

水中橋脚の振動と耐震設計に関する基礎的研究*

FUNDAMENTAL STUDIES ON VIBRATION CHARACTERISTICS AND ASEISMIC DESIGN OF SUBMERGED BRIDGE PIERS

後藤 尚 男**・土岐 憲 三***

By Hisao Goto and Kenzo Toki

1. 緒 言

近時、海峡を横断する長大つり橋の橋脚やダム貯水池をわたる深水底上の橋脚、さらにその躯体の大半が水中に没する一般橋脚などの計画・設計・建設が次第に活発化し、これらの水中橋脚の耐震設計が重要な課題となってきた。本研究はこうした現状にかんがみ、水中橋脚に与える振動時の水の影響を究明し、空気中にある一般橋脚の振動性状との相違を明確にし、もってその耐震設計法確立への手がかりを得ようとするものである。

地震時の動水圧に関する研究はすでに Westergaard¹⁾ によって行なわれ、その成果は壁体の単位幅に作用する動水圧を算定できる理論式にまとめられている。また、わが国でも重力ダムやアーチダムに作用する地震時動水圧に関しては、畑野²⁾・小坪³⁾の両博士によって詳細な研究が行なわれ、それらの結果は水中橋脚に作用する動水圧についても多くの示唆を与えている。実際の水中橋脚の耐震設計にあたっては、これらの動水圧理論を用いる場合もあるが、最近では後述するいわゆる水の仮想質量の考え方にもとづいた研究や設計法が多く見受けられる。たとえば、岡本・加藤・伯野氏⁴⁾らは模型実験的な研究によって、この仮想質量の概念で水中橋脚の固有周期の増大する傾向が比較よく説明できると報告している。また桜井氏⁵⁾は三次元的な水の仮想質量を理論的に導き、細長い棒状構造物についての近似式を提案している。これより先、Clough⁶⁾は各種の寸法の円柱や角柱の模型を用いて水中での固有周期を測定し、仮想質量の考え方に検討を加えたが、その結果によると仮想質量は必ずしもその排除した水の質量に等しいとはかぎらず、適当な補正係数を乗じなければならないと述べている。

以上のように、水中橋脚についての各種の研究のうち、ダムや壁体に作用する動水圧式は運動と直角方向の奥行き幅の大なる構造物には適用できるが、橋脚のように奥行きが小さく、水中に孤立してその周囲を水で取り巻かれている構造物に対して適用できるかは疑問である。また仮想質量の考え方は水中で運動する剛体に作用する動水圧を質量に変換し、それだけ質量の増加した構

造物が空気中にあるものとして、弾性変形を論ずるのであるから力学的な矛盾はまぬがれない。

こうした観点から本研究では水の圧縮性をも考慮した水の運動についての基礎方程式から出発し、一方、水中橋脚としては下端で固定されてその頂部がちょうど水の自由表面に達している場合を対象とした。かくして、この円柱状橋脚に片持りの振動たわみに関する微分方程式を適用し、これと上記の基礎方程式とを解いて橋脚の弾性変形をも考慮した水中橋脚についての振動性状を解析した。さらに模型振動実験を行なって理論解による数値計算結果との比較検討をし、これらの解析結果にもとづいて耐震設計法に言及しようとした。

2. 円柱に作用する動水圧

円柱を取り巻く水の運動は図-1に示した円柱座標 r, θ, z についてのつぎの波動方程式で表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\kappa} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 ϕ : 速度ポテンシャル、 t : 時間

κ : 水の体積弾性率、 ρ : 水の密度

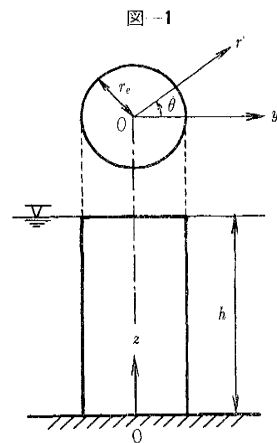


図-1 における境界条件はつぎの各式で与えられる。

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = 0, \quad \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad \left(g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=h} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

* 土木学会昭和 38 年度 年次学術講演会にて一部発表 (昭. 38.5.25)

