マトリックスを用いた格子桁の一解法

A METHOD OF MATRIX SOLUTION OF THE LATTICE GIRDEKS

多　田　安　夫*・米　長　　泰**
By Yasuo Tada and Yasushi Yonenaga

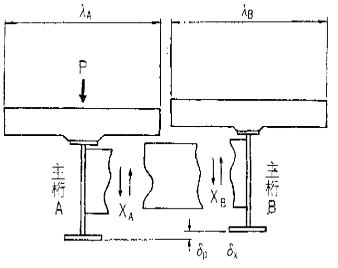
要　旨　上路桁橋において，荷重分配横桁を配し格子桁として計算を行なうことは近年非常な高比率を示してきている。一方，実橋の挙動からしても格子桁としてとりあつかうことが合理的であることは論をまたない。この構造の解析に関してはすでに多くの論文が発表されているが，本論文は単純合成桁格子構造に関する解法である。仮定条件として鉄筋コンクリート床板は合成桁指針に定められた主桁協力幅をもって各隣接桁と断絶せしめ，分配横桁によってのみ荷重分配作用がなされるものとみなした。格子構造における主桁と横桁の格点座標系と荷重載荷点の座標系を独立して考え，各載荷状態に対する不静定格点力，曲げモーメント，支点反力，たわみなどの理論式を導き，電子計算機によっていくつかの Case についてそれらの影響面距を計算し table を作成した。この格点座標系と載荷点座標系が一致する場合は，いわゆる Homberg[1] 氏の数表に示された荷重分配率と全く等しい結果が得られることが確かめられた。本論文は従来の荷重分配に対する概念よりもさらに広義な立場から解析を行なったものである。

1. 荷重分配横桁の意義

単純合成桁において，中間対傾構のかわりに剛性ある横桁を配することの利点としては，合成床板の荷重分配作用を軽減し，床板のそれによる応力を少なくすることである。そして，以上の観点から建設省土木研究所の標準設計では少なくともスパン中央に1本の横桁を配することを強調している。

いま，図—1 に示すような荷重分配横桁によって連結された A，B 2 本の合成桁を考える。床板は協力幅 λ_A，λ_B の領域で独立しているものとする。つぎにA桁に荷重 P が作用する場合を考える。このとき，もし横桁がなければA桁は δ_P だけたわむものとする。しかし，実際には横桁が存在するため，主桁と横桁の交差点（格点）で不静定な内力 X_A および X_B が生じ，A桁のたわみはこの不静定力によって δ_X だけ緩和される。この不静定力を格点力と呼ぶ。格点力は載荷桁に対しては荷重項を減少させるように働くからA桁とB桁のたわみ差は非常に小さくなり，R と C 床板に好影響をおよぼすほか載荷桁が荷重 P を全量負担しなくてすむ。そこに荷重分配横桁の存在意義がある。**図—1** の構造から明らかなように，荷重 P は主桁Aにのみ単独載荷され，主桁Bおよび横桁は格点力のみが関係している点は特に留意すべきである。

図—1



2. 不静定格点力についての考察

垂直荷重 P が任意主桁の任意点に作用する場合を考える。このとき載荷桁の格点には主桁の変位を妨げるような不静定力が発生する。さらに，荷重分配横桁に着目するときそれは弾性支持された連続ばりが載荷桁相当支点において支点の強制変位を与えられた場合と全く同義な力学的状態となり，弾性支承上の不静定反力がすなわち不静定格点力に相当するものである。格点力は主桁と横桁がたがいに他の変位を拘束するように働き，大きさ等しく向きが反対である。荷重が主桁系に載荷され，横桁には直接関係がないことは前述のとおりであるが，それは，床板の荷重分配作用を無視し，もっぱら分配横桁によるものとみなすからであり，その結果，格点座標系と載荷点座標系を完全に独立して考えることが可能となるのである。主桁および横桁の応力解析は Leon hardt 氏の方法に準ずるが，主桁・横桁ともに単純桁に荷重 P と不静定荷重群 X が作用するものとして計算し，その途上において「剛支持」または「弾性支持」などの概念は全く無視される。載荷点が格点と一致する場合についてもこのことがいえる。

