

## ランガー桁の動的解析

## DYNAMIC ANALYSIS OF ARCH WITH STIFFENING GIRDER

吉村 虎蔵\*・平井 一男\*\*  
By Torazo Yoshimura and Itio Hirai

**要 旨** この論文の 1. では放物線アーチをもつランガー桁の動的レスポンスと静的レスポンスの解析について述べた。理論を進めるにあたっては、エネルギー法と結合法との 2 つの方法によって別個にその固有振動数と正規化振動モードを求め、数値計算の結果、両者の解析値が全く一致することを示し、さらに、これらの固有振動数と正規化振動モードを使って、ランガー桁に種々の荷重が作用するときの運動方程式と、その静的・動的たわみの解を求めた。特に静力学的に解いたたわみ・曲げモーメントの影響線が、この動的解析による動的レスポンスの特別な場合としての静的たわみ・静曲げモーメント影響線と完全に一致するところから、この理論の正しいことを論じた。また、単一集中荷重を一定速度で走行せしめたときのランガー桁の動的レスポンスを計算して、速度によって動的たわみの増加率がどのように変化するか数値計算を行なった。

ランガー桁においては、死荷重によるアーチ推力が補剛桁に常時作用しているが、これがその固有振動数・活荷重によるたわみと曲げモーメントにどのような効果をおよぼすかの理論式と、これらの効果が長大支間の場合には十数%に達することを 2. に示した。

**緒 言** ランガー橋の動的研究として従来いくつかの貴重な研究<sup>1)~3)</sup> が数えられるけれども、それらはいずれもランガー橋の固有周期の解析法の理論が主であって、これによる理論値と固有周期の実測値との比較研究の域を脱しなかつたし、それらの理論の中には、いくつかの疑問の持たれる研究も見うけられる。移動荷重や地震動などに対する橋梁の動的レスポンスの研究は、設計荷重や衝撃率などの決定のためにきわめて重要であることはここに多言を要しないところであるが、移動荷重に対しては注として単純ばりについて多くの研究があり、諸種の形式の橋梁の動的理論的研究は未開拓の分野があまりに広いように思われる。ランガー橋の動的研究についても同様である。

筆者らはランガー桁について、新しく固有周期と正規化振動モードを求める 2 つの解析理論を導くことができた。さらに、これらの固有周期と正規化振動モードを使って、ランガー桁の動的および静的レスポンスの理論的

な解を得ることができた。これらの理論は、固有周期についてはその実験値と比較し、さらにレスポンスについては動的レスポンスの特殊な場合として得られた静的レスポンスのたわみと曲げモーメントを、通常ランガー桁の設計計算に用いる仮想仕事法により得られたたわみや曲げモーメントの影響線と比較して、これらの理論がともに正しいことが立証された。よって、さらに進んで単一荷重が走行するときの動的たわみの増加率について数値計算を行なった。

また、死荷重によるアーチ推力が補剛桁のたわみや曲げモーメントにおよぼす影響あるいは固有振動数への影響を考慮したときの、動的および静的解析法について述べ、また、長大支間のランガー桁ではその効果が無視できないことを示した。

## 1. 死荷重によるアーチ推力の影響を考慮しないときのランガー桁の動的解析

この論文において扱うランガー桁の動的解析では、つぎの仮定を設ける。

- (1) アーチの軸線は放物線である。
- (2) 補剛桁は定断面桁に換算して扱う。
- (3) アーチ断面も同様に定断面に換算して扱う。
- (4) 吊材の伸びは無視する。
- (5) 支承上において、補剛桁圆心線とアーチ軸線との間に偏心がない。

## (1) 適合条件

ランガー橋のアーチは折線の滑節アーチであるから、いまアーチの一部材 ( $j-1$ ) $\sim j$  が軸力をうけてその材長  $s_j$  が  $\Delta s_j$  だけちぢみ、 $j$  点が ( $j-1$ ) 点に対して、**図-1 (b)** に示すように  $x, y$  方向に  $\Delta x_j, \Delta y_j$  だけ変位したとすると、つぎの関係式が成立する。

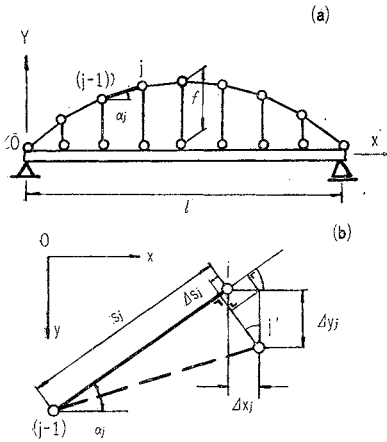
$$\Delta s_j = \Delta y_j \sin \alpha_j - \Delta x_j \cos \alpha_j \quad \dots\dots\dots (1)$$

式 (1) の関係は **図-1 (b)** のような簡単な幾何学的関係からただちに知ることができ、また F. Bleich<sup>4)</sup> のように三平方の定理を使って求めることもできる。荷重のためにアーチが軸力をうけて変形し、たわんだ場合に補剛桁より切り離れたアーチの支間の水平伸び量は、上式の  $\Delta x_j$  の総和として得られる。すなわち

$$\text{アーチ支間の水平伸び} = \sum_{j=1}^k \Delta x_j \quad \dots\dots\dots (2)$$

\* 正員 工博 熊本大学教授 工学部応用力学教室  
\*\* 正員 工修 熊本大学助教授 工学部応用力学教室

図-1



ここに  $k$  は格間数。一方、補剛桁の軸力による伸びを  $\Delta l$  とすると、これは次式で示される。

$$\Delta l = \Delta H \cdot l / A_g E \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\Delta H$  は振動の極限位置におけるアーチの水平推力の増加量、 $l$  は支間、 $A_g$  は補剛桁断面積、 $E$  はヤング率。

式 (2) と式 (3) とは等しかるべきであるから、つぎの適合条件式が成立する。

$$\Delta H \cdot l / A_g E = \sum_{j=1}^k \Delta y_j \tan \alpha_j - \sum_{j=1}^k \Delta s_j \sec \alpha_j \quad (4)$$

きて、図-1 (a) のアーチ軸線が  $Y = 4f x(l-x)/l^2$  なるなめらかな曲線アーチとすると、 $\tan \alpha_j = 4f(l-2x)/l^2$ 。いまランガー桁の変形をつぎのように考える。

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/l) \quad \dots\dots\dots (5)$$

このとき式 (4) の右辺第1項はつぎの2つの形となる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \Delta y_j \tan \alpha_j &= \int_0^l \tan \alpha_j \cdot d\varphi \\ &= 16 \left( \frac{f}{l} \right) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a_n}{n\pi}, \quad n=1,3,5,\dots \text{のとき} \\ &= 0 \quad n=2,4,6,\dots \text{のとき} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また式 (4) の右辺第2項は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \Delta s_j \sec \alpha_j &= \sum_{j=1}^k \frac{\Delta H \cdot \sec^2 \alpha_j}{A_g E} s_j = \frac{\Delta H}{A_g E} \int_0^l \sec^3 \alpha_j dx \\ &= \frac{\Delta H l}{A_g E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに  $A_a$  はアーチの断面積である。ゆえに式 (4) の適合条件式から、 $\Delta H$  と振動変位との関係、すなわち次式が得られる。

$$\begin{aligned} n=1,3,5, \dots \text{のとき, } \Delta H &= \frac{16 E f B}{\pi l^2} \sum \frac{a_n}{n} \\ n=2,4,6, \dots \text{のとき, } \Delta H &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (8)$$

ここに

$$B = A_a A_g / [A_a + A_g \{1 + 8(f/l)^2 + 19.2(f/l)^4\}]$$

このように、アーチは対称変形のときだけ働き、逆対称

変形の際には働かずに補剛桁だけの振動を考えればよい。また、上の適合条件式から得られた式 (8) は、滑節の折線アーチをなめらかな曲線アーチと仮定して求めたものであるが、アーチの断面積が各格間において変化する滑節アーチで、しかも補剛桁が変断面桁である場合についても、あるいはアーチの軸線が放物線以外の曲線であっても容易に上式にかわる厳密解を求めることができる。なお上記のような簡易解の厳密解に対する精度については、数値計算のところで検討されるであろう。

(2) 振動数方程式と振動モードの正規化

ランガー桁の移動荷重による過渡現象を解析するために、筆者らの方法では固有振動数と正規化振動モードを知る必要がある。これらを求めるために、ここでは2つの方法について記す。一つはエネルギー法、他を結合法と仮称する。これらの方法はそれぞれ別個に生れたものであるから、両者の理論の正しさを確かめるために、も役だつてであろう。

a) エネルギー法による固有周期\*とモードの正規化

この方法は、ランガー桁の固有振動数を Ritz の方法で求めようとするものである。まず自由振動時の Potential Energy の最大値を求めるとつぎのようになる。

アーチ材の Potential Energy ( $V_a$ )

$$V_a = \sum_{j=1}^k \frac{\Delta P_j^2 s_j}{2 A_{aj} E} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに  $\Delta P_j$  は第  $j$  格間のアーチ材の振動変位による軸力の増加量、 $A_{aj}$  はその断面積である。(1)におけると同様に折線アーチをなめらかな曲線アーチと考えると、

$$\begin{aligned} V_a &= \int_0^l \frac{\Delta P_j^2}{2 A_a E} ds = \frac{\Delta H^2}{2 A_a E} \int_0^l \sec^3 \alpha_j dx \\ &= \frac{\Delta H^2 l}{2 A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

補剛桁軸力による Potential Energy ( $V_g$ )

$$V_g = \sum_{j=1}^k \frac{\Delta H^2 x_j}{2 A_g E} = \frac{\Delta H^2 l}{2 A_g E} \quad \dots\dots\dots (11)$$

補剛桁の曲げによる Potential Energy ( $V_{gM}$ )

$$\begin{aligned} V_{gM} &= \int_0^l \frac{M^2}{2 EI_g} dx = \int_0^l \frac{1}{2} EI_g \left( -\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{\pi^4 EI_g}{4 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式 (10) では  $\Sigma$  を積分の形で計算したけれども、式 (9) によって滑節折線アーチのまま厳密に計算することもで