** 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

*** 学生員 工修 京都大学大学院博士課程学生

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r=r_0} = -\frac{\partial y}{\partial t} \cos \theta \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 r_0 : 円柱の半径、 h : 円柱の高さと水深、
 y : 円柱の振動変位

式 (2), (3) で示される境界条件を満足する波動方程式 (1) の解は次式のように書き表わせる。

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} C_1 I_n^{(2)}(\lambda_m r) \cos \alpha_m z \cos n \theta \cdot i e^{i \omega t} \\ & + \sum_{m=s+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_2 K_n(\lambda'_m r) \cos \alpha_m z \cos n \theta \cdot i e^{i \omega t} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_3 I_n^{(2)}(\lambda_0 r) \cosh \alpha_0 z \cos n \theta \cdot i e^{i \omega t} \end{aligned} \dots\dots\dots(5)$$

ここに、

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_m^2}, \lambda'_m = i \lambda_m, \lambda_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \alpha_0^2},$$

$$c^2 = \frac{\kappa}{\rho}, \alpha_m : \tan \alpha_m h = -\frac{\omega^2}{\alpha_m g} \text{ の解,}$$

$$\alpha_0 : \tanh \alpha_0 h = \frac{\omega^2}{\alpha_0 g} \text{ の解,}$$

C_1, C_2, C_3 : 未定係数,

$I_n^{(2)}$: 第2種の Hankel 関数,

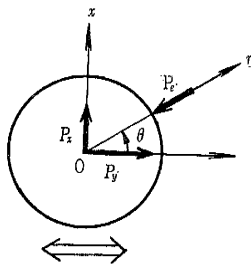
K_n : 変形 Bessel 関数、 ω : 円振動数,

$s : \omega^2/c^2 - \alpha_m^2 > 0$ の成立する m の最大値,

i : 虚数単位、 $m, n=1, 2, \dots$ 。

式 (5) にふくまれる未定係数 C_1, C_2, C_3 は境界条件を示した式 (4) により決定できる。いま、円柱がたわまず、その運動が単弦振動で与えられる場合について未定係数を決定し、かくして確定した速度ポテンシャル ϕ を Euler の圧力方程式に代入すると、水中の任意点での圧力が求まる。こうして得られた解のうち、表面波の影響による項を省略し、かつ円柱の単位長さあたりに作用する動水圧の x, y 成分を P_x, P_y とすれば、図-2 よりわかるように $P_x=0$ となり、また P_y は次式のように算出できる。

図-2



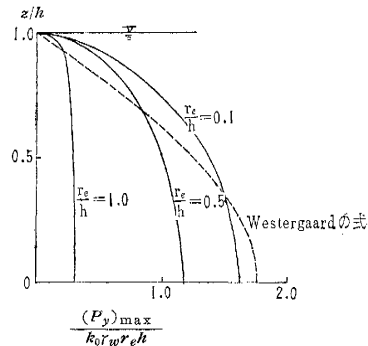
$$\begin{aligned} P_y = & \sum_{m=1}^s \frac{8 k_0 g \rho \pi r_0}{\lambda_m} \frac{\sin \alpha_m h}{\sin 2 \alpha_m h + 2 \alpha_m h} \\ & \times \frac{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}}{A_m^2 + B_m^2} \cos \alpha_m z \cdot i e^{i(\omega t + \varepsilon_m)} \\ & - \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{8 k_0 g \rho \pi r_0}{\lambda'_m} \frac{\sin \alpha_m h}{\sin 2 \alpha_m h + 2 \alpha_m h} \\ & \times \frac{K_1(\lambda'_m r_0)}{K_0(\lambda'_m r_0) + K_2(\lambda'_m r_0)} \cos \alpha_m z \cdot i e^{i \omega t} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

ここに、 k_0 : 震度、 g : 重力加速度、
 $A_m = J_0(\lambda_m r_0) - J_2(\lambda_m r_0)$ 、 $B_m = Y_0(\lambda_m r_0) - Y_2(\lambda_m r_0)$ 、
 $\tan \varepsilon_m = b_m/a_m$ 、 $a_m = A_m J_1(\lambda_m r_0) + B_m Y_1(\lambda_m r_0)$ 、
 $b_m = B_m J_1(\lambda_m r_0) - A_m Y_1(\lambda_m r_0)$ 、
 J_n : 第1種 Bessel 関数
 Y_n : 第2種 Bessel 関数