3. 格点力の一般解析

本稿で取り扱う構造様式はつぎのような仮定を満足するものとする。

(1) 主桁と横桁は直交する
(2) 主桁は等間隔に配置される
(3) 主桁および横桁のねじり剛性は無視する。
(4) 横桁は両端せん断結合とし，全体として連続性を

* 正員　建設省土木研究所千葉支所
** 正員　新三菱重工業 KK 神戸造船所

有する。

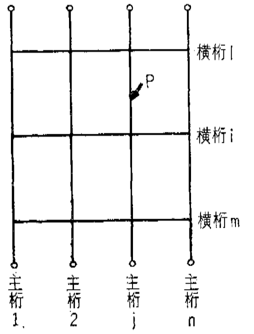
(5) 主桁は両端において単純支持される。

(6) 主桁および横桁はそれ自身は全長等断面とする。

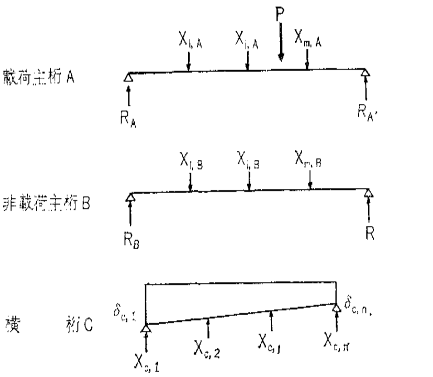
このような標準化された構造系では，マトリックス表示により任意の荷重系について不静定力を求めることができる。つぎにその方法論を述べる。

図—2 のように n 本の主桁に対して m 本の荷重分配横桁が配されている場合を考える。この系では任意の荷重系に関して $(m\times n)$ 個の格点力を生ずるので不静定次数は $(m\times n)$ である。ただし，この構造系を２つの静定系に分割したり，対称荷重と逆対称荷重の組合わせにより不静定次数を減少せしめることも可能であるが，計算式の変形に工夫を必要とし，さらに多大な計算を要するので本稿に述べるごとく直接 $(m\times n)$ 次の不静定構造として解析するほうが簡明である。それは後述のように一般解として得られる弾性方程式の係数マトリックスが非常に簡単で，特徴ある element をもって構成されるからである。まず主桁および横桁の荷重状態を**図—3** に示す。これらはすべて両端単純支持桁として取り扱う。

図—2



図—3



$(m\times n)$ 個の未知量を求めるには $(m\times n)$ 個の条件式が必要であるがそれはつぎのようにして得られる。

(a)　拘束条件…主桁と横桁は各格点で結合されているから外力による最終変位は各格点において常に等しくなければならない。この場合，横桁の変位は両端を仮支点とみなすことにより，各横桁について $(n-2)$ 個の拘束条件が成立するから全体として $(m\times(n-2))$ 個の条件式が得られる。

(b)　つり合い条件…不静定格点力は結局は内力なのであるから荷重分配横桁に着目するとき各横桁に関して

$$\Sigma X=0$$

$$\Sigma M=0 \quad （端部格点に関して）$$

が成立しなければならない。つり合い条件式は m 本の横桁について成立するから条件式は $(2\times m)$ 個である。

以上により拘束条件とつり合い条件から $(m\times n)$ 個の条件式が得られ，不静定格点力を求めることが可能となるのである。まず任意の標準値 J_0 なる曲げ剛性値を考え，各主桁の曲げ剛性比を

$$a_j=J_0/J_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \cdots\cdots(1)$$

横桁の曲げ剛性比を

$$b_i=J_0/I_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \cdots\cdots(2)$$

