

結合法による格子構造の動的解析

DYNAMIC ANALYSIS OF GRIDWORKS BY THE METHOD OF COMPOSITION

平井 一 男*
By Itio Hirai

要 旨 この論文は、筆者が新たに提案した動的解析法（結合法）によって、格子構造の固有振動数・振動モードを求め、これらをもととして移動荷重などの動的外力が作用するときの格子構造の運動方程式を誘導し、さらに支持条件や主桁・横桁の配置が異なる種々の格子桁にこの方法が適用できることを示した。また、単純支持された並列主桁を持つ斜と直の格子桁橋について数値計算を行ない、中桁・外桁の曲げ剛性の相違と斜角の変化によって、固有振動数・振動モードがどのように変化するかについて調べた。

1. 諸 論

格子構造は相当古くから、橋梁・建築物・船舶・航空機などの広い分野にわたって使用されているので、これに関する研究はきわめて多い。しかし、これらの研究の多くは、静力学的研究かあるいは実験をもととした研究が大部分であり、固有振動数・振動モードや移動荷重が作用するときのレスポンスなどに関するいわゆる動的な理論的研究はきわめて少ないようである。

構造物の動的レスポンスを求めるには、いろいろの方法が考えられるが、中でも構造物の固有振動数・振動モードを求めて、それをもととして運動方程式を誘導する Modal Analysis と呼ばれる方法は、計算の収束性・振動の大きさなどをまえて定量的に判断できるなどの点においてすぐれた解析法のひとつと考えられる。

このようなわけで、この論文では上の方法を応用して筆者の提案した方法すなわち結合法によってまず格子構造の固有振動数・振動モードを求め、つぎに、これらの固有振動数・振動モードを使って移動荷重などの動的外力が作用するときのレスポンスを求める運動方程式を導き、さらに、この理論が支持条件や主桁・横桁の配置の異なる種々の格子桁の動的解析に適用できることを示した。

なお、数値計算は両端単純支持された並列主桁3本、これに直に配置された横桁1本の格子桁橋について固有振動数・振動モードを求め、これらの値が中桁・外桁の曲げ剛性の相違・斜角の変化によってどのように変化するかを定量的に調べてみた。

従来、格子構造を解くには、正攻的に格点力や曲げモ

メントなどの力を未知数とする解析法、変形を未知数とするたわみ角法やモーメント分配法、直交異方性板理論などがあるが、これらはいずれも格子構造を直接一体の構造として扱う。これに対して、ここに述べる結合法は、最初から一体の格子構造として式をたてないで、まず主桁と横桁とを別々に切りはなし、独立した一本のはりを取り出し、その格子桁の格点となっていた箇所に任意の外力を作用させて適当な変形を与え、主桁と横桁の接合点部の変位が同じになるように変形を調整したのち、主桁と横桁とを結び合わせて一体の格子桁として組み立て、基礎式を誘導する方法である。このようなわけで、この方法を結合法とよんでいる。本法は変形を当面の未知量として扱う解析法である。

なお、一般に土木構造に用いられる格子桁橋の横桁のように、両端の変位が0でないようなはりを持つ格子では、厳密な基礎方程式の誘導も可能であるがその解析は非常に複雑となり、実際の数値計算を行なう場合ほとんど不可能に近くなる。したがって、ここでは、この種の横桁の質量を無視し、そのほか通常用いられる二、三の仮定を設けて理論を展開し数値計算を進めた。

2. 理 論

格子桁の厳密な解を求めるには、かなり複雑な解析を必要とするので、つぎの仮定を設ける。

- (a) 桁のせん断力によるたわみ・回転慣性の影響を無視する。
- (b) 桁のねじれの影響を無視する。
- (c) 主桁・横桁の曲げ剛性、質量はそれぞれ異なってもよいが、その桁全体としては一様とする。

(1) 定常強制力を受けるはり

図-1 筆者は先に、図-1 に示す $x=x_j$ 点に一定周期力 $P=P_0 \sin \omega t$ が作用するとき、 $x=x_i$ 点におけるはりのたわみ v を求める運動方程式は式 (1)、(2) に示されることを述べた¹⁾。

$$v_m + \omega^2 v_m = \phi_m(x=x_i) \phi_m(x=x_j) P_0 \sin \omega t \dots\dots\dots (1)$$

* 正員 工修 熊本大学助教授 工学部応用力学教室

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \dots\dots\dots(2)$$

ここに

ω_m : はりの m 次の固有振動数

v_m : m 次の振動モード $\Phi_m(x)$ に対応する振動の大きさ

$\Phi_m(x)$: m 次の正規化した振動モード, これは式 (3) の関係を満足する。

$$\int_0^l \Phi_m^2(x) \rho dx = 1 \dots\dots\dots(3)$$

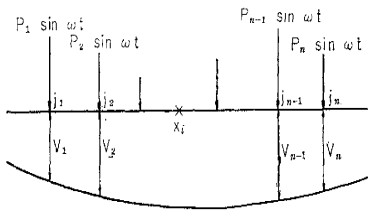
ここに ρ : はりの単位長さあたりの質量

式 (1) は簡単に解けて式 (4) となる。

$$v_m = \frac{\Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x=x_j)}{\omega_m^2 - \omega^2} P_i \sin \omega t \dots\dots(4)$$

荷重点・測定点の座標が与えられるならば, 任意の点のたわみは式 (2), (4) にて求めることができるから, 図-2 に示すように n 個の集中荷重が作用するとき測定点 x_i における m 次の振動モードに対応する振動の大きさ v_m は, 各荷重による式 (4) を重ね合わせて次式となる。

図-2



$$v_m = \Omega_m \Phi_m(x_i) \{ \Phi_m(j_1) P_1 + \Phi_m(j_2) P_2 \dots\dots + \Phi_m(j_n) P_n \} \sin \omega t \dots\dots(5)$$

ここに $\Omega_m = 1/(\omega_m^2 - \omega^2)$, $\Phi_m(j_j) = \Phi_m(x=j_j)$

(j の添字が荷重点番号を示す)

したがって x_i 点のたわみ $v(x_i)$ は式 (2) により次式 (6) にて表わされる。

$$v(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \Phi_m(x_i) \{ \Phi_m(j_1) P_1 + \Phi_m(j_2) P_2 + \dots + \Phi_m(j_n) P_n \} \sin \omega t \dots\dots(6)$$

ここで考えている n 個の集中荷重 $P_i \sin \omega t$, ($i=1, 2, 3, \dots, n$) は同一位相の周期力であるから, たわみは $\sin \omega t=1$ の瞬間におけるものについて考えれば十分である。今後 $P_i \sin \omega t$ のかわりに P_i と略記することにする。

荷重点のたわみを V_1, V_2, \dots, V_n とすると, それらは式 (7) により求められる。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + \dots + a_{1n} P_n \\ V_2 &= a_{21} P_1 + a_{22} P_2 + \dots + a_{2n} P_n \\ &\dots\dots\dots \\ V_n &= a_{n1} P_1 + a_{n2} P_2 + \dots + a_{nn} P_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \Phi_m(x_i) \Phi_m(j_j)$$