式 (6) はダムなどに作用する地震時動水圧を与える理論式と類似しているが、それらにおいては λ_m, λ'_m が 0 になるときには動水圧の共振が起こるとされている。しかるに、ここに得た解の式 (6) は $\lambda_m, \lambda'_m \rightarrow 0$ の極限を考えると第1項、第2項とも一定値に収束して、その値は無限大とはならない。したがって、ここで取り扱うような水中に孤立した円柱状橋脚では、動水圧の共振現象は存在しないことになる。

式 (6) で示される円柱状橋脚に働く動水圧と Westergaard の式で与えられる壁体に作用する動水圧とを比較対照したのが 図-3 である。この図にみるように、円柱が比較的太短い場合には、壁体に働く動水圧に近い値を示すが、円柱が細長くなるとその鉛直方向の動水圧分布ならびにその絶対値が異なることを知る。

図-3 動水圧 P_y の鉛直分布形状



3. 水中にある円柱状可撓橋脚の振動

(1) 円柱の振動たわみ

水中橋脚が地震時に示す挙動を解明するために円柱の弾性変形をも考慮した解析を遂行するに際し、まず座標を 図-4 に示すように定め、 y_0 を地動、 y_d をたわみ量とすれば $y = y_0 + y_d$ と書ける。さて、動水圧を求めるには円柱の変位速度を知らねばならないが、 y_d は z に関して未知関数である。いま、円柱の定常振動について考えるに、一応減衰を考慮外におくと y_d は地動と同一の振動数を持つとみなしてよい。したがって、地動を簡単に単弦振動

$$y_0 = -e_0 i e^{i \omega t} = -\frac{k_0 g}{\omega^2} i e^{i \omega t} \dots\dots\dots(7)$$

と仮定すると、 y_d は次式で示される。

$$y_d = -Y i e^{i \omega t} \dots\dots\dots(8)$$

このようにして動水圧 P_y は前節と同様な方法によっ

て求まるが、この場合には未知関数 Y がふくまれている。すなわち、

$$P_y = \sum_{m=1}^s \frac{4 \omega^2 \rho \pi r_e}{\lambda'_m h} \frac{H_1^{(2)}(\lambda'_m r_e)}{H_0^{(2)}(\lambda'_m r_e) - H_2^{(2)}(\lambda'_m r_e)} \int_0^h \left(\frac{k_0 g}{\omega^2} + Y \right) \cos \alpha_m z dz \cos \alpha_m z \cdot i e^{i \omega t}$$

$$- \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{4 \omega^2 \rho \pi r_e}{\lambda'_m h} \frac{K_1(\lambda'_m r_e)}{K_0(\lambda'_m r_e) + K_2(\lambda'_m r_e)} \int_0^h \left(\frac{k_0 g}{\omega^2} + Y \right) \cos \alpha_m z dz \cos \alpha_m z \cdot i e^{i \omega t}$$

.....(9)

つぎに、たわみ y_d を片持ばりに関する正則化された正規関数 $\eta(k_\mu z)$ で次式のように級数展開する。

$$y_d = -Y i e^{i \omega t} = - \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \eta(k_\mu z) i e^{i \omega t} \quad \text{.....(10)}$$

ここに、 A_μ : 未定係数、 $k_\mu h$: 固有値
かくして、片持ばりに関する微分方程式の座標を相対座*

$$(p_\nu^2 - \omega^2) A_\nu = \frac{k_0 g}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) dz$$

