_s, $\Phi_s(x)$ と置き換えればよいことはただちに理解できる。この方法によると，中間支点の条件は $\omega_c, \Phi_c(x)$ により満足され，これに変位抵抗の条件を満足させ，最後に回転抵抗の条件を満足させることになり，単純支持•変位•回転の条件を逐次満足させたことになる。第1法においては一つの弾性支承に対して2個の未知数を必要とするから，n 個の弾性支承点を持つ場合には $2n$ 個の未知数となる。したがって，n が大きい値のときには，式 (34), (35) などの数値計算には大変な労力を要するが，第2法によれば，n 個の未知数のものについて2回計算すればよいことになるから，計算はかなり容易になるものと考えられる。

(5) 固定端を有する連続ばりの自由振動

a) 一端固定の場合 図—9 (a) に示す一端固定の連続ばりの固有振動数 ω_r・振動モード $\varphi_r(x)$ を求めることについて考える。これには，図—9 (b) に示すように固定端を単純支持に置いた系について考え，この系に端モーメント $M\sin\omega t$ を加えて載荷点のたわみ角を 0 にする方法をとる。

図—9



図—9 (b) の固有振動数 ω_k・振動モード $\Phi_k(x)$ は **(4) c)** に述べた方法により決定することができる。したがって，この振動モードを $x=0$ において角度が 0 になるように決定すればよい。端モーメント $M\sin\omega t$ が作用するとき載荷点のたわみ角 $\theta(x_i=0)$ は式 (14) より次式により求めることができる。

$$\theta(x_i=0)=\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=0)M \quad\cdots\cdots(37)$$

ここに

$$\Omega_k=1/(\omega_k^2-\omega^2)$$

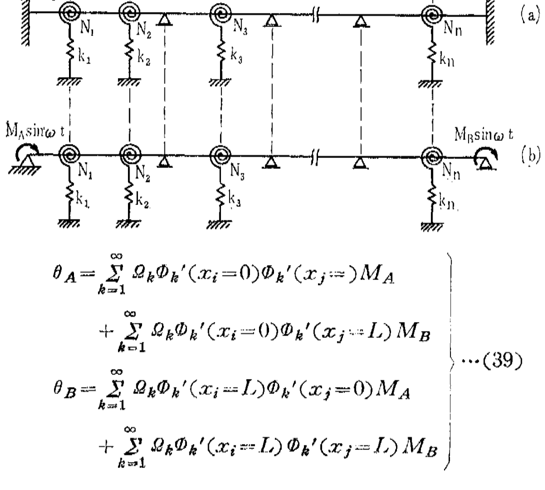
固定端においては $\theta=0$ であるから，式 (37) は式 (38) となる。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=0)=0 \quad\cdots\cdots(38)$$

式 (38) は振動数方程式にほかならない。また振動モード $\varphi_r(x)$ は式 (38) より得られた ω_r の値を式 (13) に代入すればただちに得られる。ただし，式 (13) における $\Omega_m, \Phi_m(x)$ の代りに $\Omega_k, \Phi_k(x)$ を使用する。

b) 両端固定の場合 図—10 (a) に示す両端固定の連続ばりについて考える。**(5) a)** と同じく 図—10 (b) の系について考え，この両端に端モーメント $M_A\sin\omega t$, $M_B\sin\omega t$ を作用させる。このとき A,B 点のたわみ角 θ_A, θ_B は式 (39) により与えられる。

図—10



$$\left.\begin{aligned}\theta_A&=\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=)M_A+\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=L)M_B\\ \theta_B&=\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=L)\Phi_k'(x_j=0)M_A+\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=L)\Phi_k'(x_j=L)M_B\end{aligned}\right\}\cdots(39)$$

固定端の場合 $\theta_A=\theta_B=0$ であるから式 (40) が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=0)M_A+\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=L)M_B=0\\ \sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=L)\Phi_k'(x_j=0)M_A+\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=L)\Phi_k'(x_j=L)M_B=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(40)$$