上式の a_{ij} は, 外力の強制振動数 ω の関数であるが, ある固定した ω の値に対しては常数となるから, 式 (7) を解くと式 (8) となる。

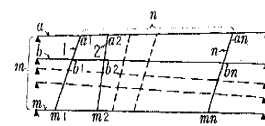
$$\left. \begin{aligned} P_1 &= a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + \dots + a_{1n} V_n \\ P_2 &= a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + \dots + a_{2n} V_n \\ &\dots\dots\dots \\ P_n &= a_{n1} V_1 + a_{n2} V_2 + \dots + a_{nn} V_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

ここに a_{ij} , ($i, j=1, 2, \dots, n$) は式 (7) を解いて求められる係数である。

(2) 定常強制力をうける格子桁

図-2 に示すはりの位置に強制周期力が作用するとき, その載荷点のたわみと荷重との関係は式 (8) により与えられたが, これはそのはりの固有振動数・振動モードが求められれば誘導できるものであるから, いまその載荷点を格子桁の格点に選び, かつ P と α についてその属する主桁と横桁とを区別するために H, Q の肩記号をつける。

図-3



ここで, 図-3 に示す

m 本の主桁, n 本の横桁が任意の方向に配置されている格子桁を例にとり, 図に示すように格点

番号をつけると, 式 (8) は主桁 m に対して次式 (9) となる。

$$\left. \begin{aligned} P^H_{m1} &= \alpha^H_{m1m1} V_{m1} + \alpha^H_{m1m2} V_{m2} + \dots + \alpha^H_{m1mn} V_{mn} \\ P^H_{m2} &= \alpha^H_{m2m1} V_{m1} + \alpha^H_{m2m2} V_{m2} + \dots + \alpha^H_{m2mn} V_{mn} \\ &\dots\dots\dots \\ P^H_{mn} &= \alpha^H_{mnm1} V_{m1} + \alpha^H_{mnm2} V_{m2} + \dots + \alpha^H_{mnmn} V_{mn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

橋桁 n に対しては式 (10) となる。

$$\left. \begin{aligned} P^Q_{an} &= \alpha^Q_{anan} V_{an} + \alpha^Q_{anbn} V_{bn} + \dots + \alpha^Q_{anmn} V_{mn} \\ P^Q_{bn} &= \alpha^Q_{bnan} V_{an} + \alpha^Q_{bnbn} V_{bn} + \dots + \alpha^Q_{bnmn} V_{mn} \\ &\dots\dots\dots \\ P^Q_{mn} &= \alpha^Q_{mnan} V_{an} + \alpha^Q_{mnbn} V_{bn} + \dots + \alpha^Q_{mnmn} V_{mn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

式 (9), (10) で与えられるような変形を, 主桁・横桁それぞれに与え, 両者の格点変位を等しく格点を結び合わせて格子桁に組み立てることを考える。このようにしてできた格子桁では, 例えば mn の格点について考えてみると, 変位は V_{mn} であり, この格点に作用している外力 P_{mn} は

$$P^H_{mn} + P^Q_{mn} = P_{mn} \dots\dots\dots(11)$$

で与えられる。よって, この格子桁に作用している外力と変形との関係は式 (12) で表わされる。

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{a_1 a_1} V_{a_1} + \alpha_{a_1 a_2}^H V_{a_2} + \dots + \alpha_{a_1 a_n}^H V_{a_n} + \alpha_{a_1 b_1}^Q V_{b_1} + \dots + \alpha_{a_1 m_1}^Q V_{m_1} = P_{a_1}^H + P_{a_1}^Q = P_{a_1} \\
 & \alpha_{a_2 a_1}^H V_{a_1} + \alpha_{a_2 a_2} V_{a_2} + \dots + \alpha_{a_2 a_n}^H V_{a_n} + \alpha_{a_2 b_2}^Q V_{b_2} + \dots + \alpha_{a_2 m_2}^Q V_{m_2} = P_{a_2}^H + P_{a_2}^Q = P_{a_2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \alpha_{b_1 b_1} V_{b_1} + \alpha_{b_1 b_2}^H V_{b_2} + \dots + \alpha_{b_1 b_n}^H V_{b_n} + \alpha_{b_1 a_1}^Q V_{a_1} + \dots + \alpha_{b_1 m_1}^Q V_{m_1} = P_{b_1}^H + P_{b_1}^Q = P_{b_1} \\
 & \dots \dots \dots \alpha_{b_2 b_1}^H V_{b_1} + \alpha_{b_2 b_2} V_{b_2} + \dots + \alpha_{b_2 b_n}^H V_{b_n} + \alpha_{b_2 a_2}^Q V_{a_2} + \dots + \alpha_{b_2 m_2}^Q V_{m_2} = P_{b_2}^H + P_{b_2}^Q = P_{b_2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \alpha_{m_1 m_1} V_{m_1} + \alpha_{m_1 m_2}^H V_{m_2} + \dots + \alpha_{m_1 m_n}^H V_{m_n} + \alpha_{m_1 b_1}^Q V_{b_1} + \alpha_{m_1 a_1}^Q V_{a_1} = P_{m_1}^H + P_{m_1}^Q = P_{m_1} \\
 & \dots \dots \dots \alpha_{m_2 m_1}^H V_{m_1} + \alpha_{m_2 m_2} V_{m_2} + \dots + \alpha_{m_2 m_n}^H V_{m_n} + \alpha_{m_2 b_2}^Q V_{b_2} + \alpha_{m_2 a_2}^Q V_{a_2} = P_{m_2}^H + P_{m_2}^Q = P_{m_2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \alpha_{m n m_1}^H V_{m_1} + \alpha_{m n m_2}^H V_{m_2} + \dots + \alpha_{m n m n} V_{m n} + \alpha_{m n b n}^Q V_{b n} + \alpha_{m n a n}^Q V_{a n} = P_{m n}^H + P_{m n}^Q = P_{m n}
 \end{aligned} \tag{12}$$

上式中 α_{ijij} の係数はまとめて次式のように記した。

$$\alpha_{ijij} = \alpha_{ijij}^H + \alpha_{ijij}^Q$$

式 (12) は格点に上式の右辺で与えられる強制周期力が作用するとき格点に生じるたわみを求める式である。

(3) 振動数方程式

格子桁が自由振動をしているときには、式 (12) の右辺 P_{ij} ($i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$) は 0 となる。すなわち

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{a_1 a_1} V_{a_1} + \alpha_{a_1 a_2}^H V_{a_2} + \dots + \alpha_{a_1 a_n}^H V_{a_n} + \alpha_{a_1 m_1}^Q V_{m_1} = 0 \\
 & \alpha_{a_2 a_1}^H V_{a_1} + \alpha_{a_2 a_2} V_{a_2} + \dots + \alpha_{a_2 a_n}^H V_{a_n} + \alpha_{a_2 m_2}^Q V_{m_2} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \alpha_{m n m_1}^H V_{m_1} + \alpha_{m n m_2}^H V_{m_2} + \dots + \alpha_{m n m n} V_{m n} + \alpha_{m n a n}^Q V_{a n} = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