$$- \sum_{m=1}^s \frac{4 r_w \pi r_e^2 \omega^2}{r A h^2} \frac{1}{\lambda'_m r_e} \frac{H_1^{(2)}(\lambda'_m r_e)}{H_0^{(2)}(\lambda'_m r_e) - H_2^{(2)}(\lambda'_m r_e)} \int_0^h \frac{k_0 g}{\omega^2} \cos \alpha_m z dz \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$+ \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{4 r_w \pi r_e^2 \omega^2}{r A h^2} \frac{1}{\lambda'_m r_e} \frac{K_1(\lambda'_m r_e)}{K_0(\lambda'_m r_e) + K_2(\lambda'_m r_e)} \int_0^h \frac{k_0 g}{\omega^2} \cos \alpha_m z dz \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$- \sum_{m=1}^s \frac{4 r_w \pi r_e^2 \omega^2}{r A h^2} \frac{1}{\lambda'_m r_e} \frac{H_1(\lambda'_m r_e)}{H_0^{(2)}(\lambda'_m r_e) - H_2^{(2)}(\lambda'_m r_e)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^h \eta(k_\mu z) \cos \alpha_m z dz \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$+ \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{4 r_w \pi r_e^2 \omega^2}{r A h^2} \frac{1}{\lambda'_m r_e} \frac{K_1(\lambda'_m r_e)}{K_0(\lambda'_m r_e) + K_2(\lambda'_m r_e)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^h \eta(k_\mu z) \cos \alpha_m z dz \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

.....(11)

ただし、 p_ν : 円柱の空気中における固有円振動数、 A : 断面積、 r : 円柱の単位体積重量、 r_w : 水の単位体積重量
ここで、複素関数である Hankel 関数を Bessel 関数で表示し、かつ、

$$\bar{D}_{\mu\nu} = - \sum_{m=1}^s \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \frac{4}{\lambda'_m r_e} \frac{a_m}{A_m^2 + B_m^2} \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\mu z) \cos \alpha_m z dz \frac{1}{h} \int_0^h \mu(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$+ \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \frac{4}{\lambda'_m r_e} \frac{K_1(\lambda'_m r_e)}{K_0(\lambda'_m r_e) + K_2(\lambda'_m r_e)} \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\mu z) \cos \alpha_m z dz \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$\bar{\psi}_\nu = \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) dz - \sum_{m=1}^s \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \frac{4}{\lambda'_m r_e} \frac{a_m}{A_m^2 + B_m^2} \frac{1}{h} \int_0^h \cos \alpha_m z dz \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$+ \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \frac{4}{\lambda'_m r_e} \frac{K_1(\lambda'_m r_e)}{K_0(\lambda'_m r_e) + K_2(\lambda'_m r_e)} \frac{1}{h} \int_0^h \cos \alpha_m z dz \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = - \sum_{m=1}^s \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \frac{1}{\lambda'_m r_e} \frac{b_m}{A_m^2 + B_m^2} \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\mu z) \cos \alpha_m z dz \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$\tilde{\psi}_\nu = - \sum_{m=1}^s \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \frac{1}{\lambda'_m r_e} \frac{b_m}{A_m^2 + B_m^2} \frac{1}{h} \int_0^h \cos \alpha_m z dz \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

の諸式で表わされる無次元量を導入すると、式 (11) は結局つぎのように書き改められる。

$$\left(\frac{p_\nu^2}{\omega^2} - 1 \right) A_\nu - \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \bar{D}_{\mu\nu} - i \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \tilde{D}_{\mu\nu} = \frac{k_0 g}{\omega^2} (\bar{\psi}_\nu + i \tilde{\psi}_\nu) \quad \text{.....(12)}$$

式 (12) は解の一般的表示であって、水深 h と円振動数との関係から常に $\omega^2/c^2 - \alpha_m^2 < 0$ なる不等式が成立する場合に次式のようになる。

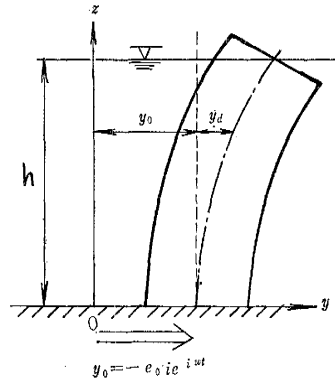
$$\left(\frac{p_\nu^2}{\omega^2} - 1 \right) A_\nu = \frac{k_0 g}{\omega^2} \psi_\nu + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{D}_{\mu\nu} A_\mu \quad \text{.....(13)}$$

ここに、

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \sum_{m=1}^s \frac{4}{\lambda'_m r_e} \frac{K_1(\lambda'_m r_e)}{K_0(\lambda'_m r_e) + K_2(\lambda'_m r_e)} \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\mu z) \cos \alpha_m z dz \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

$$\psi_\nu = \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) dz + \frac{r_w \pi r_e^2}{r A} \sum_{m=1}^s \frac{(-1)^{m-1}}{\alpha_m h} \frac{4}{\lambda'_m r_e} \frac{K_1(\lambda'_m r_e)}{K_0(\lambda'_m r_e) + K_2(\lambda'_m r_e)} \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_\nu z) \cos \alpha_m z dz$$