\* ランガー桁の固有周期のエネルギー法による解析については、筆者の一人がかつて文献 8) に発表したことがある。その方法における適合条件は本文の適合条件のようにアーチを滑節の折線アーチとして誘導したものであって、その後ローゼ桁における特解として誘導した山崎教授の適合条件が別に発表されていることは周知のとおりである。両者の間にはいくらかの相違がある。また、本文のエネルギーの計算は文献 8) を改めて山崎教授と同様の計算によっているが、適合条件式が異なるためあって結果には多少の差異がみられよう。なお、このことについては文献 7) の末尾の注 (3) においても記してある。

きる。また、この論文では吊材の Potential Energy を省略するが、その影響のちに検討されるであろう。このようにして、ランガー桁の自由振動時の最大 Potential Energy ( $V_{max}$ ) はつぎようになる。

$$V_{max} = V_a + V_g + V_{gM} \\ = \frac{128 E f^2}{\pi^2 l^3} B \cdot \left( \sum_n \frac{a_n}{n} \right)^2 + \frac{\pi^4 E I g}{4 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 \dots (13)$$

逆対称振動の場合には式 (13) の右辺第 1 項が落ちる。

ランガー桁の任意のモード  $\varphi(x)$  が固有振動数  $\omega$  で自由振動をしているとき、時刻  $t$  における振動変位は次式で示される。

$$y = \varphi(x) \sin(\omega t + \alpha) \dots (14)$$

$\alpha$  は常数とする。いまランガー桁の単位長さあたりの質量を  $\rho$  とすると運動エネルギーの最大値  $T_{max}$  は次式にて示される。

$$T_{max} = \frac{1}{4} \rho l \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \dots (15)$$

周知のように Ritz の方法では  $\varphi(x) = \sum a_n \sin(n\pi x/l)$  より与えられる有限個の  $\sin$  の和としてモードをあらわし、つぎの条件を入れて振動数方程式を求めらる。

$$\frac{\partial}{\partial a_n} (V_{max} - T_{max}) = 0 \dots (16)$$

ここで、あとの数値計算に便利なように振動数方程式を導いておこう。

(A. 1) 対称振動の場合の振動数方程式

式 (16) の偏微分を遂行すると式 (16) は次式となる。

$$\frac{256 E f^2 B}{\pi^2 l^3} \frac{1}{n} \sum_n \frac{a_n}{n} + \frac{\pi^4 E I g}{2 l^3} n^4 a_n - \frac{1}{2} \rho l \omega^2 a_n = 0 \dots (17)$$

式 (17) は  $n=1, 3, 5, \dots$  のそれぞれに対して合計  $n$  個の式となるが、いま式 (5) をつぎのように仮定する。

$$\varphi(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + a_5 \sin \frac{5\pi x}{l} \dots (18)$$

この場合には式 (17) は次式により表わされる。

$$\left\{ \begin{aligned} (\alpha + \beta) - r\omega^2 \} a_1 + \frac{1}{3} \alpha a_3 + \frac{1}{5} \alpha a_5 &= 0 \\ \frac{1}{3} \alpha a_1 + \left\{ \left( \frac{1}{3^2} \alpha + 3^4 \beta \right) - r\omega^2 \right\} a_3 + \frac{1}{15} \alpha a_5 &= 0 \\ \frac{1}{5} \alpha a_1 + \frac{1}{15} \alpha a_3 + \left\{ \left( \frac{1}{5^2} \alpha + 5^4 \beta \right) - r\omega^2 \right\} a_5 &= 0 \end{aligned} \right. \dots (19)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{256 E f^2 B}{\pi^2 l^3}, \quad \beta = \frac{\pi^4 E I g}{2 l^3}, \quad r = \frac{1}{2} \rho l$$

式 (19) より  $a_1, a_3, a_5$  を消去すると、1次、3次、5次の固有振動数  $\omega_1, \omega_3, \omega_5$  の近似値が求められる。その近似値の精度についてはのちに検討される。

(A. 2) 逆対称振動の場合の振動数方程式

前にも記したように、ランガー橋では逆対称振動のとき、アーチは働かない。よって逆対称振動は補剛桁のみの振動すなわち、定断面単純ばりの逆対称振動に帰着す

る。その解は周知のとおりで次式となる。

$$\omega_{gm} = \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{E I g}{\rho}} = \sqrt{\frac{\beta}{r}} m^2 \dots (20)$$

ここに  $\omega_{gm}$  としたのは、これは補剛桁のみの  $\omega$  であるからである。

さて以上によってランガー桁の固有周期が求まったわけであるが、つぎに振動モードとその正規化について述べよう。振動モードは式 (5) で表わされるが、 $m$  次の対称振動においては、いまの場合、式 (18) のように表わすから、一般に

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1,3,5} a_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (21)$$

また  $m$  次の逆対称振動モードは正弦の単一項となる。すなわち

$$\varphi_m(x) = a_m \sin \frac{m\pi x}{l} \equiv \varphi_{gm}(x) \dots (22)$$

$\varphi_{gm}$  とおいたのは補剛桁のみの  $\varphi_m$  であるからである。これらの振幅は自由振動時には任意の大きさの値を採ることができる常数であるから、後の計算に便利のように、対称振動・逆対称振動に対して正規化したモード  $\Phi_m(x)$  を求めておこう<sup>5)</sup>。

(B. 1) 対称振動時の  $\Phi_m(x)$

対称振動時の  $m$  次の振動モードは式 (21) で示されるが、いま正規化したモードを次式で表わす。

$$\Phi_m(x) = C_m \sum_{n=1,3,5} b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (23)$$

正規化の条件より次式が得られる。

$$\int_0^l \rho \Phi_m^2(x) dx = C_m^2 (b_{m1}^2 + b_{m3}^2 + b_{m5}^2) \frac{\rho l}{2} = 1 \dots (24)$$

$m$  次の固有振動数  $\omega_m$  が式 (19) から求められると、 $\omega_m$  を式 (19) に代入することによって、 $a_{m1}, a_{m3}, a_{m5}$  相互の比すなわち  $b_{m1}, b_{m3}, b_{m5}$  が知られる。これらの振幅比の値に対応して、式 (24) の常数  $C_m$  が定まり、モードが正規化されることになる。すなわち、

$$C_m^2 = \frac{2}{\rho l} \frac{1}{b_{m1}^2 + b_{m3}^2 + b_{m5}^2} \dots (25)$$

$$\Phi_m(x) = C_m \sum_{n=1,3,5} b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (26)$$

ここに  $\rho l$ : ランガー桁の全質量

(B. 2) 逆対称振動時の  $\Phi_m(x)$

逆対称時の  $m$  次の振動モードは式 (22) で示される。ゆえに正規化条件によって  $a_m$  を定めると、 $\Phi_m$  は補剛桁のみの  $\Phi_{gm}$  となり次式が得られる。

$$\Phi_m(x) \equiv \Phi_{gm}(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho l}} \sin \frac{m\pi x}{l} \dots (27)$$

**b) 結合法による振動数方程式とモードの正規化** この方法はランガー桁をまず、補剛桁とアーチ部とに切り離し、補剛桁に強制周期力を加えて定常振動をさせ、こ

のときの補剛桁の振動変位と同じ変位をアーチに与えるような力を求める。その力をアーチに加えながらアーチと補剛桁とを結合するならば、ランガー桁として補剛桁とアーチとは一体となって振動する。この定常振動の共振の条件すなわち、有限の加振力によって振動変位が無限大となるという条件から、あるいはまたランガー桁の自由振動時には上記の外力が0という条件を入れることによって、ランガー桁の振動数方程式を得んとするものである。このような考え方で解析を行なうので結合法と仮称することにする。

(A. 1) 対称振動時の振動数方程式

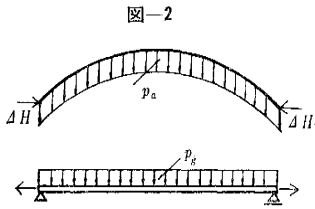


図-2

いま補剛桁のみに等分布周期力  $p_g \sin \omega t$  が作用するとき(図-2), 桁の任意点のたわみ  $w(x)$  は次式にて示される<sup>3)</sup>。

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 p_g}{n \pi \rho (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(28)$$

ここに  $\omega_{gn}$  は補剛桁の  $n$  次の固有振動数である。つぎに、 $a_n \sin(n \pi x/l)$  の単項で示される補剛桁の変形と同じ変形をアーチに与えるに要する等分布荷重  $p_{an}$  を求めてみる。ここに  $a_n$  は  $w_n$  の最大値である。いまの場合、アーチは放物線アーチであるから、アーチの水平推力  $\Delta H$  と吊材の軸力  $\Delta P$  との間にはつぎの関係がある。

$$\Delta P = \Delta H \cdot (\tan \alpha_{j-1} - \tan \alpha_j)$$

この吊材の軸力が一格間に等分布してアーチに働いているとすると(図-2), その等分布荷重  $p_{an}$  は次式にて与えられる。

$$p_{an} = \Delta H_n (8 f/l^2) \quad \dots\dots\dots(29)$$

$\Delta H$  と振動変位とは、適合条件式より導かれた式(8)によって関係づけられているから式(29)は次式となる。

$$p_{an} = \frac{128 E f^2 B}{\pi l^3} \cdot \frac{a_n}{n} \quad \dots\dots\dots(30)$$

$a_n$  は式(28)の最大振幅であるから

$$a_n = (w_n)_{\max} = \frac{4 p_g}{n \pi \rho (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \quad \dots\dots\dots(31)$$

よって上式を式(30)に入れて  $n=1$  から  $\infty$  まで加えると、アーチ部が式(28)にて示される補剛桁の変形と同じ変形をするに必要な等分布荷重  $p_a$  が求まることになる。すなわち次式が得られる。

$$p_a \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{512 E f^2 p_g}{n^2 \pi^2 \rho l^3 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \cdot B \cdot \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(32)$$

さて、補剛桁に  $p_g \sin \omega t$  なる等分布周期力を作用さ

せ、アーチに式(32)の等分布周期力を働かせながら、補剛桁とアーチとを結合すれば、ランガー桁として両者は一体となって振動する。このようにして結合されたランガー桁には式(33)で示す等分布周期力  $p_0 \sin \omega t$  が働き、ランガー桁は式(28)の振動を行なっているわけである。

$$p_0 = p_g + p_a = (1 + \mu) p_g \quad \dots\dots\dots(33)$$

ここに

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{512 E f^2 B}{n^2 \pi^2 \rho l^3 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)}$$