すべてが 0 でない V_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) に対して式 (13) が成立するためには

$$\begin{vmatrix}
 \alpha_{a_1 a_1} & \alpha_{a_1 a_2}^H & \dots & \alpha_{a_1 a_n}^H & \dots & \alpha_{a_1 m_1}^Q & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_{a_2 a_1}^H & \alpha_{a_2 a_2} & \dots & \alpha_{a_2 a_n}^H & \dots & \alpha_{a_2 m_2}^Q & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \alpha_{m n m_1}^H & \alpha_{m n m_2}^H & \dots & \alpha_{m n a n}^Q & \dots & \dots
 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

式 (14) により与えられる行列の各元素は外力の振動数 ω の関数であったから、この行列を満足する ω を決定することは格子桁の固有振動数を求めることになる。すなわち式 (14) は格子桁の固有振動数 ω_k (k は格子桁の振動次数) を求める振動数方程式にほかならない。

(4) 振動モード

式 (14) より求めた格子桁の固有振動数 ω_k の値を式 (13) に代入すると各格点のたわみ V_{ij} の大きさの比が求められる。この値を式 (9), (10) に代入すれば、格子桁がある大きさの振動モードで自由振動をしているときの主桁・横桁に作用する格点力の比が決定する (格子桁が自由振動をしているときには、式 (9), (10) の左辺の外力は格点力に等しくなる)。この格点力の比を式 (6)

に代入して、主桁・横桁おのこの振動モードが求められる。今後、主桁・横桁をふくめた格子桁全体の振動モードを φ_k と表わし、主桁・横桁の振動モードを φ_{kh} , φ_{kq} にて表わすことにする。ただし、 $h=1, 2, \dots, m, q=1, 2, \dots, n$ 。

(5) 振動モードの正規化

前節に得られた格子桁の振動モード φ_k は、その形状は決まっているが、大きさについては任意であった。いま、上記の振動モード φ_k に係数 C_k を乗じ、この C_k の値を後の解析が簡単になるように式 (3) を用いて式 (15) により決定する。

$$C_k^2 \left[\sum_{h=1}^m \int \rho_h \{\varphi_{kh}(s_h)\}^2 ds_h + \sum_{q=1}^n \int \rho_q \{\varphi_{kq}(s_q)\}^2 ds_q \right] = 1 \tag{15}$$

ここに

- $m(n)$: 主桁 (横桁) の桁数
- $\rho_h(\rho_q)$: 主桁 h (横桁 q) の単位長さあたりの質量
- $s_h(s_q)$: 主桁 h (横桁 q) の座標

式 (15) を満足する格子桁の振動モード $C_k \varphi_k$ を今後 Φ_k と表わす。式 (15) は一般に正規化条件と呼ばれているものである。

(6) 外力 $P(t)$ を受ける格子桁の運動方程式

筆者は先にはり構造物の正規化された振動モード Φ_k , 固有振動数 ω_k が求められたならば、任意の点 $x=x_j$ に集中荷重 $P(t)$ が作用するとき、任意の点 $x=x_i$ のレスポンス v は次式で与えられることを述べた¹⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 & \ddot{v}_k + \omega_k^2 v_k = \Phi_k(x=x_i) \Phi_k(x=x_j) P(t) \\
 & v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k
 \end{aligned} \right\} \dots \tag{16}$$

ここに v_k は k 次の振動モード $\Phi_k(x)$ に対応する振動の大きさである。格子桁においても、式 (14) より得られる固有振動数 ω_k , 式 (15) を満足する振動モード Φ_k を上式に入れば式 (16) はそのまま格子桁に適用できる運動方程式となる。

(7) 移動荷重 $P(t)$ を受ける格子桁

式 (16) は $x=x_j$ なる固定点に集中荷重 $P(t)$ が作用するとき $x=x_i$ 点のたわみを求める式であるから、荷重 $P(t)$ が格子桁上を移動する場合には、式 (16) の荷重点の座標 x_j を時間の関数 $x_j=x_j(t)$ として置きかえればよい¹⁾。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}_k + \omega_k^2 v_k &= \phi_k(x=x_i) \phi_k\{x=x_j(t)\} P(t) \\ v &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

荷重の位置を時間の関数として表わすことができれば、式 (17) は荷重 $P(t)$ が任意の桁上を任意の速度で移動するときのレスポンスを求める式となる。

3. 種々の格子桁への適用

2. では格子桁の振動モード・固有振動数の決定と、荷重 $P(t)$ が作用するときの運動方程式など一般論について述べたので、ここではこの理論を種々の格子桁に適用することについて考えてみる。

前述のように結合法によるこの動的解析法では、主桁・横桁個々について荷重と変形との関係、すなわち式 (6) あるいは式 (7), (8) が求まればよい。その式中の定数は、主桁あるいは横桁 1本1本の固有振動数 ω_m と正規化された振動モード $\phi_m(x)$ を求めればただちに決定される。よって、この節では主として格子を構成している主桁・横桁すなわち、のちの格子モデル A, B, C, D を構成する種々の支持条件をもった個々の主桁あるいは横桁の固有振動数・振動モードについて述べれば十分と思う。

上記のようにこの解析法では、主桁・横桁の配置および支持条件はどのようであってもよいし、主桁・横桁の直交・斜交のいずれをも問わない。これらのために特別の式を準備する必要がなく、ただ格点の座標だけが問題となっていることに留意されたい。

なお、横桁の両端が主桁によって支持されている格子桁では、横桁の荷重と変位との関係が非常に複雑になるので理論の簡明を期するために、ここではかかる横桁に対してはその質量を無視し、静荷重に対して用いられるはり理論を使用して横桁は単に荷重分配の役目のみを行なうと考えて解析した。

(1) モデル A (主桁・横桁とも単純支持)

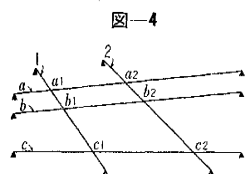


図-4

図-4 に示す主桁・横桁ともに単純支持された格子桁について考える。この場合、主桁・横桁ともに同じ境界条件を持っているから、どれか一つの桁について固有振動数 ω_m ・振動モード $\phi_m(x)$ を与えれば十分である。たとえば、主桁 b について考えてみると式 (18) となる¹⁾。

ここに

$$\left. \begin{aligned} \omega_{bm} &= \left(\frac{m\pi}{l_b} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_b}{\rho_b}} \\ \phi_{bm}(x) &= \sqrt{\frac{2}{M}} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

ここに

- l_b : スパン
- ρ_b : 単位長さあたりの質量
- EI_b : 曲げ剛性、
- M : 主桁 b の全質量

したがって、図-4 に示す格点記号を用いて、 b 桁の格点について式 (7) を立てれば式 (19) にて表わされる。

$$\left. \begin{aligned} V_{b1} &= a_{b1a1} P_{a1} + a_{b1b2} P_{b2} \\ V_{b2} &= a_{b2b1} P_{b1} + a_{b2b2} P_{b2} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