とおくことにする。

つぎに，J_0 なる曲げ剛性を有する主桁の格点座標系におけるたわみ係数を $e_{i,j}$，横桁のそれを $f_{i,j}$ にてあらわすことにする。さらに簡略記号として行マトリックス

$$(e_{i,1},\ e_{i,2},\ \cdots,\ e_{i,m})=E_i \quad (i=1\sim m) \cdots\cdots(3)$$

$$(f_{j,1},\ f_{j,2},\ \cdots,\ f_{j,n})=F_j\ (j=1\sim n) \cdots\cdots(4)$$

$$(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)=1 \cdots\cdots(5)$$

$$(0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)=N \cdots\cdots(6)$$

また列マトリックス

$$(X_{i,1},\ X_{i,2},\ \cdots,\ X_{i,n})^T=\overline{X}_i \cdots\cdots(7)$$

$$(X_{1,j},\ X_{2,j},\ \cdots,\ X_{m,j})^T=X_j \cdots\cdots(8)$$

と略記することにする。

荷重 P は格点座標系と独立に主桁系に単独載荷されるのであるが，曲げ剛性 EJ_0 なる主桁の i 点のたわみを $\delta_i{}^P$ とあらわすことにする。

横桁の格点変位は，横桁自身の変位の他に両端の変位を支点距離に逆比例配分して加算する。それは**図—3** の状態から推察することができる。つぎに一般解を示す。

まず端主桁 1 に載荷のとき中間主桁 j の任意の i 点の格点変位は

$$\delta_{i,j}=a_j\sum_{k=1}^{m}e_{i,k}X_{k,j} \cdots\cdots(9)$$

横桁 i に関する格点変位は

$$\bar{\delta}_{i,j}=\frac{n-j}{n-1}a_1\left(\sum_{k=1}^{m}e_{i,k}X_{k,1}+\delta_i{}^P\right)+\frac{j-1}{n-1}a_n\sum_{k=1}^{m}e_{i,k}X_{k,n}-b_i\sum_{l=1}^{n}f_{j,l}X_{i,l} \cdots\cdots(10)$$

式（9）と式（10）を等置し，式(3)～(8)の略号を用いて書きかえることにより次式をうる。

$$a_jE_iX_j+b_iF_j\overline{X}_i-\frac{n-j}{n-1}a_1E_iX_1-\frac{j-1}{n-1}a_nE_iX_n=\frac{n-j}{n-1}a_1\delta_i{}^P \cdots\cdots(11)$$

同様にして端主桁 n に載荷のときは

$$a_jE_iX_j+b_iF_j\overline{X}_i-\frac{n-j}{n-1}a_1E_iX_1-\frac{j-1}{n-1}a_nE_iX_n$$

$$=\frac{j-1}{n-1}a_n\delta_i{}^P \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

中間主桁に載荷のときは｛　｝内が非載荷桁は 0 として

$$a_jE_iX_j+b_iF_j\overline{X}_i-\frac{n-j}{n-1}a_1E_iX_1-\frac{j-1}{n-1}a_nE_iX_n$$

$$=-\{a_j\delta_i{}^P\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

以上が拘束条件から得られる条件式である。

つぎに横桁のつり合い条件として

$$\sum_{l=1}^{n}X_{i,l}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)X_{i,l}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

が得られる。式 (15) は主桁が等間隔にならんでいるという条件から得られるものであり，不等間隔の場合も距離の比に関する数値を代入することにより式 (15) に類似した関係式が得られる。式 (14) と式 (15) を簡略記号を用いてあらわすとつぎのようになる。

$$1\cdot\overline{X}_i=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$N\cdot\overline{X}_i=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

以上の方程式を整頓するため，まず任意の i に対して $j=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ を代入してみると式 (11)～(13) に関しては

$$\begin{bmatrix} -\frac{n-2}{n-1}a_1E_i & a_2E_i & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1}a_nE_i & b_iF_2 \\ -\frac{n-3}{n-1}a_1E_i & 0 & a_3E_i & 0 & -\frac{2}{n-1}a_nE_i & b_iF_3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\frac{1}{n-1}a_1E_i & 0 & \cdots & a_{n-1}E_i & -\frac{n-2}{n-1}a_nE_i & b_iF_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \overline{X}_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{n-2}{n-1}a_1\delta_i{}^P & -a_2\delta_i{}^P & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1}a_n\delta_i{}^P \\ \frac{n-3}{n-1}a_1\delta_i{}^P & 0 & \cdots & 0 & \frac{2}{n-1}a_n\delta_i{}^P \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n-1}a_1\delta_i{}^P & 0 & \cdots & -a_{n-1}\delta_i{}^P & \frac{n-2}{n-1}a_n\delta_i{}^P \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