式(28)と式(33)とよりランガー桁のたわみは次式となる。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n \pi \rho (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n \pi x}{l} \cdot \frac{p_0}{1 + \mu} \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(34)$$

ランガー桁橋が自由振動を行なっているときは、外力  $p_0$  は0である必要がある。すなわち式(33)において

$$1 + \mu = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

が満足されねばならない。あるいは式(34)において、有限の加振外力がランガー桁の共振周期と一致して振幅  $w$  が無限大となるという条件、すなわち式(35)が満足されねばならない。このようにして式(35)は振動数方程式となる。この式に  $n=1, 3, 5, \dots$  を入れ、さらに  $n$  の各次数について式(20)にて与えられる  $\omega_{gn}$  を入れれば、式(35)の中で未知数は  $\omega$  だけとなるから、試算によって容易にランガー桁の対称振動の固有振動数  $\omega_m$  すなわち、 $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$  が高次まで求められる。

(A. 2) 逆対称振動時の振動数方程式

逆対称振動のときの固有振動数は、すでに述べたように補剛桁のみのそれであるから、式(20)より  $\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots$  がただちに求められる。

つぎに結合法における振動モードの正規化について記す。

(B. 1) 対称振動時の  $\Phi_m(x)$

式(28)あるいは式(34)からわかるように、ランガー桁の  $m$  次の振動モードはその振動の大きさを考慮しないときは常数をばふいて次式にて示される。

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)} \sin \frac{n \pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(36)$$

ただし、 $\omega_m$  は上に求めたランガー桁の固有振動数である。エネルギー法の場合と同様に正規化した  $\Phi_m(x)$  を求めるとつぎのとおり。

$$\int_0^l \rho \Phi_m^2(x) dx = \rho C'_m{}^2 \int_0^l \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( b'_{mn} \sin \frac{n \pi x}{l} \right)^2 dx = 1$$

ここに  $C'_m$  は  $m$  次の正規化モードに対する常数。

よって

$$C'_m{}^2 = \frac{2}{\rho l} \cdot \frac{1}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b'_{mn}{}^2} \quad \dots\dots\dots(37)$$

ゆえに正規化された振動モード  $\Phi_m(x)$  は次式となる。

$$\Phi_m(x) = C'_m \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b'_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(38)$$

ここに  $b'_{mn}$ , ( $n=1,3,5,\dots$ ) は式 (36) の示すところにより、つぎの式で与えられる。

$$b'_{mn} = 1/n(\omega^2 g_n - \omega^2 m) \dots\dots\dots(39)$$

式 (37), (38) はそれぞれ式 (25), (26) と対応する。

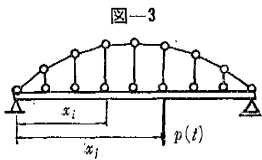
**(B. 2) 逆対称振動時の  $\Phi_m(x)$**

逆対称振動の場合の正規化モードは式 (27) で示される。

**(3) 運動方程式と動的・静的レスポンスの解**

以上までで、エネルギー法と結合法による振動数方程式と正規化モードについて述べてきたが、ここではこのようにして求められた  $\omega_m$  と  $\Phi_m(x)$  とを使ってランガー桁が任意の動的荷重をうけるときの動的レスポンスを求める方法について述べる。まず運動方程式の解から、静荷重を動的荷重の特別な場合として取り扱うときのたわみと曲げモーメントの影響線の解析を、つぎに単一荷重がランガー桁上を移動するときのたわみのレスポンスの解析について記す。

**a) 運動方程式** 図-3に示すように  $x=x_j$  なる位置



に集中荷重  $P(t)$  が作用するとき、 $x=x_i$  点におけるランガー桁の動的レスポンス  $w$  は、その  $\omega_m$  と  $\Phi_m(x)$  と

を使って次式 (40), (41) から求めることができる<sup>5)</sup>。

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x=x_j) P(t) \dots\dots\dots(40)$$

$$w_m = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \dots\dots\dots(41)$$

ここに、 $w_m$  は  $m$  次のモードに対する動的たわみである。例えば、いま周期力  $P_0 \sin \omega t$  が  $x=x_j$  点に作用するときを考えると、式 (40) の解は次式にて与えられる。

$$w_m = \frac{\Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x=x_j)}{\omega_m^2 - \omega^2} P_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(42)$$

ゆえに、このときの補剛桁における曲げモーメントのレスポンスは、上のたわみ曲線の2階微分として得られる。すなわち、

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -EI_g \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} w_m \right) \dots\dots\dots(43)$$

集中荷重  $P(t)$  が移動する場合には、式 (40) において単に荷重位置  $x_j$  を時間の関数  $x_j(t)$  とすればよい<sup>5)</sup>。すなわち

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x=x_i) \Phi_m\{x=x_j(t)\} P(t) \dots\dots\dots(44)$$

初速度  $v_0$  の一定速度で  $P_0$  が移動するときには

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x=x_i) \Phi_m\{x_j=v_0 t\} P_0 \dots\dots\dots(45)$$

**b) 静荷重  $P_0$  が作用する場合の静的たわみと曲げモーメントとの解** 静荷重  $P_0$  が作用するときのランガー

桁のたわみや曲げモーメントは、通常の方法すなわち仮想仕事法などによって解析できるわけであるが、あとの数値計算においてこの論文の理論が正しいかどうかを検討するために、動的レスポンスの特別な場合として、静荷重をうけるランガー桁のたわみと曲げモーメントの影響線の解をこの動的解析から求めておこう。

静荷重  $P_0$  が  $x=x_j$  点に作用するときには、式 (42) において  $\omega \rightarrow 0$  の極限を考えればよい。このとき  $x_i$  点のたわみは次式にて与えられる。

$$w(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x=x_j) P_0 / \omega_m^2 \dots\dots\dots(46)$$

よって  $x_i$  点のたわみの影響線は、上式の荷重点  $x_j$  を変数とみれば、ランガー桁の  $\omega_m$  と  $\Phi_m(x)$  を使って計算できることになる。すなわち、

$m=1,3,5,\dots$  のとき

$$w_m = P_0 \frac{C_m}{\omega_m^2} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn} \sin \frac{n\pi x_i}{l} \right) \times \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn} \sin \frac{n\pi x_j}{l} \right) \dots\dots\dots(47)$$

式 (47) の  $C_m$ ,  $b_{mn}$  は結合法のときはそれぞれ  $C'_m$ ,  $b'_{mn}$  を用いばよい。

$m=2,4,6,\dots$  のときの  $w_m$  を  $w_{gm}$  と書くと

$$w_{gm} = \frac{P_0}{\omega_{gm}^2} \cdot \frac{2}{\rho l} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l} \dots\dots\dots(48)$$

また式 (48) はのちに式 (50) における補剛桁の  $w_{g1}$ ,  $w_{g3}$ ,  $w_{g5}$  の計算にも利用できる。

よってランガー桁のたわみは式 (47) と式 (48) とを重ね合わせて次式より求まる。

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots} w_m + \sum_{m=2,4,6,\dots} w_{gm} \dots\dots\dots(49)$$

さて、高次のモードに対するたわみは微小であるけれども、式 (49) のたわみを全モードについて計算し、たわみの厳密解を得ることは非常に煩雑であるので、ここで計算の簡略化を考える。式 (17) からわかるように、その式のアーチに関する項すなわち第一項は  $n$  に逆比例し、補剛桁の項すなわち第2項は  $n^4$  に比例するから、ランガーの高次の振動においては、その固有振動数  $\omega_m$  は補剛桁のみの固有振動数  $\omega_{gm}$  と等しくなることが想像される。5次の振動数について計算して表-1のような結果が得られた。

このように7次より高次のランガー桁の固有振動数は補剛桁のみのそれと一致すると見なしてよい。よって式

表-1  $\omega_s$  と  $\omega_{gs}$  との比較 (エネルギー法)

橋名	$\omega_s$ (rad/sec)	$\omega_{gs}$ (rad/sec)	誤差 (%)
子飼橋	78.607	78.520	0.11
戸崎橋	25.904	25.835	0.27

(49) は次式のごとき項にわけて計算すれば、その数値計算がより容易でかつ厳密な解が得られる。

$$w = w_{g\infty} - (w_{g_1} + w_{g_3} + w_{g_5}) + (w_1 + w_3 + w_5) \dots\dots\dots (50)$$

ここに  $w_{g\infty}$  は補剛桁のみに静荷重が乗ったときのたわみであるが、この計算は式 (48) を使うのではなく、静力学的に解けば容易にその厳密解が得られるので、周知のたわみの解式あるいは影響線を用いればよい。第2項の各項は補剛桁の 1,3,5 次のモードによるたわみであって式 (48) にて求められるものであり、また第3項の各項はランガー桁橋の 1,3,5 次のモードに対するたわみであって式 (47) から計算されるものである。逆対称モードに対する  $w$  と7次より高次の対称モードに対する  $w$  はすべて  $w_{g\infty}$  の中にふくまれているわけである。

つぎに曲げモーメントあるいはその影響線の解を求めておこう。すでに示した式 (43) の計算を行なえばよいわけであるが、 $x_j$  点に静荷重  $P_0$  が働いているとき任意点  $x_i$  点の曲げモーメントは式 (50) を  $x_i$  で2回微分して求められる。すなわち次式となる。

$$M = M_{g\infty} - (M_{g_1} + M_{g_3} + M_{g_5}) + (M_1 + M_3 + M_5) \dots\dots\dots (51)$$

ここに  $M_{g\infty}$  は通常の静力学的方法によって求める。第2項の各項は式 (48) を2回微分して得られる。すなわち、

$$M_{gm} = EI_g P_0 \frac{2}{\rho l} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{m^2}{\omega_{gm}^2} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l} \dots\dots\dots (52)$$