ここに

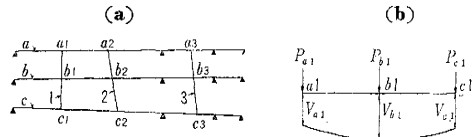
$$a_{bij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \frac{1}{\omega_{bm}^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{m\pi x_{bj}}{l_b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_{bi}}{l_b}\right) \quad (i, j=1, 2)$$

ゆえに、式 (19) をそれぞれの主桁・横桁について求めれば式 (12) が誘導できることがわかる。

(2) モデル B (主桁: 単純支持, 横桁: 主桁上に支持)

主桁が単純支持・横桁が主桁上に支持された格子桁橋の一般的例として、図-5 (a) のような構造について考える。主桁は単純支持であるから、式 (18), (19) などがそのまま使用できる。横桁に対しては、たとえば横桁 1 では、そのたわみと荷重との関係は(図-5 (b) 参照) 次式にて与えられる。

図-5



$$\left. \begin{aligned} V_{a1} &= a_{a1a1} P_{a1} + a_{a1b1} P_{b1} + a_{a1c1} P_{c1} \\ V_{b1} &= a_{b1a1} P_{a1} + a_{b1b1} P_{b1} + a_{b1c1} P_{c1} \\ V_{c1} &= a_{c1a1} P_{a1} + a_{c1b1} P_{b1} + a_{c1c1} P_{c1} \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

ここに、 a_{a1a1} , a_{a1b1} , ... などの係数は静力学的に求められるものである(式 (27) 参照)。したがって、図-5 (a) のようなモデルに対しては、式 (19) と (20) を使用して式 (12) の基礎式を導けばよい。

(3) モデル C (連続格子桁)

図-6 に示す 3 スパンの連続格子桁を例にとって考える。この場合、横桁は式 (20) の関係がそのまま使用できるが、主桁の固有振動数 ω_m 、振動モード $\phi_m(x)$ は連続ばりとして求めたものを使用する必要がある。一般に連続ばりの固有振動数・振動モードはそれぞれのスパンのはりについてその両端のたわみ角・曲げモーメントが等しいと置いて求めた式よりそれを決定する方法がとられているが、

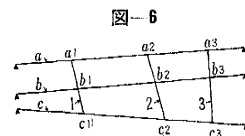
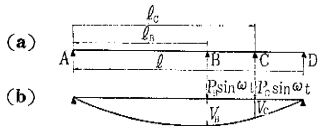


図-6

図-7



その数値計算を行なうにはかなりの労力を必要とするので、以下にのべる方法によるのが

便利である^{2),3)}。

例として図-7 (a) に示す3スパンの連続ばりについて考える。まず中間支点 B, C を取り去った単純ばりに、図-7 (b) に示す位置に集中荷重 $P_B \sin \omega t, P_C \sin \omega t$ を作用させる。点 B, C の座標を図のようにとると、これらの点におけるたわみは、式 (7) を使用して式 (21) により表わされる。

$$\left. \begin{aligned} V_B &= \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_B) \}^2 P_B \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_B) \phi_m(l_C) \} P_C \\ V_C &= \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_C) \phi_m(l_B) \} P_B \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_C) \}^2 P_C \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

しかるに、この連続ばりでは

$$V_B = V_C = 0$$

である。すべてが0でない P_B と P_C の値に対して式 (21) の左辺が0になるためには、つぎの条件が必要である。

$$\left| \begin{array}{cc} \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_B) \}^2 & \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_B) \phi_m(l_C) \} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_B) \phi_m(l_C) \} & \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \{ \phi_m(l_C) \}^2 \end{array} \right| = 0 \dots\dots(22)$$

式 (22) は図-7 (a) に示す連続ばりの振動数方程式にほかならない。また、このようにして得られた連続ばりの固有振動数 ω_s ($s=1,2,3,\dots$) の値を式 (21) に代入し、左辺を0とおけば、 P_B, P_C の比が求められる。この P_B, P_C, ω_s の値を式 (6) に代入すれば振動モード $\phi_s(x)$ が求められることになる。単純ばりの振動モード $\phi_m(x)$ は、式 (18) にて示されるように正弦波の関数である。ゆえに、式 (5) によって得られた振動モード $\phi_s(x)$ は、連続ばりの振動モードをフーリエ級数に展開した関数であることがわかる。いま、これが式 (23) のように表わされたものとする。

$$\phi_s(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots\dots(23)$$

この振動モードの大きさは自由であるので、常数 C_s を式 (23) の両辺に乗じて、式 (3) にて与えられる条件を満足するように C_s の値を決定すれば、連続ばりの正規化された振動モード $\phi_s(x)$ が求まる。この C_s の値は式 (24) となる。

$$C_s = \sqrt{\frac{2}{M} \cdot \frac{1}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots\dots}} \dots\dots(24)$$

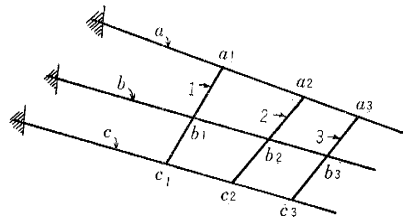
ここに M は連続ばりの全質量

単純ばりの固有振動数 ω_m は式 (18) からわかるように m^2 に比例して大きくなるから、 Ω_m は分母に m^4 に比例した項を持つことになる。したがって連続ばりの固有振動数 ω_s の値がたとえば、単純ばりの p 次の固有振動数 ω_p に近いときには、式 (22) の数値計算は、 $m=(p-1), p, (p+1)$ 次の連続した3項だけとって計算しても比較的よい精度の結果が得られる。このようなわけで式 (22) の行列は、理論上では $m=1$ より無限大までの振動次数のものについて計算を必要とするが、実際にはその必要がなく容易に ω_s が求められる。また連続ばりの振動モード ϕ_s を正規化するさい、 ϕ_s を式 (23) のようにフーリエ級数の和としてあらわせば正規化モードの係数は式 (24) の簡単な式であらわされるので、従来の厳密解を求める方法とくらべて計算がかなり簡単になる。

(4) モデル D (主桁：片持ばり、横桁：主桁上に支持)

主桁は片持ばりで、横桁は主桁上に支持された格子桁(図-8)について考える。

図-8 モデル D



この場合、主桁の振動数方程式・振動モード $\phi_m(x)$ はそれぞれ式 (25), (26) にて与えられる。

$$\cos \lambda_m l \cosh \lambda_m l + 1 = 0 \dots\dots(25)$$

$$\phi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{M}} \{ \cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x - \sigma_m (\sinh \lambda_m x - \sin \lambda_m x) \} \dots\dots(26)$$