したがって振動数方程式は次式となる。

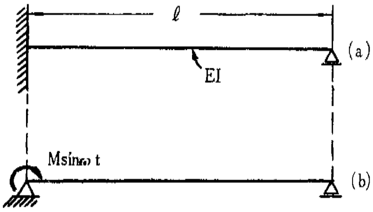
$$\begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=0) & \sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=0)\Phi_k'(x_j=L)\\ \sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=L)\Phi_k'(x_j=0) & \sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\Phi_k'(x_i=L)\Phi_k'(x_j=L)\end{vmatrix}=0\cdots\cdots(41)$$

式 (41) を解いて求めた固有振動数 ω_r, $(r=1,2,3,\cdots\cdots,\infty)$ の値を式 (40) に代入し，M_A, M_B の比を決定し，これを式 (15) に代入すれば振動モード $\varphi_r(x)$ が決定できる。ただし式 (15) における $\Omega_m, \Phi_m(x)$ には $\Omega_k, \Phi_k(x)$ を使用する。

例 1　一端固定他端単純支持のはり

例として **図—11** (a) に示す一端固定他端単純支持のはりの固有振動数を求めることについて考えてみる。**図—11** (b) の単純ばりの固有振動数 ω_m, 振動モード $\Phi_m(x)$

図—11



は式 (4), (5) によりあらわされる。振動数方程式は式 (38) を使用すると式 (42) となる。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2}{\omega_m{}^2-\omega^2}=0\cdots\cdots(42)$$

式 (42) を書きかえると式 (43) となる。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2}{m^4-\omega'}=0\cdots\cdots(43)$$

ここに

$$\omega'=\omega^2\Big/\left\{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{EI}{\rho}\right\}$$

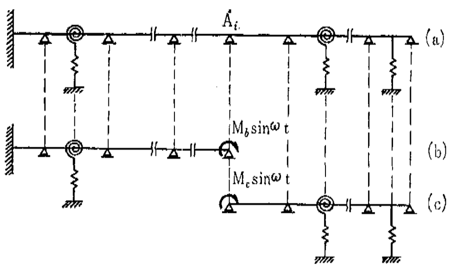
式 (43) を試算法により求めると，最低次の固有振動数として $\omega'=2.4404$ が得られる。これは厳密解より得た値[8]と一致する。また，振動モードはこの ω' の値を式 (13) に代入すれば求めることができる。

（6） 多くの支承を持つ連続ばりの自由振動

はりが多くの支承によって支持されているときには，この条件を同時に満足させるようにして式 (35) をたてると数値計算が非常にはん雑になる。これを避ける方法として **(4) c 第 2 法** に述べたように単純支持・変位・回転の条件を順次満足させることも数値計算を簡単にさせる一方法であるが，ここでは下記の解析法について述べる。

図—12 (a) に示す連続ばりを例にとって考える。これ

図—12



を適当な支持点 A_i 点において切断し，図に示す (b) 系・(c) 系の 2 つの系にわける。まずこの (b),(c) 系の固有振動数 ω_{bu}, ω_{cu}・振動モード Φ_{bu}, Φ_{cu} を上述の適当な方法により決定する。この (b),(c) 系の A_i 点に M_b, M_c なる周期モーメントを作用させた時この載荷点のたわみ角 θ_b, θ_c は式 (14) により下式にてあらわされる。

$$\left.\begin{aligned}\theta_b=\sum_{u=1}^{\infty}\Omega_{bu}\Phi_{bu}'(x_{bi})\Phi_{bu}'(x_{bj})M_b\\ \theta_c=\sum_{u=1}^{\infty}\Omega_{cu}\Phi_{cu}'(x_{ci})\Phi_{cu}'(x_{cj})M_c\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(44)$$

この (b), (c) 系を結合すれば与系（a 図）ができるが，これを式で表現すると式 (44) の両者を等置することになる。さらにこのようにして組み立てられた原振動系には，その結合点において M_b+M_c なるモーメント荷重が作用しているので，前節と同様に自由振動時には外力は 0 であるという条件より振動数方程式がつぎのようにして得られる。

$$\left\{\sum_{u=1}^{\infty}\Omega_{bu}\Phi_{bu}'(x_{bi})\Phi_{bu}'(x_{bj})\right\}+\left\{\sum_{u=1}^{\infty}\Omega_{cu}\Phi_{cu}'(x_{ci})\Phi_{cu}'(x_{cj})\right\}=0\cdots\cdots(45)$$