また，式 (16)，(17) をまとめてあらわすと

$$\begin{bmatrix} 1 \\ N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{X}_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

式 (18) および式 (19) に示された n 個の方程式群は，$i=1\sim m$ について成立するからこれをつぎのように略記する。

$$\left.\begin{array}{l} A_1X=B_1 \\ A_2X=B_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_mX=B_m \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

すなわち全体として

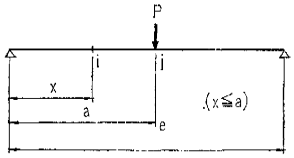
$$AX=B\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

なる $(m\times n)$ 個の関係式が得られるのである。格点力はこの方程式を解くことによって求められる。

4．曲げモーメントおよびたわみ

載荷主桁，非載荷主桁および横桁の曲げモーメントおよびたわみは **図—3** に示したような荷重条件下の単純支持桁として簡単に求めることができる。

図—4



図—4 のように支点距離 a なる点 j に荷重 P が作用したとき距離 x なる点 i の曲げモーメントおよびたわみは全長を l としてつぎのごとくあらわされる。

$$M_{i,j}=\frac{l-a}{l}Px(x\leqq a)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\delta_{i,j}=\frac{Px(l-a)}{6EJl}(2al-x^2-a^2)(x\leqq a)\cdots\cdots(23)$$

$x>a$ の場合は相反律により $\delta_{i,j}=\delta_{j,i}$ が成立する。また単純ばりに限り $M_{i,j}=M_{j,i}$ が成立するから i 点に載荷したときの j 点の値を求めればよい。

したがって載荷主桁 A に関しては

$$\left.\begin{array}{l} M_{i,A}=\left(\sum_{k=1}^{m}M_{i,k}X_{k,A}\right)+M_{i,A}{}^P \\ \delta_{i,A}=\left(a_A\sum_{k=1}^{m}\delta_{i,k}X_{k,A}\right)+\delta_{i,A}{}^P \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(24)$$

非載荷主桁 B に関しては

$$\left.\begin{array}{l} M_{i,B}=\sum_{k=1}^{m}M_{i,k}X_{k,B} \\ \delta_{i,B}=a_B\sum_{k=1}^{m}\delta_{i,k}X_{k,B} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

横桁 C に関しては

$$\left.\begin{array}{l} M_{C,j}=-\sum_{k=1}^{n}M_{j,k}X_{C,k} \\ \delta_{C,j}=-b_C\sum_{k=1}^{n}\delta_{j,k}X_{C,k} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

具体的なたわみの数値が計算されると，橋梁全体を横方向に切断したとき，隣接する各主桁のたわみ差から床板の変形状態を考察することができる。また，逆に荷重分配横桁の存在によって，各桁の相対たわみ差がいかに緩和されたかを考察することによりその存在意義を見出すことができる。荷重が支間中央部に載荷されたときと端部近くに載荷されたとき，あるいは端主桁に載荷されたときと中間主桁に載荷されたときの相違を考察することも有意義なことである。

5．簡単な構造系の解

計算例として荷重分配横桁が 1 本の場合について二，三の例を掲げることにする（**図—5** 参照）。

（1）　3 本主桁　横桁は主桁中央に 1 本

式 (18) において $m=1,\ n=3$ を代入すると

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_1e_{1,1} & a_2e_{1,1} & -\frac{1}{2}a_3e_{1,1} & 0 & b_1f_{2,2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_1\delta_1{}^P & -a_2\delta_1{}^P & \frac{1}{2}a_3\delta_1{}^P \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots(27)$$