第3項の各項は式 (47) を2回微分して得られる。すなわち、

$$M_m = EI_g \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{C_m^2}{\omega_m^2} P_0 \left( \sum_{n=1,3,5} n^2 b_{mn} \sin \frac{n\pi x_i}{l} \right) \times \left( \sum_{n=1,3,5} b_{mn} \sin \frac{n\pi x_j}{l} \right) \dots\dots\dots (53)$$

c) 移動荷重をうける場合のたわみの解 静的レスポンスの解が上に求まったので、ここではランガー桁上を  $P_0=1$  なる単位の集中荷重が一定速度  $v_0$  で走行するときの、任意点のたわみのレスポンスの解を求める。この場合における  $m$  次のモードに対する運動方程式はすでに式 (45) に与えてある。さて  $x_i$  点を測定点とすれば、式 (45) の右辺は対称・逆対称モードについてそれぞれ式 (54), (55) のようになる。

$$\begin{aligned} P_0 \Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x_j=v_0 t) |_{P_0=1} &= A_m \Phi_m(v_0 t) \\ &= A_m C_m \sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn} \sin(n\pi v_0 t/l) \\ &= \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{mn} \sin(n\pi v_0 t/l) \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

ここに  $A_{mn} = A_m C_m b_{mn}$  とおく。

結合法のときは  $C, b$  をそれぞれ  $C', b'$  とする。

$m=2,4,6,\dots$  のとき

$$P_0 \Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x_j=v_0 t) |_{P_0=1}$$

$$= \frac{2}{\rho l} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi v_0 t}{l} = B_m \sin \frac{m\pi v_0 t}{l} \dots\dots\dots (55)$$

ここに  $B_m = \frac{2}{\rho l} \sin \frac{m\pi x_i}{l}$  とおく。

よって対称・逆対称モードに対する運動方程式はそれぞれ式 (56), (57) となる。

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{mn} \sin(n\pi v_0 t/l) \dots (56)$$

$$\ddot{w}_{gm} + \omega_{gm}^2 w_{gm} = B_m \sin(m\pi v_0 t/l) \dots\dots\dots (57)$$

式 (56) と (57) を  $t=0$  のとき  $w=0, \dot{w}=0$  の初期条件を入れて一般解を求めて整理すると、それぞれ式 (58), (59) となる。

$$w_m = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{A_{mn}}{\omega_m^2 - (n\pi v_0/l)^2} \right\} \times \left\{ \sin \frac{n\pi v_0}{l} t - \frac{n\pi v_0}{\omega_m l} \sin \omega_m t \right\} \dots (58)$$

$$w_{gm} = \frac{B_m}{\omega_{gm}^2 - (m\pi v_0/l)^2} \left\{ \sin \frac{m\pi v_0 t}{l} - \frac{m\pi v_0}{\omega_{gm} l} \sin \omega_{gm} t \right\} \dots\dots\dots (59)$$

よって求めるたわみのレスポンスは両者の和によって得られる。すなわち

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots} w_m + \sum_{m=2,4,6,\dots} w_{gm} \dots\dots\dots (60)$$

上のレスポンスは速度一定の場合であるが、任意の速度変化がある場合に対しても別にその解を求めることができる<sup>5)</sup>。

式 (58), (59) を式 (60) に入れてまず、つぎのように整理をする。

$$\begin{aligned} w = & \left[ \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m1}}{\omega_m^2 - e^2} \right) \sin et \right. \\ & + \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m3}}{\omega_m^2 - (3e)^2} \right) \sin 3et \\ & + \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m5}}{\omega_m^2 - (5e)^2} \right) \sin 5et + \dots \left. \right] \\ & - \left[ \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{nA_{1n}}{\omega_1^2 - (ne)^2} \right) \frac{e}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right. \\ & + \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{nA_{3n}}{\omega_3^2 - (ne)^2} \right) \frac{e}{\omega_3} \sin \omega_3 t \\ & + \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{nA_{5n}}{\omega_5^2 - (ne)^2} \right) \frac{e}{\omega_5} \sin \omega_5 t + \dots \left. \right] \\ & + \sum_{m=2,4,6,\dots} \left[ \frac{B_m}{\omega_{gm}^2 - (me)^2} \left( \sin met \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{me}{\omega_{gm}} \sin \omega_{gm} t \right) \right] \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

ここに  $e = \pi v_0/l$ ,  $v_0$  は荷重速度。式 (61) において、 $e=0$  のときが静的たわみ  $w_s$  を与えるから動的増加たわみ  $\Delta w_d$  はつぎようになる。

$$\Delta w_d = w - w_s \dots\dots\dots (62)$$

ここで、実在橋においては一般に  $\omega_m \gg e$  であるから、 $1/(1-x^2) \doteq 1+x^2$  の展開式を用いて式 (61) を展開し、式 (62) をつぎのように整理する。

$$\Delta w_d = \left[ e^2 \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m1}}{\omega_m^4} \right) \sin et \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+9e^2 \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m3}}{\omega^4 m} \right) \sin 3et \\
 &+25e^2 \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m5}}{\omega^4 m} \right) \sin 5et + \dots \Big] \\
 &- \left[ \frac{e}{\omega_1} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{nA_{1n}}{\omega_1^2 - (ne)^2} \right) \sin \omega_1 t \right. \\
 &+ \frac{e}{\omega_3} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{nA_{3n}}{\omega_3^2 - (ne)^2} \right) \sin \omega_3 t \\
 &+ \frac{e}{\omega_5} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{nA_{5n}}{\omega_5^2 - (ne)^2} \right) \sin \omega_5 t + \dots \Big] \\
 &+ \left[ \sum_{m=2,4,6,\dots} \left( \frac{me}{\omega_{gm}} \right)^2 \frac{B_m}{\omega_{gm}^2} \sin met \right. \\
 &\left. - \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{me}{\omega_{gm}} \frac{B_m}{\omega_{gm}^2 - (me)^2} \sin \omega_{gm} t \right] \dots \dots \dots (63)
 \end{aligned}$$

(4) 数値計算

これまでランガー桁の動的解析の理論を述べてきたが、ここで、これらの理論を使って2つの橋、子銅橋（熊本市白川）と戸崎橋（宮崎県一ツ瀬川、竣工後米良稻荷大橋と改名）について、それらの固有振動数の理論値と実験値との比較、動的解析から得られた静的レスポンスと仮想仕事法より得られたたわみや曲げモーメントの影響線の比較、あるいは正規化した振動モードの計算などを行なってみる。

a) 橋の諸元について この動的解析ははじめに設けた仮定で理論を進めてきたから、実在の橋の断面定数をそれらの仮定に合致するように換算する必要がある。静力学的解析に使用する断面値と動

的解析に用いる換算断面値と実断面値とともに、戸崎橋および子銅橋についてそれぞれ表-2、表-3に記した。

b) 静力学的解析について ランガー桁では、アーチは折線の滑節アーチでしかも断面が変化し、一般に補剛桁も変断面でかつ、アーチと補剛桁端とは偏心結合されている。このような構造をそのまま動的に解析することは非常に困難であるから、はじめの仮定を設けたわけであるが、これらの仮定をもとにして静力学的に解いたたわみや曲げモーメントの値が、静力学的厳密解にくらべてどの程度の精度をもつものであるか、また同じ仮定の下で解いた静力学的解析結果と動的解析から得た静的解とがどのように一致するかを知るために、つぎのいくつかの計算を行なった。

その解析法の一つは、表-2、3の厳密解の欄の断面値を用い、折線アーチとして通常の仮想仕事法で解きたいわゆる厳密解である。他の方法は表中の簡易解の欄の断

表-3 子銅橋の諸元  
支間  $l=57.200$  m, ライズ  $f=9.000$  m, 橋全質量  $\rho l=186.08$  kg $\cdot$ sec $^2$ /cm, 格間数 10

	格点 No.	補剛桁			アーチ		吊材
		$A_g(\text{cm}^2)$	$e(\text{cm})$	$I_g(\times 10^6 \text{cm}^4)$	$A_a(\text{cm}^2)$	$I_a(\times 10^3 \text{cm}^4)$	
実断面値	0 支 承	381.5	17.83	1.6795	241.88	34.088	—
	1	"	"	"	"	"	48.72
	2	"	"	"	227.48	28.781	"
	3	"	"	"	"	"	"
	4	"	"	"	"	"	"
静力学的解析断面値	厳密解	381.5	17.83	1.6795	233.70		48.72
	簡易解(その2)	381.5	0	1.6795	233.70		$\infty$
動力的解析断面値		381.5	0	1.6795	233.70		$\infty$

注:  $e$  は補剛桁の図心線と中心線(骨組線)との偏心量

表-2 戸崎橋の諸元

支間  $l=139.200$  m, ライズ  $f=19.200$  m, 橋全質量  $\rho l=442.17$  kg $\cdot$ sec $^2$ /cm, 格間数 16

	格点 No.	補剛桁				アーチ		吊材
		$A_g(\text{cm}^2)$	$e(\text{cm})$	$\delta(\text{cm})$	$I_g(\times 10^6 \text{cm}^4)$	$A_a(\text{cm}^2)$	$I_a(\times 10^3 \text{cm}^4)$	
実断面値	0 支 承	552.6	40.0	-11.2	5.378	383.2	145.67	—
	1	499.0	"	-3.3	5.494	364.0	141.97	橋門構
	2	553.6	"	12.4	6.196	353.4	135.67	88.9
	3	568.8	"	24.2	6.370	343.8	133.82	88.9
	4 1/4 点	591.6	"	27.1	6.616	334.2	131.97	88.9
	5	586.8	"	31.1	6.487	328.6	128.47	88.9
	6	572.4	"	32.5	6.089	328.6	128.47	105.9
	7	572.4	"	36.6	6.089	323.6	125.72	105.9
静力学的解析断面値	厳密解	562.35	実橋のまま		6.2320	345.40		95.400
	簡易解(その1)	562.35	40.0	0	6.2320	345.40		$\infty$
	簡易解(その2)	562.35	0	0	6.2320	345.40		$\infty$
動力的解析断面値		562.35	$e=\delta=0$		6.2320	345.40		$\infty$

注:  $e$  は補剛桁端における骨組線と桁中心線との偏心量  
 $\delta$  は補剛桁中心線と図心との偏心量

$$X_{ma} = -\frac{\delta m a}{\delta a a} = -\frac{\frac{fx}{3l^2}(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{e}{2}x(l-x)}{\frac{8}{15}f^2l + \frac{4}{3}fle + e^2l + \frac{I_g l}{A_a} \left\{ 1 + 8\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \frac{96}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4 \right\} + \frac{128}{3} \frac{I_g \lambda}{A_h} \left(\frac{f}{l}\right)^3 + \frac{I_g l}{A_g}} \dots \dots \dots (64)$$