また振動モードは式 (45) より得られた固有振動数の値を式 (13) に代入すればただちに決定できる。ただし式 (13) 中の文字 m の代りに bu または cu を使用する必要がある。

3. 結　　論

上に述べたことからわかるように，ここに結合法と名づけた解析法は，連続したはりと支承とにそれぞれ集中荷重・モーメント荷重を作用させ，この変形したはりと支承とを結合する方法である。弾性支承・固定端など複雑

な条件を持つ連続ばりを解くにあたり，このような仮想外力（集中荷重・モーメント荷重）を作用させながら固有振動数・振動モードを決定する方法については他にないようである。はりにモーメント荷重が作用するときその変形は，(2) において述べたようにはりに集中荷重を作用させたときのたわみ曲線をもととして解析できるので，集中荷重をうけるはりのたわみ曲線が与えられる限りこの結合は可能である。

この問題をほかの方法例えば振動たわみ角法によって解くときには，まずこのはりを各スパンごとに支承点において切断し，このスパンの両端を支承において結合するという解析法を使用するから，結合法より複雑な考え方を必要とすることは明らかである。

結合法では，はりに結合する支承の順序は任意に変更できるので，異なった種類の支承を持つはりに対しては，同種の支承をグループにまとめ，これを順次結合すれば解析は簡単に行なうことができる。このように支承をいくつかのグループにわけ，各グループごとに結合することをくり返すと，多くの未知数を同時に取り扱うことなく数値計算を行なうことができるから便利である。Digital 計算機を使用できる時代とはなったが，固有値問題を取り扱う場合その行列の元数を減らすことができると静的問題とは比較にならぬほど計算時間を短縮できることを考えるとこの解析法の有利さがよく理解できると思う。

前にも述べたように，この解析法によると振動モードを一つの解析関数としてあらわすことができるので，走行荷重の動的レスポンスを求めるさい最初初期条件を与えるだけで解が得られるから振動たわみ角法などにくらべて有利である。

ここでは固有振動数・振動モードを求めることのみについて述べたが，固有振動数・振動モードが決定できれば，任意の動荷重が作用するときそのレスポンスは式 (1),(2) または式 (12) を用いていてただちに基礎式が誘導できる。なお，移動荷重が作用するときのレスポンスについては文献 4) を参照されたい。

この研究を行なうにあたり，いろいろご指導いただいた名古屋大学　成岡教授，熊本大学　吉村教授に深く感謝する次第である。

参　考　文　献

1) 吉村・平井：ランガー桁の動的解析，土木学会論文集，101 号，昭.39.1.
2) 平井：結合法による格子構造の動的解析，土木学会論文集，101 号，昭.39.1.
3) 例えば建築学大系 19 巻，p. 167.
4) 平井：種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用，土木学会論文集，90 号，p. 29，昭.38.1.
5) Rogers, G.L. : Dynamics of Framed Structures, John Willy & Sons, 1959, p. 263.
6) Saibel : Vibration Frequencies of Continuous Beams, Jour. of Aero. Sci., V. 11, p. 88, 1949.
7) Veletsos, A.S. & N.M. Newmark : Determination of the Natural Frequencies of Continuous Beams on Flexible Supports, Proc. of Second U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., p. 147, 1954.
8) Bishop, R.E.D. & D.C. Johnson : Vibration Analysis Tables, p. 49, Cambridge Univ. Press, 1956.
9) Bogunovic, V. : Der durchlaufende Balken auf äquidistanten elastischen Stützen, Ing. Arch., XXVII Bd., 1959, S. 104.
10) Lee, W.F.Z. and E. Saibel : Free Vibrations of Constrained Beams, J. of Appl. Mech., Vol. 19, 1952, p. 471.
11) 平嶋：多スパン桁の振動数方程式，土木学会論文集，58 号，p. 102，昭.33.9.
12) 島田：バネ支承で支持された連続桁の性質について，土木学会論文集，51 号，p. 51.
13) 島田：バネ支承で支持された連続桁の解法，土木学会論文集，55 号，p. 57.

(1963.7.15・受付)