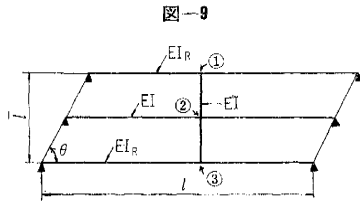
ただし
$$\sigma_m = \frac{\sinh \lambda_m l - \sin \lambda_m l}{\cosh \lambda_m l + \cos \lambda_m l}$$

$$\omega_m^2 = EI \lambda_m^4 / \rho,$$

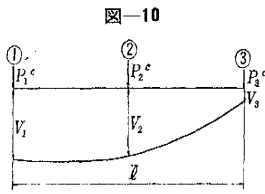
$$M = \rho l$$

4. 数値計算例

2. では格子桁の固有振動数・振動モードを求める方法について述べたが、主桁が等間隔並列で横桁が主桁に直交する格子桁橋において主桁相互の曲げ剛性の相違や斜角の変化によって、これらの値がどのように変化するかを定量的に調べるために図-9 に示す主桁3本・横桁1本の格子桁について数値計算を行なってみた。すなわち中桁の曲げ剛性 EI を一定とし、外桁の曲げ剛性 EI_R を変化させ、 $I_R/I=1.5, 2$, 斜角 $\theta=90^\circ, 45^\circ$, 横桁の



曲げ剛性 $E\bar{I}$ については $\bar{I}/I=0.123$ とし、スパン $l=25.2\text{ m}$ 、幅員 $\bar{l}=10.2\text{ m}$ として計算を行なった。なお、 $I_R/I=1$ のときは、主桁を単純ばりとして求めた固有振動数・振動モード (式 (18)) しか発生しないことが明らかであるから、ここでは述べないことにする。



格点番号を図-9に示すようにつけ、横桁のみを取り出してこれに図-10に示す変形を起こさせると、式 (10) で与えられる荷重とたわみとの関係は、静力学的には式 (27) によってあらわされる。

$$\left\{ \begin{aligned} \left\{ \beta'_1 \frac{I_R}{I} + 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \right\} V_1 & - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 V_2 + 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 V_3 & = P_1 H + P_1 Q = P_1 \\ - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 V_1 + \left\{ \beta'_2 + 48 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \right\} V_2 & - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 V_3 & = P_2 H + P_2 Q = P_2 \\ 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 V_1 & - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 V_2 + \left\{ \beta'_3 \frac{I_R}{I} + 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \right\} V_3 & = P_3 H + P_3 Q = P_3 \end{aligned} \right\} \times \left(\frac{EI}{l^3} \right) \quad (30)$$

したがって、式 (14) より振動数方程式は式 (31) となる。

$$\left| \begin{array}{ccc} \left\{ \beta'_1 \frac{I_R}{I} + 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \right\} & - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 & 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \\ - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 & \left\{ \beta'_2 + 48 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \right\} & - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \\ 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 & - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 & \left\{ \beta'_3 \frac{I_R}{I} + 12 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \right\} \end{array} \right| = 0 \quad (31)$$

上式の行列の元素のうち $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ は ω の関数であるから、式 (31) を直接計算しても格子桁の固有振動数を求めることができるが、横桁が中桁に対して対称振動を行なう場合と逆対称振動を行なう場合とにわけて計算したほうが容易であるので、ここでは2つのグループにわけて解析を進めることにする。

a) 横桁が中桁に対して逆対称振動を行なう場合 この場合には、式 (30) において $V_1 = -V_3, V_2 = 0$ とおけばよいから、式 (31) は

$$\beta'_1 = \beta'_3 = 0 \quad (32)$$

となる。式 (29) より式 (32) を満足する固有振動数は、外桁だけの固有振動数に一致することがわかる。この振動は、中桁が全く静止して、外桁のみが自由振動をしている場合である。

b) 横桁が中桁に対して対称振動を行なう場合 この場合には、式 (30) において $V_1 = V_3$ と置けばよい。こ

$$\left. \begin{aligned} P_1 Q &= 12 V_1 - 24 V_2 + 12 V_3 \\ P_2 Q &= -24 V_1 + 48 V_2 - 24 V_3 \\ P_3 Q &= 12 V_1 - 24 V_2 + 12 V_3 \end{aligned} \right\} \left(\times \frac{EI}{l^3} \right) \quad (27)$$

また、主桁に対して式 (9) をつくと、

$$\left. \begin{aligned} P_1 H &= \beta_1 V_1 = \beta'_1 \frac{EI_R}{l^3} V_1 \\ P_2 H &= \beta_2 V_2 = \beta'_2 \frac{EI}{l^3} V_2 \\ P_3 H &= \beta_3 V_3 = \beta'_3 \frac{EI_R}{l^3} V_3 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta'_1} &= \frac{1}{\beta'_3} = \frac{2I}{\pi^4 I_R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi x/l)}{m^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \frac{I}{I_R}}, \quad (x=x_1) \\ \frac{1}{\beta'_2} &= \frac{2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi x/l)}{m^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2}, \quad (x=x_2) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\omega_1 = (\pi/l)^2 \sqrt{EI/I_R}$$

x_1 : 外桁の格点の座標

x_2 : 中桁の格点の座標

さて式 (27) と式 (28) との和を作り、格子桁としての式を導くと式 (30) を得る。

のとき式 (31) は式 (33) となる。

$$\left| \begin{array}{cc} \beta'_1 \frac{I_R}{I} + 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 & - 24 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \\ - 48 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 & \beta'_2 + 48 \frac{\bar{I}}{I} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \end{array} \right| = 0 \quad (33)$$

変形すると

$$\frac{1}{\beta'_1} = -2 \frac{I_R}{I} \frac{1}{\beta'_2} - \frac{1}{24} \frac{I_R}{I} \frac{I}{\bar{I}} \left(\frac{l}{\bar{l}} \right)^3 \quad (34)$$

式 (33)、式 (34) は横桁が中桁に対して対称振動をするときの振動数方程式である。

① 斜角 $\theta = 90^\circ$ の場合

1) 固有振動数について

この場合、式 (29) において $x_1 = x_2 = l/2, \omega/\omega_1 = x^2$ と置き

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 x^2 - (2m-1)^2} = -\frac{\pi}{4x} \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2m-1)^2} = \frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2}$$

の関係を使用すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta'_2} &= \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{x^3} \left(\tan \frac{\pi}{2} x - \tanh \frac{\pi}{2} x \right) \\ \frac{1}{\beta'_1} &= \left(\frac{I}{I_R} \right)^{1/4} \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{x^3} \left\{ \tan \frac{\pi}{2} \left(\frac{I}{I_R} \right)^{1/4} x \right. \\ &\quad \left. - \tanh \frac{\pi}{2} \left(\frac{I}{I_R} \right)^{1/4} x \right\} \end{aligned} \right\} (29')$$