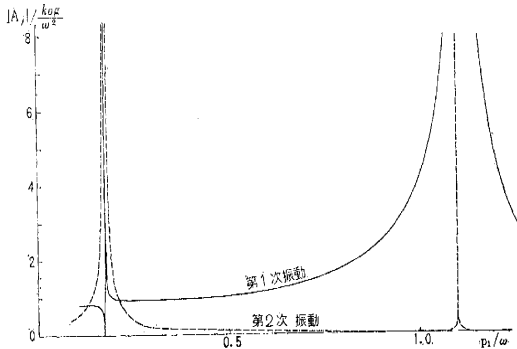
図-4



*標 $y_d \cdot z$ に変換したのち、上の式 (9), (10) をこれに代入すると、正規関数の直交性を利用してつぎの結果をうる。

式(12), (13)はいずれも A_n に関する連立方程式であるから、各規準振動形は独立して現われず、同時にすべての規準振動形が惹起されることになる。しかしながら A_n は固有円振動数 p_n に対応する規準振動の未定係数であるから、次数が高くなれば共振点以外では、その値はきわめて小さくなるのが推察される。したがって物理的には μ, ν の値は適当な自然数 f までとれば十分であるが、実際には f の値をどれだけにすればよいか問題となる。一例として特定寸法の円柱状橋脚(高さ 30 m, 直径 12 m) について $f=2$ とした場合の連成の状態を示したのが 図-5 である。一般に橋脚のよう

図-5 $h=30$ m, $r_e=6$ m の橋脚の共振曲線



な構造はつり橋タワーや高いアーチダム、高層ビルなどに比較するとその固有周期は小さい。せん断振動が支配的と考えられる橋脚の第2次の共振周期は高さが 60 m であっても約 0.05 sec 程度であり、また $r_e/h=0.1$ という曲げ振動をする細長い橋脚でもその高さ h が 50 m 程度では約 0.1 sec である。実際に来襲する地震動の周期を勘案すると、このような橋脚の第2次の振動形が卓越する共振が起こるのはきわめて特殊な条件下であるといえる。したがって高さが 30 m 程度以下の橋脚を考えるにあたっては $f=1$ として十分であり、特にたわみややすい構造物については $f=2\sim3$ の値をとればよかる。

(2) 水中での共振周期および仮想質量

動水圧式(9)の第1項は $\omega^2/c^2 - \alpha_m^2 > 0$ の成立するときのみ現われる項であるが、これは式(6)と同様に円柱の運動とは異なった位相をもつ。したがって式(12)からも明らかなように、この場合にはたわみが無限大となるような共振点は存在しない。すなわち、この場合には動水圧が一種の減衰効果を有し、その変形は有限値にとどまる。

一方、式(13)ではこのような意味での減衰効果は存在せず、未定係数 A_n を無限大ならしめる ω が存在する。この ω の値を求めるのは一般座標の数を有限値 f にとった場合には f 次の行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{p_1^2}{\omega^2} - 1 - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1f} \\ -\alpha_{21} & \frac{p_2^2}{\omega^2} - 1 - \alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{f1} & -\alpha_{f2} & \dots & \frac{p_f^2}{\omega^2} - 1 - \alpha_{ff} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

を解けばよい。上の行列式の主項は他の組成要素に比較して大なる値であり(特に高次においていちじるしい)、その解を ω_r とすれば近似的には次式で与えられる。

$$\omega_r = \frac{p_j}{\sqrt{1 + \alpha_{jj}}} \quad (j=1, 2, \dots, f) \quad \dots\dots\dots (15)$$

p_j は空気中片持ばりの固有円振動数であるので、曲げ振動の場合について考えれば次式で示される。

$$\omega_r = \sqrt{\frac{gEI k_j^4}{r A (1 + \alpha_{jj})}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