式 (19) の関係から

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

式 (27) と式 (28) を整頓して書くと

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}a_1e_{1,1} & (a_2e_{1,1}+b_1f_{2,2}) & -\frac{1}{2}a_3e_{1,1} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1\delta_1{}^P & -a_2\delta_1{}^P & \frac{1}{2}a_3\delta_1{}^P \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

これを解くと

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2}a_1\delta_1{}^P-\frac{1}{2\alpha}(-a_2\delta_1{}^P)-\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2}a_3\delta_1{}^P \\ \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2}a_1\delta_1{}^P \quad \frac{1}{\alpha}(-a_2\delta_1{}^P) \quad \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2}a_3\delta_1{}^P \\ -\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2}a_1\delta_1{}^P-\frac{1}{2\alpha}(-a_2\delta_1{}^P)-\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2}a_3\delta_1{}^P \end{Bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

ただし，

$$\alpha=\frac{1}{4}(a_1+4\,a_2+a_3)e_{1,1}+b_1f_{2,2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

スパン l の単桁において x 点に載荷したときの中央点の変位は

$$\delta_{l/2,x}=\frac{Px}{48\,EJ}(3\,l^2-4\,x^2)\quad\left(x\leqq\frac{l}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(32)$$

によって与えられるから 10 等分点載荷の場合

$$x=\frac{ul}{10}(u=1\sim5)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

とおけば式 (28) は

$$\delta_{l/2,\ ul/10}=\frac{Pul^3(75-u^2)}{12\,000\,EJ}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

中央点載荷時は $u=5$ とおいて

$$\delta_{l/2,\ l/2}=\frac{Pl^3}{48EJ}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

式 (34) および式 (35) によって $e_{1,1}$, $f_{2,2}$ および $\delta_1{}^P$ が与えられる。$f_{2,2}$ の場合，主桁間隔を λ とすれば $l=2\lambda$ を代入すればよい。

(2) 4本主桁　横桁は主桁中央に1本

3本主桁の場合と同様にして方程式を求めると式 (36) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{3}a_1e_{1,1} & (a_2e_{1,1}+b_1f_{2,2}) & b_1f_{2,3} & -\frac{1}{3}a_4e_{1,1} \\ -\frac{1}{3}a_1e_{1,1} & b_1f_{3,2} & (a_3e_{1,1}+b_1f_{3,3}) & -\frac{2}{3}a_4e_{1,1} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}a_1\delta_1{}^P & -a_2\delta_1{}^P & 0 & \frac{1}{3}a_4\delta_1{}^P \\ \frac{1}{3}a_1\delta_1{}^P & 0 & -a_3\delta_1{}^P & \frac{2}{3}a_4\delta_1{}^P \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdots(36)$$

(3) n 本主桁　横桁は主桁中央に1本

格点力を求めるための方程式はつぎのとおりである。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\frac{n-2}{n-1}a_1e_{1,1} & (a_2e_{1,1}+b_1f_{2,2}) & \cdots & b_1f_{2,n-1} & -\frac{1}{n-1}a_ne_{1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n-1}a_1e_{1,1} & b_1f_{n-1,2} & \cdots & (a_{n-1}e_{1,1}+b_1f_{n-1,n-1}) & -\frac{n-2}{n-1}a_ne_{1,1} \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{n-2}{n-1}a_1\delta_1{}^P & -a_2\delta_1{}^P & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1}a_n\delta_1{}^P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n-1}a_1\delta_1{}^P & 0 & \cdots & -a_{n-1}\delta_1{}^P & \frac{n-2}{n-1}a_n\delta_1{}^P \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

6. 電子計算機による数値計算例

横桁1本の系に関して数値計算を行なったのでそれを示す。電子計算機の Flow chart は概略図―6 のとおりである。計算に必要な Input data は

n＝主桁本数　J_0＝標準断面2次モーメント
l＝主桁長さ　$a_j=j$ 主桁と標準値の剛比 J_0/J_j
λ＝主桁間隔　$b_i=i$ 横桁と標準値の剛比 J_0/I_i