よって式 (34) は式 (35) となる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{I}{I_R} \right)^{1/4} \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{x^3} \left[\tan \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{I}{I_R} \right)^{1/4} x \right\} \right. \\ &\quad \left. - \tanh \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{I}{I_R} \right)^{1/4} x \right\} \right] \\ &= -2 \frac{I_R}{I} \frac{1}{4\pi^3} \left[\frac{1}{x^3} \left\{ \tan \frac{\pi x}{2} - \tanh \frac{\pi x}{2} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{24} \frac{I_R}{I} \frac{I}{I} \left(\frac{l}{l} \right)^3 \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

式 (32), 式 (35) を使用して数値計算を行なった結果を表-1に示す。ここでは中桁1次の固有振動数 ω_1 との比により示した。

表-1 格子桁の固有振動数 (ω_k) (ω_k/ω_1)

斜角 (θ)	次数 (k)	I_R/I		振動の種類
		1.50	2.0	
90°	1	1.163	1.306	対 称
	2	1.225	1.414	逆 対 称
	3	1.872	1.873	対 称
45°	1	1.179	1.332	対 称
	2	1.225	1.414	逆 対 称
	3	1.793	1.806	対 称

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

2) 振動モードについて

式 (35) より得られた ω_k の値を式 (30) の右辺を0

表-2 振動モードの成分

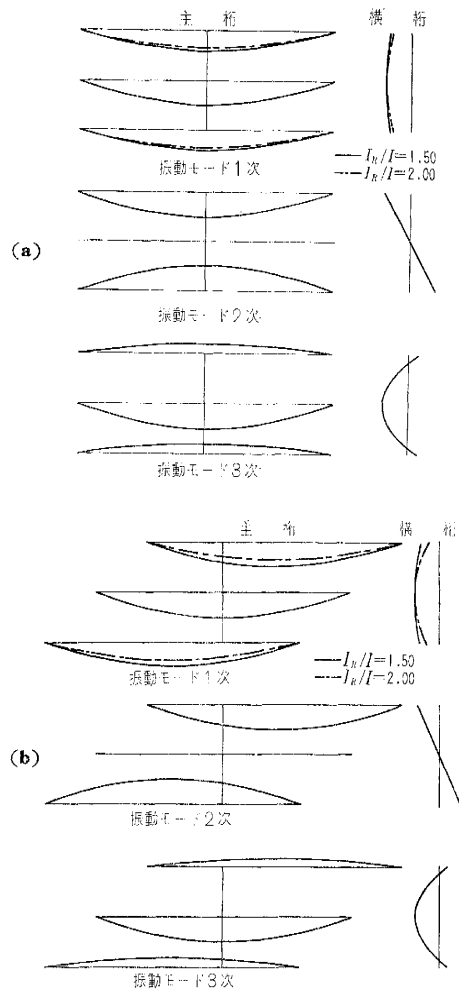
θ	I_R/I	k	中 桁					外 桁					
			p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	p_{k4}	p_{k5}	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	p_{k4}	p_{k5}	
90°	1.5	1	1.000	0	0.004	0	-0.001	1.000	0	-0.001	0	0.000	
		3	1.000	0	0.032	0	-0.004	1.000	0	0.017	0	-0.002	
	2.0	1	1.000	0	0.009	0	-0.001	1.000	0	-0.002	0	0.000	
		3	1.000	0	0.032	0	-0.004	1.000	0	0.010	0	-0.001	
	45°	1.5	1	1.000	0	0.005	0	-0.001	1.000	0.006	0.000	0.000	0.003
			3	1.000	0	0.028	0	-0.004	1.000	-0.0098	-0.005	0.003	0.002
2.0		1	1.000	0	0.010	0	-0.001	1.000	0.009	0.001	0.000	0.000	
		3	1.000	0	0.029	0	-0.004	1.000	-0.052	-0.303	0.002	0.001	

注 $\varphi_k H(x) = \sum_{n=1}^n b_{kn} \sin(n\pi x/l), p_{kn} = b_{kn}/b_{k1}$

とおいた式に代入すると、ある大きさの振動モードに対する V_1, V_2, V_3 の比が求められるから、これを式 (6) に代入すると、振動モード φ_k がフーリエ級数によりあらわされる。いま、これを各主桁に対して

$$\varphi_k H(x) = b_{k1} \sin \frac{\pi x}{l} + b_{k2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots (36)$$

図-11



とあわせし中桁・外桁おののに対し $b_{kn}/b_{k1} = p_{kn}$, ($n=2,3,4,5$) の値を求めると表-2となる。ここに $k=2,4$ の場合は、外桁のみが単純ばりの振動をしているときであるから省略した。また $k=1,2,3$ に対する振動モードを 図-11 に示す。

② 斜角 $\theta=45^\circ$ の場合
斜角 $\theta=45^\circ$ の場合には

は、 $\theta=90^\circ$ の直の格子桁の場合にくらべて振動数方程式は少し複雑になる。いま

$$A_m = \frac{I}{I_R} \frac{2}{\pi^4} \sin^2 \frac{m\pi x}{l}$$

とおけば、式 (34) はつぎのように変形できる。すなわち、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m^4 - \frac{I}{I_R} x^4} = -2 \frac{I_R}{I} \frac{1}{4\pi^3} \left\{ \frac{1}{x^3} \left(\tan \frac{\pi}{2} x - \tanh \frac{\pi}{2} x \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{24} \frac{I_R}{I} \frac{I}{I} \left(\frac{l}{l} \right)^3 \dots \dots \dots \right\} \quad (37)$$

ここに $x^2 = \omega/\omega_1$

式 (37) により格子桁の固有振動数 φ_k の値を求めると表-1 となる。また、 $\theta=90^\circ$ の場合と同じように振動モードを求め、これを式 (36) によりあらわすと各係数の値は表-2 となる。この振動モードを 図-11 に示す。

4. 結 論

以上、筆者提案の結合法によって一般の格子構造の固有振動数・振動モードを求めること、これをもととして動的外力が作用するときの格子の運動方程式の誘導、これらが広範囲の種々の格子桁に適用できること、さらに簡単な格子桁について数値計算を行なった結果について述べたが、以下のことが結論づけられると思う。

(1) 理論について

現在、格子桁の振動を理論的に取り扱った論文は非常に少なく直接の比較をすることは困難であるが、静荷重に対する解析は多く行なわれているので、これとの比較を考えてみる。従来、静荷重に対して使用される解析法のうち多くのものは、最初から格子を一体として取り扱い主桁・横桁相互の力と変形の条件から基礎式を誘導している。これに対し、この解析法の新しさは、構造物を初めにいくつかの要素（この場合は主桁と横桁）に切り離し、格点においてそれぞれの要素の変形を等しくおいたのち、与えられたもとの構造になるように一体として結合するという考え方が根本になっている。この方法によれば、主桁・横桁がどのように配置されていても、そのために特別な式を立てる必要がなく、個々のはりに対して固有振動数・振動モードが求まるかぎり、全く機械的に基礎式を誘導できる。もちろん、この方法は静的な問題に対してもそのまま適用できる。また未知数は格点の変位であり、これを解いて求めた変位より逆に桁に作用する力が求められる。さらに曲げモーメントは求められたたわみ曲線の 2 階微分の周知の式より計算できる。この意味ではこの解析法は変形法である。