面値を用い、アーチをなめらかな放物線アーチとして仮想仕事法によって解いたいわゆる簡易解である。後者のうち  $A_h = \infty, e=0$  の場合がはじめの仮定すべてを満足するものであるから、これの静力学的解析結果と本節 d) の動的解析結果とは一致すべきものである。  
簡易解における不静定力、すなわちアーチの軸力の水平分力の影響線は次式にて示される。

ここに  $A_h$  は吊材断面積,  $\lambda$  は格間長,  $x$  は左支点より単位荷重点までの距離を示す。もし  $A_h = \infty$  にして偏心結合  $e=0$  の場合は次式となる。

$$X_{ma} = \frac{\frac{fx}{3l^2}(l^3 - 2lx^2 + x^3)}{\frac{8}{15}f^2l + \frac{I_g l}{A_a} \left\{ 1 + 8\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \frac{96}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4 \right\} + \frac{I_g l}{A_g}} \dots (65)$$

(i) 子鋼橋の静力学的解析: 表-3の厳密解欄の断面値を用いて, 折線アーチのランガー桁として解いたとき, 簡易解欄のように  $e=0, A_h = \infty$  として解いたときの影響線をくらべると 2% 以下の誤差で一致する。簡易解の場合の  $\delta_{aa}$  における吊材の項はつぎのようである。

$$EI_g \delta_{aa} = \text{式 (65) の分母} = 2.546 \times 10^3 (\text{m}^3)$$

$$\text{吊材の項} = 128 I_g \lambda f^3 / 3 A_h l^3 = 3.435 (\text{m}^3)$$

よって吊材の変形の  $\delta_{aa}$  におよぼす効果はこの場合 0.13% であってきわめて微小であることが知られる。

(ii) 戸崎橋の静力学的解析: この橋については表-2の静力学的解析断面の欄に見るように, 厳密解欄の断面を使って厳密に解析した場合と, 簡易計算で(その1), (その2)の断面を用いた2つの場合とを解析した。すなわち簡易解では  $A_h = \infty$  に対して, 桁端の偏心  $e=0$  の場合と  $e=40.0 \text{ cm}$  の場合との2つを解析した。この影響線のうち  $y_{1/4}$  一線を例示すれば表-4となる。簡易計算法の精度がよいことが知られると思う。 $M_{1/4}$  一線についても同様の精度が得られた。

表-4 戸崎橋の  $y_{1/4}$  線

荷重格点	$y_{1/4}$ 線 ( $\times 10^{-3} \text{ cm/t}$ )				
	厳密解	簡易解(その1) $e=40, A_h = \infty$	比(%)	簡易解(その2) $e=0, A_h = \infty$	比(%)
1	112.47	112.11	99.7	114.65	101.9
2	213.40	213.66	100.1	217.11	101.7
3	287.78	288.76	100.3	291.84	101.4
4	316.48	318.12	100.5	320.67	101.3
5	284.92	287.14	100.8	288.69	101.6
6	210.32	212.97	101.3	213.61	102.7
7	112.35	115.40	102.7	115.40	103.7
8	9.26	12.45	134.5	12.20	131.7
7'	-84.72	-81.68	96.4	-81.66	97.9
6'	-158.67	-156.02	98.3	-155.38	98.2
5'	-205.26	-203.04	98.9	-201.48	98.2
4'	-220.23	-218.59	99.3	-216.04	98.0
3'	-202.80	-201.82	99.5	-198.74	97.8
2'	-155.59	-155.33	99.8	-151.88	97.6
1'	-84.60	-84.96	100.4	-82.42	97.4

c)  $\omega_m$  と  $\Phi_m(x)$  について ここで動的に解析するランガー桁ははじめの仮定のもの, すなわち表-2,3の静力学的簡易解で取り扱ったもののうち,  $e=0, A_h = \infty$  のものである。

(i) エネルギー法による  $\omega_m$  と  $\Phi_m$

・戸崎橋——振動モードを式(18)のように仮定して, 対称振動の振動数方程式(19)の常数を計算するとつぎ

表-5 戸崎橋の  $\omega$

ランガー桁橋				補剛桁の対称振動	
対称振動		逆対称振動			
次数	$\omega_m$ (rad/sec)	次数	$\omega_{gm}$ (rad/sec)	$m$	$\omega_{gm}$ (rad/sec)
対称1次 ( $m=1$ )	7.373 5	逆対称1次 ( $m=2$ )	4.135 6	1	1.033 9
対称2次 ( $m=3$ )	10.287	逆対称2次 ( $m=4$ )	16.542	3	9.305 1
対称3次 ( $m=5$ )	25.904	逆対称3次 ( $m=6$ )	37.220	5	25.848

のようになる。

$B=194.77, \alpha=1.4500 \times 10^4, \beta=236.32, r=221.09$  よって式(19)に入れて係数行列式を展開すると

$$\omega^6 - 831.197 \omega^4 + 1.13245 \times 10^5 \omega^2 - 3.86067 \times 10^6 = 0$$

この方程式は試算でとくほうがはるかに楽に  $\omega_m$  を見出すことができ, 表-5を得る。また逆対称振動数は式(20)から求められ, これらも表-5にまとめた。さらに後のレスポンスの計算に必要な補剛桁のみのときの  $\omega_{g1}, \omega_{g3}, \omega_{g5}$  をも式(20)から計算して表-5に併記した。

さて上によって  $\omega_m$  が求まったから, つぎに正規化モード  $\Phi_m(x)$  を求める。まず,  $\omega_1$  の値を式(19)に入るとつぎの連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 2.7160 a_{11} + 4.8333 a_{13} + 2.9000 a_{15} &= 0 \\ 4.8333 a_{21} + 8.7329 a_{23} + 0.9667 a_{25} &= 0 \\ 2.9000 a_{31} + 0.9667 a_{33} + 136.260 a_{35} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

これから  $m=1$  のときの  $a_{11}, a_{13}, a_{15}$  の振幅比すなわち  $b_{m1}$  がつぎのよに求められる。

$$b_{11} = -57.571, b_{13} = +31.752, b_{15} = 1$$

ゆえに式(24)から,  $C_1 = 1.0228 \times 10^{-3}$

よって正規化した一次の振動モードは次式で示される。

$$\Phi_1(x) = \{-58.883 \sin(\pi x/l) + 32.476 \sin(3\pi x/l) + 1.0228 \sin(5\pi x/l)\} \times 10^{-3}$$

同様にして対称振動時の  $\Phi_3(x), \Phi_5(x)$  が定まる。

$$\Phi_3(x) = \{-32.479 \sin(\pi x/l) - 58.876 \sin(3\pi x/l) + 1.2100 \sin(5\pi x/l)\} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_5(x) = \{1.4797 \sin(\pi x/l) + 0.56539 \sin(3\pi x/l) + 67.235 \sin(5\pi x/l)\} \times 10^{-3}$$

これらの対称振動時の正規化モードを描けば図-4の実線のようになる。

逆対称振動時の正規化モードは, 式(27)よりただちに定まる。すなわち

$$\Phi_{gm}(x) = 67.254 \times 10^{-3} \sin(m\pi x/l)$$

この場合のモード図は単一の正弦波形であるから描く必要はないであろう。

・子鋼橋——戸崎橋と同様にしてつぎの結果が得られる。

$$B=128.24, \alpha=3.02313 \times 10^4, \beta=917.781, r=93.04$$

表-5に対応する表を掲げると表-6となる。

$\Phi_m(x)$  についてはつぎのようになる。まず対称モ-



ドでは

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x) &= \{-10.1526 \sin(\pi x/l) + 2.0964 \sin(3\pi x/l) \\ &\quad + 0.10473 \sin(5\pi x/l)\} \times 10^{-2} \\ \Phi_3(x) &= \{-2.1052 \sin(\pi x/l) - 10.1511 \sin(3\pi x/l) \\ &\quad + 0.067039 \sin(5\pi x/l)\} \times 10^{-2} \\ \Phi_5(x) &= \{0.12102 \sin(\pi x/l) + 0.04447 \sin(3\pi x/l) \\ &\quad + 10.3664 \sin(5\pi x/l)\} \times 10^{-2} \end{aligned} \right\}$$

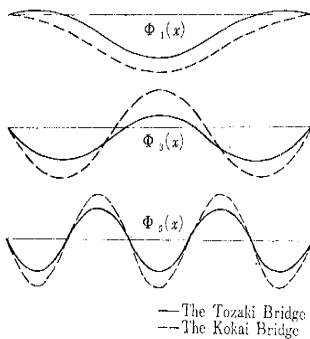
これらの正規モードを図示すると 図-4 の破線のようになる。実線と破線は同じスケールで描いてある。逆対称モードはつぎのとおり。

$$\Phi_{gm}(x) = 0.10368 \sin(m\pi x/l)$$

表-6 子飼橋の  $\omega$

ランガー桁橋				補剛桁の対称振動	
対称振動		逆対称振動		m	$\omega_{gm}$ (rad/sec)
m	$\omega_{gm}$ (rad/sec)	m	$\omega_{gm}$ (rad/sec)		
1	17.654	2	12.563	1	3.1408
3	29.282	4	50.253	3	28.267
5	78.607	6	113.07	5	78.520

図-4



(ii) 結合法による  $\omega_m$  と  $\Phi_m(x)$

・戸崎橋——対称振動時における振動数方程式は式 (35) であるが、この式の  $\mu$  中には式 (33) で示されるように  $\omega^2_{gn}$  が入っている。この  $\omega^2_{gn}$  は式 (20) をそのまま使ってよいわけであるから、戸崎橋に対してこれを求めると  $\omega^2_{gn} = 1.06892 n^4$ 。これを他の常数とともに式 (35) に入れると、つぎの振動数方程式が得られる。

表-7  $\Phi_m(x)$  の振幅の比較 (戸崎橋)