表—1　格点力および支点反力　(単位 t)

載荷点	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_1'	R_2	R_2'	R_3	R_3'	R_4	R_4'
1-1	−0.080	0.110	0.022	−0.051	0.860	0.060	0.055	0.055	0.011	0.011	−0.026	−0.026
−2	−0.154	0.210	0.042	−0.098	0.723	0.123	0.105	0.105	0.021	0.021	−0.049	−0.049
−3	−0.215	0.293	0.059	−0.137	0.592	0.192	0.147	0.147	0.029	0.029	−0.068	−0.068
−4	−0.256	0.349	0.070	−0.163	0.472	0.272	0.175	0.175	0.035	0.035	−0.082	−0.082
−5	−0.271	0.370	0.074	−0.173	0.364	0.364	0.185	0.185	0.037	0.037	−0.086	−0.086
2-1	0.110	−0.197	0.065	0.022	0.055	0.055	0.801	0.001	0.033	0.033	0.011	0.011
−2	0.210	−0.378	0.126	0.042	0.105	0.105	0.611	0.011	0.063	0.063	0.021	0.021
−3	0.293	−0.527	0.175	0.059	0.147	0.147	0.436	0.036	0.088	0.088	0.029	0.029
−4	0.349	−0.628	0.209	0.070	0.175	0.175	0.286	0.086	0.104	0.104	0.035	0.035
−5	0.370	−0.666	0.221	0.074	0.185	0.185	0.167	0.167	0.111	0.111	0.037	0.037

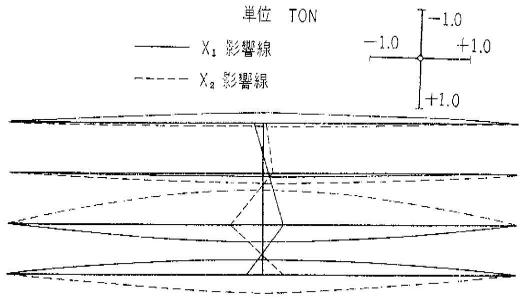
表—2　主桁たわみ　(単位 m/m)

載荷点	δ_{1-3}	δ_{1-5}	δ_{2-3}	δ_{2-5}	δ_{3-3}	δ_{3-5}	δ_{4-3}	δ_{4-5}
1-1	1.37	1.37	0.55	0.70	0.11	0.14	−0.26	−0.31
−2	2.57	2.63	1.06	1.33	0.21	0.27	−0.49	−0.62
−3	3.40	3.66	1.47	1.86	0.30	0.37	−0.69	−0.87
−4	3.74	4.37	1.76	2.22	0.35	0.45	−0.82	−1.04
−5	3.66	4.63	1.86	2.35	0.37	0.47	−0.87	−1.10
2-1	0.55	0.70	0.79	0.63	0.33	0.42	0.11	0.14
−2	1.06	1.33	1.44	1.21	0.63	0.80	0.21	0.27
−3	1.47	1.86	1.83	1.68	0.88	1.11	0.30	0.37
−4	1.76	2.22	1.87	2.00	1.05	1.33	0.35	0.45
−5	1.86	2.35	1.68	2.12	1.11	1.40	0.37	0.47

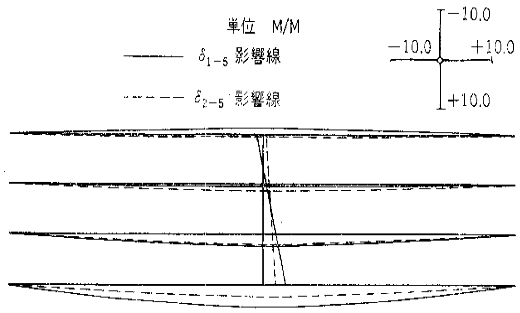
表—3　主桁中央点曲げモーメント　(単位 t-m)