ここで主桁と横桁とを結合して式を誘導したと同じ考え方で、さらに筆者はランガー桁・はりで補強した直交異方性板など一連の研究に成功している。このようなわけでこれらの解析に共通した考え方をとって、この解析法を結合法と名づけた。

一般に設計計算には力を未知数とした解析法を用いるのが便利であるが、この論文のように振動モードを求めたり、これから動的解析を行なうさいには変形を主とした解析法が便利となるようである。

また、ここでは 4 種の格子への適用について述べた

が、種々の境界条件を持った個々のはりの固有振動数・振動モードは比較的多く解析されているので、数値計算の難易はあろうがこの方法はかなり広い範囲に適用できる。ここでは両端の変位が 0 でないようはりに対してはその質量は無視し、単に力の分配伝達のみを行なうものと考えて解析を行なったが、その質量を考慮する場合においても、図-5 (b) に示す荷重とたわみの関係式が求まりさえすればこの理論により解析可能となる。しかし、この関係式は非常に複雑になり、実用計算ではほとんど不可能に近い。実在橋架では、合成桁の曲げ剛性はスラブの有効幅を考慮に入れて主桁・横桁に合成させるという方法がとられているが、この有効幅の考え方にならって主桁・横桁にスラブの重量を分配すると重量の重複する部分が生じ、この配分の仕方はむずかしい問題と考えられる。この意味で、主桁のみにスラブの重量を分配し、横桁にはそれを無視するという仮定は実用計算に便利と思われる。

式 (13) の未知数は格点の数だけ生じるから、格点数が多くなると、式 (14) の振動数方程式を解くにはかなりの労力を要することになる。この場合には、格子桁を直交異方性板とみなして解析する従来の方法によるのが望ましい。

移動荷重の慣性力の影響を考慮する必要がある場合、また、このときの等価モデルなど詳細については文献¹⁾を参照されたい。

連続ばりの固有振動数・振動モードの解析については、Rogers などにより提案された方法^{2),3)}を述べたが、この方法は厳密解を求める方法とくらべてはるかに計算が容易であり、とくに振動モードを正規化するとき振幅の乗数 C を決定する式が簡単な式 (24) により与えられる点でとくに有利であると思う。

ここでは桁のねじれの影響を無視して考えたが、このねじれの影響を考慮しても同様な考え方により解析できる。

(2) 数値計算結果について

ここでは 図-9 に示す並列主桁 3 本・横桁 1 本の格子桁について、斜角と外桁の曲げ剛性を変化させた数例について数値計算を行なったが、それらの結果からつぎのことがいえると思う。

実在橋の場合 I_R/I の値が 2 より大きくなることはほとんど考えられないから、この計算では $I_R/I = 1.5$ 、2 の 2 つの場合について考えたが、直格子桁の最低次の固有振動数は、それぞれ中桁の固有振動数の 1.163 倍、1.306 倍となっている。単純ばりの固有振動数は曲げ剛性 EI の平方根に比例して大きくなるから、外桁単独の固有振動数を求めるとそれぞれ中桁の 1.225 倍、1.414 倍となるはずである。したがって格子桁としての固有振動数は中桁の固有振動数の 1~1.225、1~1.414 倍の範

囲にあることは予想されるが、計算結果はどちらかという外桁の固有振動数のほうに近い値となっている。これは、この格子桁では外桁2本・中桁1本の構造のために外桁の影響を大きくうけたことによるものと考えられる。ゆえに、外桁・中桁の桁数の割合が異なる格子では、この値は若干変化するものと思われる。

また図-11よりわかるように、格子桁の横桁方向の振動モードの中には、主桁単独では生じえない形状のモードが発生するが、これと同じ形状の振動モードが直交異方性板にも発生することから、静荷重に対して格子理論と直交異方性板理論との間に存在する関連性の一端が、振動の場合にもうかがわれて興味ぶかい。

斜角が $\theta=45^\circ$ に変化しても、固有振動数の変化はほとんど見られず、3次の振動次数までのものについては、 $\theta=90^\circ$ の場合と比較してその影響は最大2%前後であり、この程度の斜角の変化は固有振動数に大した影響を与えないものと見られる。

主桁の振動モードは、表-2よりわかるように、 $\theta=90^\circ, 45^\circ$ の場合とも一次の正弦波と考えて十分であり、主桁の曲げ剛性が異なるために生じる振動モードの変化はごくわずかで、そのいずれの場合とも主桁3次の振動モードの大きさ b_{k3} の値は1次 b_{k1} の3%程度にすぎず、それ以上高次のものは無視して考えても十分である。 $I_R/I, \bar{I}/I, \theta$ の値がさらに大きく変化するような場合、または高次の振動次数のものについては数値計算を行っていないが、それらの場合にはかなり上と異なった結果になることも予想される。

最後にこの研究を行なうにあたり、ご支援いただいた

名古屋大学 成岡教授、熊本大学 吉村教授に深く感謝するとともに、計算その他につき助力された秦保之氏に謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) 平井一男：種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用、土木学会論文集第90号 p. 29, (昭.38.1).
- 2) Rogers, G.L.: Dynamics of framed structures, John Willy & Sons, 1959, p. 263.
- 3) Saibel: Vibration frequencies of continuous beams, Jour. of Aero. Sci., V. 11. pp. 88~90, 1944.
- 4) Bishop, R.E.D., Johnson, D.C.: Vibration analysis tables, Cambridge Univ. Press, 1956.
- 5) Bleich, H.: Frequency analysis of beam and girder floors, Trans. of A.S.C. E., V. 115, pp. 1023~1064, 1950.
- 6) Ellington, J.P., McCallion, H.: The free vibrations of grillages, Jour. of Apply. Mech., Dec., 1959, pp. 603~607.
- 7) Cox, H.L., Denke, P.H.: Stress distribution, instability and free vibrations of beam gridworks on elastic foundation, Jour. of Aero. Sci., V. 23, 1956, p. 173.
- 8) Hetenyi, M.: A method of calculating grillage beams, S. Timoshenko's 60-th Anniversary volume, p. 60.
- 9) S. Woinowsky-Krieger: Zur Statik und Kinetik der Trägerroste, Ing. Arch., XVII Bd., 1949, S. 391.
- 10) 荒井：並置された単純梁型主桁の応力・変形および振動に対し横桁がおよぼす力学的影響の一計算法について、名工大、学報1巻(昭.24).
- 11) 平井一男：移動荷重をうける相対2辺単純支持、他の2辺自由なる直交異方性板の振動性状について、土木学会論文集第92号(昭.38.4).