$\Phi_m$	振幅	$C_1 b_{m1}$	$C_3 b_{m3}$	$C_5 b_{m5}$	$C_7 b_7 m^7$	$C_9 b_9 m^9$
		または $C_1' b_1 m^1$	または $C_3' b_3 m^3$	または $C_5' b_5 m^5$		
$\Phi_1(x)$	エネルギー法	-58.883	32.476	1.0228	—	—
	結合法	-58.879	32.486	1.0232	0.179	0.047
	比 %	(100.16)	(99.96)	99.96	—	—
$\Phi_3(x)$	エネルギー法	-32.479	-58.876	1.2100	—	—
	結合法	-32.451	-58.894	1.2092	0.197	0.050
	比 %	(100.09)	(99.97)	100.07	—	—
$\Phi_5(x)$	エネルギー法	1.4794	0.56539	67.235	—	—
	結合法	1.5022	0.57401	67.235	0.076	0.016
	比 %	98.50	98.50	(100.00)	—	—

$$1 + 65.5849 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1.06892 n^4 - \omega^2)} = 0$$

上式からランガー桁の  $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$  が試算によって容易に求められる。結合法においては何らの近似も行なわれていないから、この解は厳密解であるが、これと式 (18) にもとづくエネルギー法により得た  $\omega_m$  とは全く一致する。この方法で  $\omega_7$  を求めると  $\omega_7 = 50.676$  rad/sec となる。

さて結合法による  $\Phi_m(x)$  は式 (37), (38) と (39) によって決定される。このように決定した  $\Phi_m(x)$  をまとめ、エネルギー法によるそれとくらべると表-7 のようになる。この表においてカッコは各モードのうち振幅大なる項の比を示すが、これらは全く一致している。逆対称モードについては同一式で計算するからエネルギー法の値と同じ。

・子飼橋—— $\omega^2_{gm} = 9.86434 n^4$ 、対称振動数方程式はつぎのとおり。

$$1 + 324.8075 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(9.86434 n^4 - \omega^2)} = 0$$

これを解いて得た  $\omega$  はエネルギー法と全く一致する。また  $\Phi_m$  の振幅を比較しても、戸崎橋におけると同様両者はまったく一致する。

(iii) 固有周期の実験値と理論値との比較：上に理論的に得た戸崎橋の固有周期を実験値とくらべると表-8 のようになる。実験値<sup>(6)</sup> は戸崎橋では起振機テストおよび自動車走行後の自由振動から得たものである。この表

表-8 戸崎橋の固有周期の比較

m		理論値 (sec)		実験値 (sec)	比 (%)
		エネルギー法	結合法		
対称振動	1	0.852	0.852	0.786	92.2
	3	0.611	0.611	0.509	83.3
	5	0.243	0.243	0.216	88.9
	7	—	0.124	—	—
逆対称振動	2	1.519	1.519	1.37	90.2
	4	0.380	0.380	0.364	95.8
	6	0.169	0.169	—	—

に見るように実験値と理論値との比は平均 90.9% となっている。静的載荷試験においては実橋のたわみ剛性は理論的に扱う構造の剛性よりも大であるから、固有周期においては実験値のほうが小さいのは当然のことである。すなわち式 (46) あるいは式 (47) から知られるようにたわみは  $\omega^2_m$  に逆比例するから理論的にはたわみ比は周期比の 2 乗となるべきである。子飼橋の固有周期をくらべると表-9 のようになる。安部理論による 1 次の固有周期を参考のため附記した\*。実験値<sup>(7)</sup> は自動車走行後の自由

\* 安部理論では、固有周期がこのように小さくでた。また同氏の論文<sup>(7)</sup>では、いずれの場合でも固有周期において、筆者らの場合と反対に実験値のほうが理論値より大きい。

表-9 子飼橋の固有周期の比較

m	理論値(sec)		実験値(sec)	比(%)	安部理論 <sup>1)</sup> (sec)	
	エネルギー法	結合法				
対称	1	0.356	0.356	0.344	96.6	0.271
非対称	2	0.500	0.500	0.432	86.4	---

振動より得たものである。

d) 動的解析による静的たわみと曲げモーメントの計算 動的解析によって、静的なたわみ、あるいはたわみの影響線を求めるには式(50)によればよいが、これの第2項と第3項は式(47)と(48)を用いる必要がある。

この2式は  $\omega_m$  と  $\omega_{gm}$  および正規化モードがわかれば計算できる。ところで、エネルギー法・結合法のいずれによっても  $\omega_m, \omega_{gm}, \phi_m(x)$  はまったく一致することが上の計算でわかったから、そのいずれによってもたわみの解は一致すべきものである。しかしながら結合法では  $\phi_m(x)$  を、 $n$  の7,9の高次項までとって容易に表現できるので  $n=9$  までとったときのたわみと、エネルギー法では  $n=5$  までとったときのたわみとをくらべてみることにする。すでに表-7

で  $n$  の高次の項の振幅は  $n=1,3,5$  次うちの最大振幅に比べて1%にも満たない程度であることがわかっているのであるが、結合法によって、できるかぎりの厳密解を得たいと思うからである。

静的曲げモーメントの計算には、式(51),(52)と(53)

を用いればよい。これについても上と同様の計算を行なって、結合法・エネルギー法による静的解析結果と静力学的解析結果と比較してみる。

・戸崎橋—式(50)の3項の数値を項別に示し、 $l/2$  点のたわみの影響線を求めると表-10のようになる。同表中には動的解析から得た影響係数と静力学的解析((4.)のb)において  $e=0, \Lambda_h=\infty$  から得た値とをくらべ、精度を調べている。

また同様に  $l/4$  点のたわみ、 $l/2$  点および  $l/4$  点の曲げモーメントの影響線をくらべると表-11のようにな

表-11 戸崎橋の影響線

格点 No.	$y_{l/4}$ -線 ( $\times 10^{-6}$ cm/kg)			$M_{l/2}$ -線 (cm)			$M_{l/4}$ -線 (cm)		
	動的解析	静力学	比(%)	動的解析	静力学	比(%)	動的解析	静力学	比(%)
1	114.68	114.65	100.0	-96.15 (96.84)	-95.60 (101.3)	100.6 (101.3)	254.52	254.25	100.1
2	217.10	217.11	100.0	-169.04 (170.82)	-168.74 (101.2)	100.2 (101.6)	526.36	525.95	100.1
3	291.66	291.84	99.9	-198.25 (201.08)	-197.84 (101.6)	100.2 (102.4)	830.87	830.37	100.1
4	320.67	320.67	100.0	-166.66 (170.12)	-166.08 (101.3)	101.3 (107.8)	1180.95	1180.44	100.0
5	289.08	288.69	100.1	-60.11 (63.96)	-59.34 (94.4)	99.4 (96.1)	717.22	716.74	100.1
6	213.61	213.61	100.0	132.53 (128.19)	133.33 (99.8)	99.8 (98.6)	317.99	317.55	100.1
7	115.40	115.40	100.0	419.04 (414.15)	419.82 (99.9)	99.9 (99.3)	-10.88	-11.38	95.6
8	12.40	12.20	101.6	804.02 (798.90)	804.79 (99.3)	99.3	-265.90	-266.41	99.8
7'	-81.67	-81.66	100.0				-445.88	-446.38	99.9
6'	-155.38	-155.38	100.0				-552.01	-552.45	99.9
5'	-201.51	-201.48	100.0				-587.78	-588.26	99.9
4'	-216.04	-216.04	100.0				-559.05	-559.56	99.9
3'	-198.53	-198.74	99.9				-474.13	-474.63	99.9
2'	-151.89	-151.88	100.0				-343.64	-344.05	99.9
1'	-82.40	-82.42	100.0				-180.48	-180.75	99.9

注：カッコはエネルギー法、動的解析カッコなしは結合法

る。

表-10,11 に見るように、静力学的に得た影響係数と動的解析とくに結合法において  $\phi_m(x)$  を  $n=9$  までとった場合とは完全に一致し、この動的解析の理論の正しいことが知られると思う。

・子飼橋—子飼橋についても上と同様の計算を行なった。しかしながら、この橋では静力学的解析では影響係数を各格点に対して求め、動的解析では16等分点に対して求めたので、数値的に精度を記すことができないが、 $y_{l/2}$ -線、 $M_{l/2}$ -線について両者をくらべると図-5のようになつて、両者はまったく一致することが知られる。

e) 動的レスポンスについて 戸崎橋の  $l/4$  点のレスポンスについて、速度  $v_0=10$  m/sec, 20 m/sec, 30 m/sec のときの  $d w_d$  を計算した結果と、 $w_s$  および  $d w_d + w_s = w$  との3者を図-6,7,8に

表-10 戸崎橋の  $y_{l/2}$ -線  $\times 10^{-6}$  cm/kg

$x_j$	格点 No.	動的解析				静力学的解析	比(%)
		$w_{g00}$	$w_{g1} + w_{g3} + w_{g5}$	$w_1 + w_3 + w_5$	$w(x_i = l/2)$		
$l/16$	1	800.87	802.13 (802.14)	-16.79 (-16.48)	-18.05 (-17.76)	-18.07	99.9 (98.3)
$2l/16$	2	1576.58	1577.31 (1577.34)	-24.74 (-24.70)	-25.48 (-25.46)	-25.43	100.2 (100.1)
$3l/16$	3	2301.98	2300.98 (2301.01)	-16.83 (-17.13)	-15.84 (-16.16)	-16.10	98.4 (100.4)
$4l/16$	4	2951.90	2950.40 (2950.44)	10.69 (10.46)	12.20 (11.98)	12.21	99.9 (97.7)
$5l/16$	5	3501.19	3501.54 (3501.58)	55.52 (55.56)	55.18 (55.15)	55.23	99.9 (99.9)
$6l/16$	6	3924.69	3926.80 (3926.85)	107.12 (107.12)	105.01 (104.95)	105.00	100.1 (100.0)
$7l/16$	7	4197.24	4197.40 (4197.45)	148.67 (148.41)	148.51 (147.76)	148.51	100.0 (99.5)
$8l/16$	8	4293.68	4290.52 (4290.58)	164.61 (164.22)	167.78 (167.32)	167.78	100.0 (99.7)