載荷点	M_{1-5}	M_{2-5}	M_{3-5}	M_{4-5}
1-1	1.196	1.095	0.220	−0.512
−2	2.458	2.102	0.423	−0.982
−3	3.850	2.930	0.590	−1.370
−4	5.437	3.493	0.703	−1.633
−5	7.285	3.700	0.744	−1.730
2-1	1.095	0.030	0.655	0.220
−2	2.102	0.220	1.256	0.423
−3	2.930	0.729	1.751	0.590
−4	3.493	1.717	2.087	0.703
−5	3.700	3.344	2.211	0.744

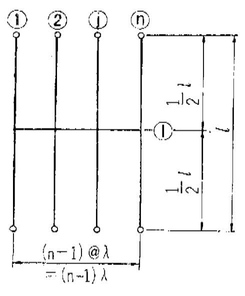
図—7



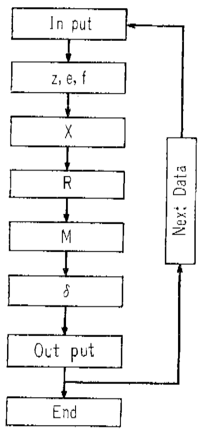
図—8



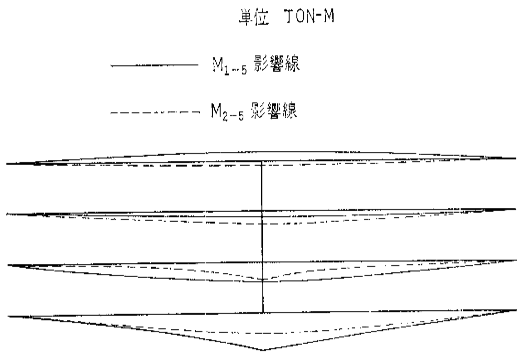
図—5



図—6



図—9



計算例として

$$\begin{cases} n=4 & J_0=10^6\text{cm}^4 \\ m=1 & a_1\sim a_4=1.0 \\ l=40\ \text{m} & b_1=25.6 \\ \lambda=2.5\ \text{m} & \end{cases}$$

の case について諸量の実例を掲げる。

Homberg 氏の格子剛度

$$Z=\left(\frac{40}{2\times 2.5}\right)^3\times\frac{1}{25.6}=20.0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

はこの数表から格点力，たわみおよび曲げモーメントの各種影響面距が得られるがそれを 図—7～9 に示す。

7. 数値計算結果における二，三の問題点

（1） Homberg 氏の数表との比較

1-5 点に載荷したときの格点力は

$$\begin{cases} X_1=-0.271 & X_3=\ \ 0.074 \\ X_2=\ \ 0.370 & X_4=-0.173 \end{cases}$$

載荷主桁①の負載荷重は $(P+X_1)$ であるから $Z=20$ における Homberg 氏の数表と比較してみると

$$\begin{cases} B_{aa}=P+X_1=0.729 & B_{ca}=X_3\quad =0.074 \\ B_{ba}=X_2\quad =0.370 & B_{da}=X_4=\ -0.173 \end{cases}$$

となって完全に一致することが証明される。

主桁②に載荷の場合も同様にして

$$\begin{cases} B_{ab}=\quad X_1\ =0.370 & B_{cb}=\quad X_3\ =0.221 \\ B_{bb}=P+X_2=0.334 & B_{db}=\quad X_4\ =0.074 \end{cases}$$

が成立していることが証明されるのである。

（2） 隣接主桁の相対たわみ差に関する考察

断面2次モーメント $10^6\mathrm{cm}^4$，スパン 40 m なる単純桁の中央点に単位載荷したときの中央点のたわみは

$$\delta_0=\frac{40^3\times10^3}{48\times2.1\times10^7\times10^{-2}}=6.35\ \mathrm{m/m}\ \cdots\cdots(39)$$

しかるに (1-5) 点に単位載荷したときはさきの数表から

$$\delta_{1-5}=4.63\ \mathrm{m/m}\qquad \delta_{2-5}=2.35\ \mathrm{m/m}$$

となり両桁の相対たわみ差は

$$\delta=\delta_{1-5}-\delta_{2-5}=2.28\ \mathrm{m/m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