(原稿受付：1963.5.7)

昭和39年度土木学会論文集編集委員

委員 長	奥村敏恵	副委員 長	吉川秀夫	委員	土肥正彦	委員	三木五三郎
員	安芸井一	委	小池重郎	中川瀨元	中	村田二	
赤	伊藤睦幸	後	佐藤正雄	伯野元彦	伯	八木功	
池	守昌	佐	藤昭二	林正夫	林	山根孟	
大	沼徹	杉	木昭典	久武嘉夫	久	箭内寛	
岡	田功宏	鈴	多木雄太	堀井健一郎	堀	山崎徳也	
神	山光男	建	部宏彦	西尾元充	西	吉田	
栗	林栄一	玉	野治光	増田重臣	増	西嶋威夫	

昭和39年1月15日印刷
昭和39年1月20日発行

土木学会論文集 第101号 定価 150円(〒20円)

編集兼発行者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人 土木学会 羽田 巖
印刷者 東京都港区赤坂溜池5 株式会社 技報堂 大沼正吉

発行所 社団法人 土木学会 振替東京 16828 番
東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷一丁目 電話(351)代表 5138 番

MARUI

短時間 **厚さ及び構造物の弾性係数が判定** できる

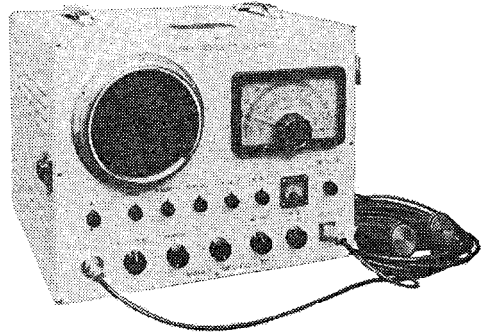
- ① 時間の節約になります (時代に即応)
- ② 正確な判断の参考資料となります
- ③ 無破壊で常に測定出来ます

用 途

- 型枠取除き判定 (経済助力となる)
- グム・コンクリート等の品質管理
- 道路隧道の厚さ及びボイドの判定
- コンクリートの経年変化・強度の推定等

営業品目

セメント・コンクリート・土質・アスファルト
水理各試験機・無破壊試験器・計量器・各種材料試験機



超音波反射測定器

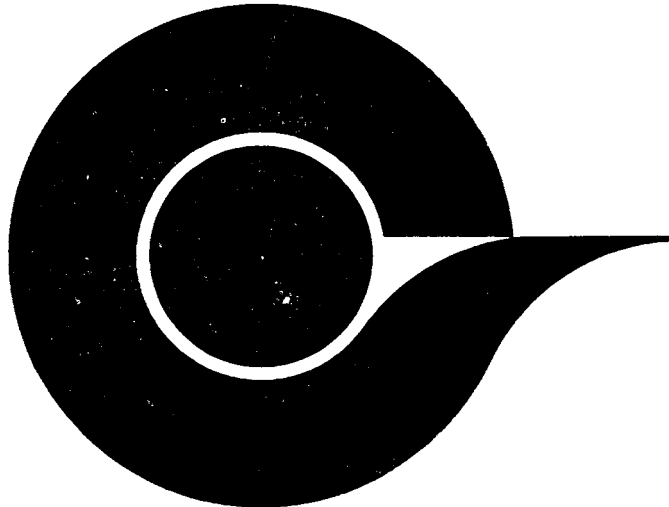


株式
会社

丸井製作所

本 社 大阪市城東区蒲生町4ノ10番地
電話 大阪 (931) 3541番 (代表)
東京出張所 東京都港区芝田村町5ノ4番地(吉田ビル)
電話 東京 (431) 7563番

学会・協会誌一手取扱



日本機械学会誌
化学と工業
精密機械
土木学会論文集
燃料協会誌
日本水産学会誌
月刊建設
埋立と浚渫
機械学会論文集
工業化学雑誌
産業機械
電気協会雑誌
日本工学会々報
大グム・石灰石
選炭・港湾
コンクリートジャーナル
機械学会英文論文集
日本化学雑誌
建設の機械化
電気化学
同位体と放射線
塩業時報
日本時計学会誌
日本鉱業会誌
日本鋳物協会誌
土木学会誌
早稲田電気工学会報
港湾荷役
東北鉱山
月刊JICST情報管理
其他學術技術専門誌
取扱



学・協会専門広告代理店

株式会社共栄通信社

本社 東京都中央区銀座西8の8(新田ビル内) 電話(572) 3381 代表-5

昭和三十七年五月二十八日第三種郵便物認可
 昭和三十九年一月十五日
 行刷(毎月一回)
 (二十日発行)

長い線でも
 同じ細さに

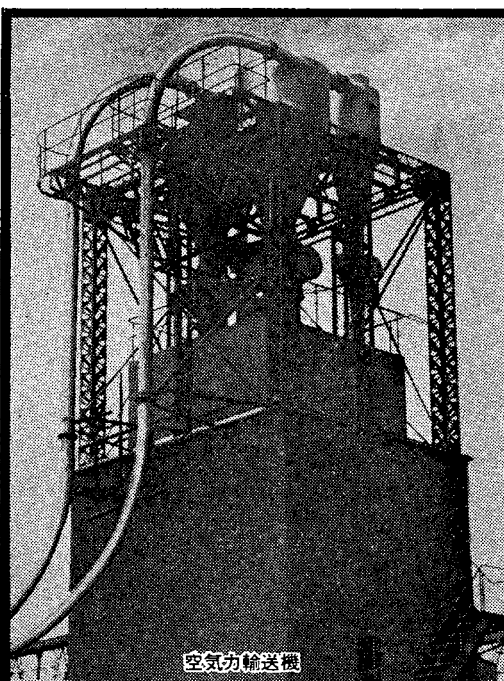
かき始めも 先端がくずれない
 途中でもかき減りが少ない

6H→6B14硬度 1ダース ¥600



三菱鉛筆

木
 学
 会
 論
 文
 集
 第一〇一号



空気力輸送機

ウノサワポンプ・ブロー



ウノサワ空気力輸送機

各種粉粒体の輸送・真空圧送型および併用型

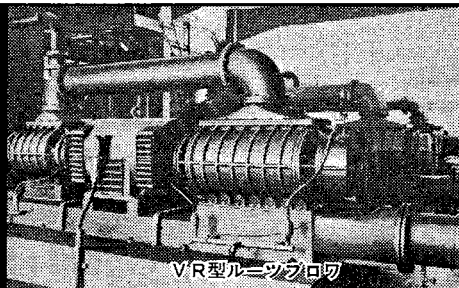
ウノサワ・ルーツブロー

小型から大型まで生産・各種工業の空気源
 真空ポンプおよび密閉軸封装置付特殊ガス用



製作品目

- ルーツブロー
- 真空ポンプ
- 給水ポンプ
- 暖房真空ポンプ
- 空気力輸送機



VR型ルーツブロー

株式会社 **宇野沢組鉄工所**

本社/渋谷工場 東京都渋谷区山下町6-2 電話東京(41)2211(代)
 玉川工場 東京都大田区矢口町9-4-5 電話東京(78)4191(代)
 大阪出張所 大阪市北区曾根崎新地3の12(不動ビル内) 電話大阪(36)0684

価
 百
 五
 十
 円