注：動的解析のうちカッコ内はエネルギー法、カッコなしは結合法

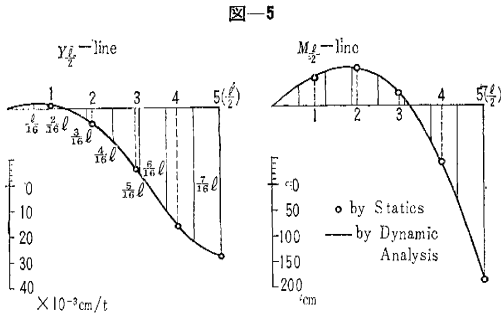


図-5

点のレスポンスでは逆対称1次 ( $m=2$ ) が顕著にあらわれることが計算結果から知られる。上の計算においては、対称振動に対して  $m=1,3,5$ ;  $n=1,3,5$  までとり、逆対称振動に対しては  $m=2,4,6$  までとった。

2. ランガー桁の死荷重によるアーチ推力がたわみ・曲げモーメントおよび固有振動数におよぼす影響について

ランガー桁においては、死荷重によってアーチに推力が作用し、このため補剛桁に相当大きな軸方向張力が常時作用している。軸力の作用する単純ばり上に荷重がかかる場合の軸力の効果については、すでに解が与えられているけれども<sup>9)</sup>、上記の場合の解あるいはその定量的な研究は見当らないようである。この章では、このときの解析法として、(1) 仮想仕事法による不静定力およびたわみ・曲げモーメントの解と、(2) 動的解析法による固有振動数・正規化モード・たわみと曲げモーメントの解との2つを導き、数値計算を行なう。

(1) 仮想仕事法による静的解

図-9(a)と(b)に示すように、軸力  $H_0$  の働く単純ばりに荷重が作用するとき、任意点  $x$  のたわみの解はそれぞれ次式によって与えられる<sup>9)</sup>。

$$y_p = \frac{2Pl^3}{EI_0 \pi^4} \sum_{n=1,2,3,4,\dots} \frac{1}{n^2(n^2+\zeta)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (66)$$

$$y_q = \frac{4ql^4}{EI_0 \pi^3} \sum_{n=1,3,5,7,\dots} \frac{1}{n^3(n^2+\zeta)} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (67)$$

ここに  $\zeta = H_0 l^2 / EI_0 \pi^2$

図-9

$H_0$  を死荷重によるアーチの水平推力と考え、いま荷重  $P=1$  がランガー桁に働くときの不静定力をアーチの水平推力  $X_1$  に選ぶとき、 $X_1=0$  の系すなわち基本構は 図-9(a) となる。この系における曲げモーメントを  $M_0$  とする。また、 $X_1=-1$  のとき、補剛桁に働く吊材応力が等分布荷重  $q$  であると考え、アーチが放物線であるから、

$$q = 8f/l^2 \dots (68)$$

ここに  $f$  はアーチのライズ、よって第1系は 図-9(b) のはりと部材力  $N_1=1 \cdot \sec \alpha$  (ただし  $\alpha$  はアーチ軸線の水平との傾角) をうけるアーチとの重ね合わせとなる。この系における補剛桁曲げモーメントを  $M_1$  とする。このとき不静定力は、周知のように次式にて与えられる。

$$X_1 = \delta_{10} / \delta_{11} \dots (69)$$

ここで  $\delta_{10}$ 、 $\delta_{11}$  について若干記さねばならないと思う。 $\delta_{10}$  は第1系におけるたわみであるから式(67)によって与えられるが(通常のようにせん断力によるたわみを

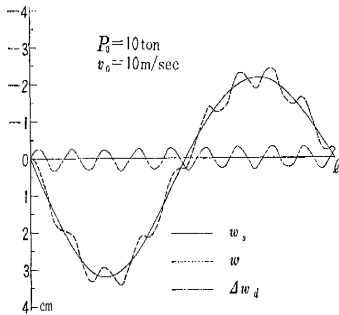


図-7

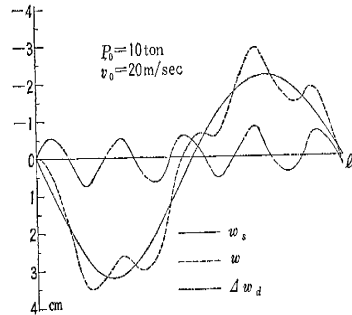
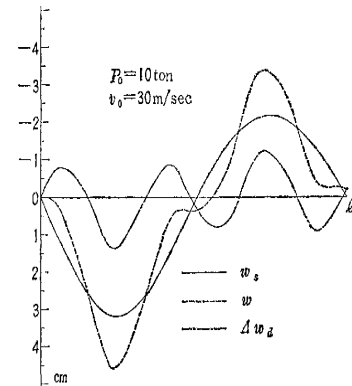


図-8



示す。ここで  $\Delta w_d$  の最大値と  $w_s$  の最大値との比をもって、動的増加率と定義すると、それぞれの速度に対して動的増加率は 11%, 24%, 43% となる。本橋の設計に際しては衝撃係数  $i=20/(50+l')=11\%$  (ここに  $l'=120+(l-120)/2=129.6\text{m}$ ) が採用してあった。  $l/4$

無視する),あるいはつぎのようにしても求められる。いま,基本構において  $H_0=0$  の場合の曲げモーメントを  $\bar{M}_0$  とすると

$$EI_g \delta_{10} = \int_0^l M_1 \bar{M}_0 dx = \int_0^l (-EI_g y_0'')_{\zeta=0} (-EI_g y_0'')_{\zeta=0} dx = \frac{4ql^4}{EI_g \pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3(n^2+\zeta)} \sin \frac{n\pi c}{l} \dots (70)$$

この式は式(67)と一致する。

式(70)の計算と同様に  $\delta_{11}$  の計算にあたっては,第1系において  $H_0=0$  のときの曲げモーメントを  $\bar{M}_1$ ,  $X_1=-1$  によるアーチの部材力を  $N_1$  とすると,

$$EI_g \delta_{11} = \int_0^l M_1 \bar{M}_1 dx + EI_g \sum N_1^2 \rho = \frac{8ql^3}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^4(n^2+\zeta)} + \left[ \frac{I_g l}{A_g} + \frac{I_g l}{A_a} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \right] \dots (71)$$

上式において,  $q$  は式(68)にて示され,  $\rho = s/A_a E$ ,  $s$  は折線アーチの一つの部材長である。

上のようして  $X_1$  の影響線が求まるから,任意点のたわみおよび曲げモーメントは次式にて定められる。

$$y = y_0 - y_1 X_1 \dots (72)$$

$$M = M_0 - M_1 X_1 \dots (73)$$

ここに  $y_0$ ,  $M_0$  は式(66)より,また  $y_1$ ,  $M_1$  は式(67)または式(70)より求まる。 $M_0$ ,  $M_1$  を  $y$  の2階微分より求めるとき,級数の収れんが緩慢であるから,その厳密解を求めるのは困難である。式(66),(67)からわかるように  $n$  の高次に対しては  $\zeta=0$  のときと  $\zeta \neq 0$  のときの高次の項は等しくなるから,このことに注目して次式によれば十分の精度の結果が得られる<sup>11)</sup>。

$$M_0 = (M_0)_{\zeta=0} - (M_0)_{\zeta=0} + (M_0)_{\zeta \neq 0} \dots (74)$$

$$M_1 = (M_1)_{\zeta=0} - (M_1)_{\zeta=0} + (M_1)_{\zeta \neq 0} \dots (75)$$

上式の第1項は  $H_0=0$  のときの曲げモーメントであって,級数和を求めることなく単純ばりの  $M$  としてただちに求まる。第2項は  $H_0=0$  のときの級数  $n=1 \sim 9$  項の和,第3項は  $H_0$  が働くときの  $n=1 \sim 9$  項の和

(2) 動的解析による固有振動数およびレスポンス

死荷重推力を考慮しないときのランガー桁の動的解析については,すでに1.にエネルギー法と結合法との2法を記述した。死荷重による推力を考慮する場合にはつぎようになる。

周知のように単純ばりに軸方向張力  $H_0$  が作用するときの  $n$  次の固有振動数  $\omega'_{gn}$  は<sup>10)</sup>

$$\omega'_{gn} = \omega_{gn} \sqrt{1 + \frac{\zeta}{n^2}} \dots (76)$$

ここに  $\omega_{gn}$  は  $H_0=0$  のときの単純ばりの固有振動数。式(76)はいまのランガー桁の逆対称振動に対してそのまま使用できることは1.から知られるところである。

ランガー桁の対称振動における固有振動数は,結合法によれば次式から定められる。

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{512 E f^2 B}{\pi^2 n^2 \pi^2 \rho l^4 (\omega'_{gn}{}^2 - \omega^2)} = 0 \dots (77)$$

また,エネルギー法によればつぎの連立方程式の  $a_n$  の係数行列を0とおいて求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{256 E f^2 B}{\pi^2 l^3} \frac{1}{n} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{a_n}{n} + \frac{\pi^4 E I_g}{2 l^3} n^4 a_n \left( 1 + \frac{\zeta}{n^2} \right) - \frac{1}{2} \rho l \omega^2 a_n = 0 \\ n=1,3,5,\dots \end{aligned} \right\} \dots (78)$$

左辺第2項に  $H_0$  の影響が入っているが,この項は曲げのときの位置エネルギーから求められる<sup>10)</sup>。

以上によって,死荷重による軸方向張力が補剛桁に働くときのランガー桁の対称ならびに逆対称固有振動数が求められる。ゆえに1.と同様に,正規化モードを定めることができ,したがって静的たわみ・曲げモーメントあるいは動的レスポンスが得られることとなる。

(3) 数値計算

数値計算は戸崎橋 ( $l=139.2$  m) と子飼橋 ( $l=57.2$  m) の2橋について行なった。両橋の  $H_0$  はそれぞれ 385.11 t, 136.99 t,  $\zeta$  はそれぞれ 0.577 12, 0.128 76 である。固有振動数を求めると表-12のとおりである。表に示すように支間が長大になると  $\omega$  への  $H_0$  の効果はわずかながら顕著になり,特に  $\omega_2$  は 6.5% 高くなっ

表-12 固有振動数  $\omega$  の比数

m	戸崎橋			子飼橋		
	軸力無視 (rad/sec)	軸力考慮 (rad/sec)	差(%)	軸力無視 (rad/sec)	軸力考慮 (rad/sec)	差(%)
1		7.487	1.51		17.701	0.3
2	臨	4.424	6.51	臨	4.036	1.6
3		10.503	2.06		29.467	0.6
4	臨	16.838	1.76	臨	50.453	0.4
5		26.200	1.13		78.809	0.3
6	臨	37.517	0.79	臨	113.269	0.2
7		50.972	0.58		—	—