式 (39) と式 (40) の値を比較してみると

$$\frac{\delta}{\delta_0}=\frac{2.28}{6.35}=0.359\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

となり荷重分配横桁を配することによって隣接桁のたわみ差が 35.9％ すなわち約 1/3 に減少することになる。

つぎに (2-5) 点に載荷したときは

$$\delta=\delta_{2-5}-\delta_{3-5}=2.12-1.40=0.72\ \mathrm{m/m}\cdots\cdots(41)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0}=\frac{0.72}{6.35}=0.113\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

となり，たわみ差は 1/9 に減少するから床板構造に非常な好影響をおよぼすことが推察されるのである。

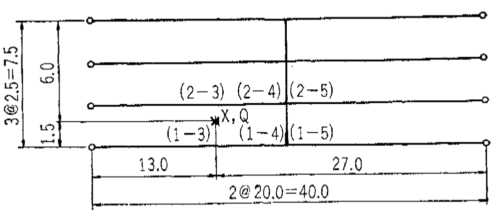
（3） 中間点載荷に関する問題

これまでは，荷重が主桁中心に載荷されるものとして理論を進めてきたが，各種影響線距が橋面全体として一つの面をなすものと考えれば，補間法を用いることにより，任意点載荷のときの不静定量を求めることができる。実際の橋梁では主桁位置に荷重されることはきわめてまれであるから中間点載荷に対する計算法を見出す必要があるわけである。6.に示した計算例を利用して例題を掲げてみる。図—10 に示すような点 Q に単位荷重 $P=1\mathrm{t}$ が載荷されたときの ① 桁中央点の曲げモーメント M_{1-5} の値を求めてみよう。Q 点を包む4点 (1-3)，(1-4)，(2-3) および点 (2-4) における M_{1-5} の影響線従距はさきの M_{1-5} 影響線の数値表から

$$\eta_{1-3}=3.850\qquad \eta_{1-4}=5.437$$
$$\eta_{2-3}=2.930\qquad \eta_{2-4}=3.493$$

図—10

寸法単位　M



図—11 から明らかなように

$$\eta_{Q1}=\frac{3}{4}\eta_{1-3}+\frac{1}{4}\eta_{1-4}=4.247\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

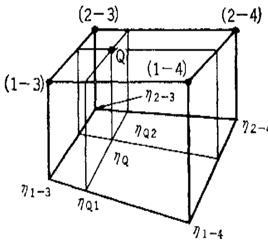
$$\eta_{Q2}=\frac{3}{4}\eta_{2-3}+\frac{1}{4}\eta_{2-4}=3.071\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

$$\eta_{Q}\ =\frac{1.0}{2.5}\eta_{Q1}+\frac{1.5}{2.5}\eta_{2}=3.541\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

すなわち，Q 点に単位荷重を載荷すると $M_{1-5}=3.541$ TON-M を生ずることがわかる。

この他の方法として，左支点から 13 M の主桁上に単位載荷したときの荷重項 δ^P を求めて式 (36) の右辺に代入し① 桁載荷時の η_{Q1} と ② 桁載荷時の η_{Q2} の値を計算して式 (45) を用いて距離の比に逆比例配分しても同一結果が得られる。

図—11



結　語　従来の荷重分配に対する概念は Homberg 氏の数表を用いて一意的に横方向の分担荷重を計算し，しかる後に格点力の存在を無視して単桁としての主桁計算を行なっているのであるが，本論文で述べた各種の影響面距を直接利用するような計算方法も十分に実用可能であると思われる。ただ，本論文の方法は厳密性を有するが計算量が豊富であるから実計算に際しては電子計算機の使用を前提としなければならない。本論文にみるような荷重分配横桁に関する考察は合成桁，非合成桁を問わず一般の格子構造に適用できるものである。

さらには，主桁系の端支点条件を変え，不静定次数 $(m\times n)$ を増加することにより，直交異方性板の近似解に応用することも可能である。

（原稿受付 1963.9.20）