表-13  $\phi_m(x) = \sum_{n=1,3,5} C_n b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \times 10^{-2}$

次数	係数	戸崎橋	子飼橋
		軸力考慮	軸力考慮
m=1	$C_1 b_{11}$	-6.009 08	-10.159 7
	$C_1 b_{13}$	3.018 51	2.058 64
	$C_1 b_{15}$	0.104 16	0.104 36
m=3	$C_3 b_{33}$	-3.017 19	-2.057 46
	$C_3 b_{35}$	-6.009 54	-10.159 95
	$C_3 b_{37}$	0.114 35	0.066 19
m=5	$C_5 b_{51}$	-1.444 85	-0.116 11
	$C_5 b_{53}$	-0.555 93	-0.044 43
	$C_5 b_{55}$	-67.236 5	-10.365 99

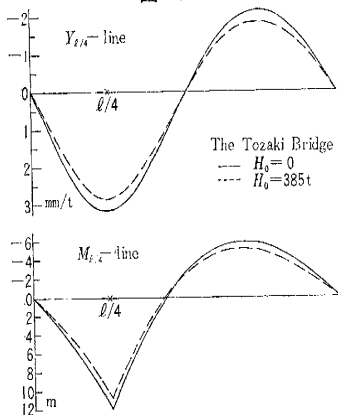
表-14  $y_{l/4}$ -line  $\times 10^{-6}$  cm/kg

$x_j$	戸崎橋			子飼橋		
	軸力無視	軸力考慮	差(%)	軸力無視	軸力考慮	差(%)
2 l/16	照 参 照 表-11	192.41	12.8	59.902	58.315	2.7
4 l/16		286.23	12.1	89.915	87.686	2.5
6 l/16		190.63	12.0	64.556	63.033	2.4
8 l/16		13.81	12.7	13.462	13.496	0.3
10 l/16		-131.27	18.3	-30.446	-28.933	5.2
12 l/16		-183.68	17.6	-48.269	-46.245	4.4
14 l/16		-129.49	17.3	-35.099	-33.688	4.2

表-15  $M_{l/4}$ -line  $\times$  cm

$x_j$	戸崎橋			子飼橋		
	軸力無視	軸力考慮	差(%)	軸力無視	軸力考慮	差(%)
2 l/16	照 参 照 表-11	455.52	15.5	220.58	213.41	3.4
4 l/16		1083.24	9.0	493.22	483.32	2.1
6 l/16		250.80	26.8	141.06	135.47	4.1
8 l/16		-247.20	7.6	-98.03	-96.28	1.8
10 l/16		-482.10	14.5	-216.44	-209.53	3.3
12 l/16		-476.62	17.3	-221.78	-213.38	3.9
14 l/16		-291.48	17.9	-136.92	-131.47	4.2

図-10



ている。また、正規化振動モードについて表-13を得た。これらを使って、両橋における  $l/4$  点のたわみの影響線を求めて表-14を得た。この表によって、中級支間の子飼橋と大支間の戸崎橋における  $H_0$  の効果がいちじるしく相違することが知られると思う。さらに  $l/4$  点における曲げモーメントの影響線を示せば表-15となる。軸力効果を考慮すると、 $l/4$  点のたわみ・曲げモーメント影響線は、戸崎橋においては十数%、子飼橋において約2%減少することが知られる。 $l/2$  点についても同様の計算を行なったが、このとき戸崎橋では約4%、子飼橋では約1%の減少をみた。(1)の方法によるこれらの計算経過の記述を省略するが結果は(2)の方法のそれと一致した。表-14,15を図示すれば図-10となる。また、戸崎橋の  $X_1$ -線は  $l/4$  点、 $l/2$  点において約1%の減少を示す。

近時、応力調整のためランガー桁においてもプレストレスを導入することがしばしば行なわれる。この場合、プレストレスが橋におよぼす動のおよび静的効果についても、本節の解析が適用できる。

結論 この論文の1.では、放物線アーチをもつランガー桁のアーチ・補剛桁が定断面で、アーチと補剛桁端の偏心結合量が0、かつ吊材の変形を無視した場合

のランガー桁の動的解析についてつきのごとき研究を行なった。すなわち

- (1) 適合条件式
- (2) エネルギー法と結合法とによるランガー桁の振動数方程式
- (3) 上の2つの方法における正規化モードの決定
- (4) 種々の荷重のときの運動方程式
- (5) 任意点  $x_j$  に周期力の作用するときのたわみの動的解と、その特別な場合としての静的たわみ・曲げモーメントの解。
- (6) 集中荷重が一定速度で橋上を移動するときの動的たわみの解。

これらの理論を戸崎橋 ( $l=139.2$  m) と子飼橋 ( $l=57.2$  m) について数値計算を行ない、種々の方向から検討し上の理論の正しいことを確かめた。

まず、エネルギー法と結合法とは、同じ適合条件を用いるけれども、まったく別個の方法である。それにもかかわらず、 $\omega_m$  や  $\phi_m(x)$  さらに静的たわみ・曲げモーメントの影響線の数値計算の結果、2つの値がまったく一致し、さらに、このような動力学的見地から解いた静的たわみ・曲げモーメントの値が静力学的解析法すなわち仮想仕事法による結果と完全に一致した。これらの理論の正しいことが立証されたといえよう。かようなわけでこの理論は動的レスポンスと静的レスポンスとが同時に得られる方法であり、静力学的解析法としても、仮想仕事法に代わる一つの方法といえると思う。また動力学的解析と静力学的解析とが一つの理論で結ばれたということも興味があると思う。

ここに用いる適合条件は、静力学的方法すなわち仮想仕事法や Castigliano の定理でランガー桁を解く場合には用いない条件である。この条件を使って立てた2つの動的理論による解が、静力学的解と全く一致するのであるからこの適合条件式の正しいことも立証されたと思う。

この理論を展開するにあたっては、初めに記した仮定が設けられているけれども、静力学的解析法によって得られた厳密解と、この仮定の上立った簡易解との間には(4)のb)におけるようにたわみ・曲げモーメントに大した差異が認められないから、この論文の理論はランガー桁の動的研究には大いに貢献するところがあると思われる。アーチと補剛桁との偏心結合  $e$  のある場合についても、動的解析理論を立てることもできる。また吊材の変形の効果は数値計算のところできわめて微小であることを示したが、この変形を考慮したときの理論式の誘導も可能と思う。

数値計算によれば、ランガー桁の対称振動において、高次の振動に対してはアーチは貢献しないことが知られた。数値計算に使った2つの橋では、5次 ( $m=5$ ) の振

動モードのときにすでに、その  $\omega_0$  はランガー桁としてのそれと、補剛桁のみのそれとはほとんど一致する。対称振動に対してはもちろんアーチは何の貢献もしない。ゆえにエネルギー法で動的解析を行なう場合には、対称振動に対しては  $m=1,3,5$  まで考慮すればよいことが知られた。結合法によれば  $\omega_1, \omega_2$  など高次の振動数をも容易に知られる利点があり、各モードの正弦項も  $n=7,9$  など高次の項の計算が容易である。

固有周期の理論値は2つの理論値がまったく一致し、その実験値との比は約90%である。戸崎橋の静的載荷試験<sup>9)</sup>によるたわみ比は大体80%であったから、 $w$  は  $\omega^2$  に逆比例するので上の比率は妥当な値であろうことが知られる。これらのことは理論的に扱った構造は、実橋よりもそれだけ剛性が小さいということを物語っている。その原因としては縦桁などの主構への協力などが考えられる。

ランガー桁に単一集中荷重が移動するとき、その動的レスポンスを計算した。戸崎橋の1/4点の動的たわみでは、速度10, 20, 30 m/sec に対して動的増加率(ここでは動的増加たわみの最大値と静的たわみの最大値との比をいう)が、それぞれ11%, 24%, 43%となった。とくに逆対称1次の振動が1/4では顕著に現われる。

ランガー桁では常時アーチの死荷重推力が補剛桁に作用するが、このときの活荷重による静的たわみ・曲げモーメントの解析法として、静力学的方法と動的解析法との2つを2.において導いた。数値計算の結果では両者は一致し、しかも60m級のランガー桁では死荷重推力の影響は微少であるけれども、140m級のランガー桁ではその影響が無視できないことが判明した。すなわち、

戸崎橋の1/4点のたわみ・曲げモーメントの影響係数は十数%減少し、固有振動数ではとくに  $\omega_2$  が6.5%高くなる。なお、このときの固有振動数や動的レスポンスについては1.と同様に解析できることをも示した。この理論は大きなプレストレスを導入したランガー桁の解析にも適用できる。

この研究において、市川紀一・鹿子木信義・平島健一の3君は熱心に数値計算に協力された。また宮崎県土木部道路課・九州電力一瀬水力発電所建設所・建設省土木研究所高田孝信部長はこの研究にご厚意をご協力を寄せられた。付記して深く謝意を表する。

#### 参考文献

- 1) 安部：ランガー橋の振動に関する研究，土木学会論文集第14号，昭27.9。  
谷藤・安部：同上，建設省土木研究所報告，83，84号。
- 2) 小西：プレストレスト コンクリートと構造力学（土木学会編）の振動工学の章，昭28.8。
- 3) 山崎：ランガー桁の固有周期について，土木学会第14回講演会，昭34.5。
- 4) Bleich, F.: 鋼橋の理論と計算，上，p. 68~69（コロナ社）。
- 5) 平井：種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用，土木学会論文集第90号，昭38.2。
- 6) 吉村・平井：戸崎橋ランガー桁の振動試験と載荷試験，土木技術，昭38.7。
- 7) 吉村外：道路ランガー桁（子飼橋と銀座橋）の載荷試験，土木学会誌，45-5，昭35.5。
- 8) 吉村：ランガーガーダーの固有振動について，土木学会第13回講演会，昭33.5。
- 9) Timoshenko, S.: Strength of Materials, Part II. Van Nostrand
- 10) Timoshenko, S.: Vibration Problems in Engineering, Van Nostrand
- 11) このような計算法は1.においても行なった。

(原稿受付：1963.5.7)