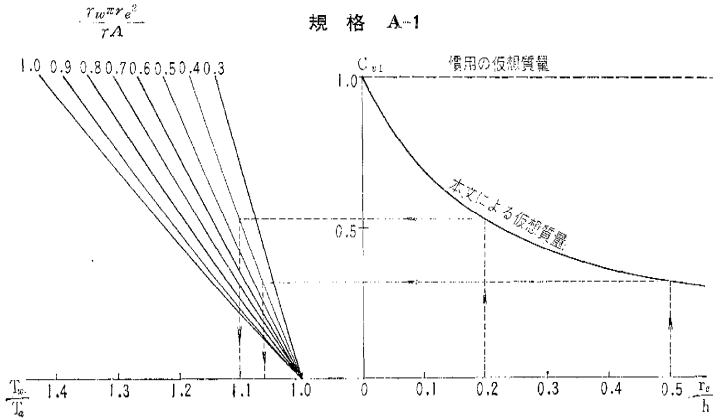
ここに、 E : 弾性係数、 I : 断面二次モーメント
すなわち、共振現象に関しては円柱の質量が $r A \alpha_{jj}/g$ だけ増大した円柱が空気中にある場合と同一になる。この質量 $r A \alpha_{jj}/g$ が弾性変形を考慮した場合の仮想質量であって、前節のたわまない円柱に作用する動水圧を質量に変換したものと別個のものである。また後者は鉛直方向に分布状態が異なるが、前者の弾性変形を考慮した仮想質量は鉛直方向に一様な値である。また式(15), (16)の示すように規準振動の次数によって仮想質量の値は異なる。すなわち、一定の仮想質量によってすべての規準振動に対応する共振周期の増大率が一般的には決定されない。高次の共振周期を論ずるにあたっては、その規準振動に対応した仮想質量を用いねばならないといはうまでもない。

つぎに仮想質量 $r A \alpha_{jj}/g$ をその排除した水の質量 $r_w \pi r_e^2/g$ で除した値を仮想質量係数 C_{vj} と替けば、これは次式で与えられる。

$$C_{vj} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda' m r_e} \frac{K_1(\lambda' m r_e)}{K_0(\lambda' m r_e) + K_2(\lambda' m r_e)} \times \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \eta(k_j z) \cos \alpha_m z dz \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

したがって、ここで問題としている規準振動形 $\eta(k_j z)$ に対して C_{vj} の値を式(17)より求め、これにその排除した水の質量 $r_w \pi r_e^2/g$ を乗ずれば単位長さあたりの仮想質量が計算される。式(17)の C_{vj} は h, r_e, ω の関数であり、水中での固有周期を求めるには ω に関して試算法により計算しなければならないが、水の圧縮性の影響を無視しうる場合には r_e/h のみの関数となる。かかる場合には C_{vj} は r_e/h に関して減少関数となり、 $r_e/h \rightarrow 0$ に対する極限値は1である。すなわち構造物の変形を考えない二次元解析における仮想質量は、ここに得た解において水深を無限大とした場合に相当することを示している。かかる関係を示したのが 図-6 の右半である。

図 6 r_e/h と空気中固有周期 T_a に対する水中共振周期 T_w の比との関係



また、水中での共振周期 T_w は空気中での固有周期 T_a との間につきの関係が成立する。

$$\frac{T_w}{T_a} = \sqrt{1 + C_{vj}} \dots\dots\dots(18)$$

第一次の振動形に対するこの関係を示した曲線が 図-6 の左半である。この図中に現われる量はすべて無次元量であり、その大部分が水中に没しており、かつ曲げ振動をすと考えられるような片持ばり形式の円柱状橋脚に対しては常に適用できる結果である。すなわち、この図より高さに対する半径の比 r_e/h 、単位長さあたりの自重に対するその排除した水の単位長さあたりの重量の比 $r_w \pi r_e^2 / r A$ とを知られば、固有周期に対する水中での共振周期の増大率をただちに求める。図中に示した点線は高さ 30m、直径 12m のコンクリート製円柱状橋脚についての例である。この例では水中での共振周期は固有周期の約 10% 増しであることを示している。

また、 $C_{vj}=1.0$ を通る水平な破線は二次元解析における仮想質量による値であり、一般の橋脚に対しては過大な値を与えることを示している。

(3) 減衰抵抗に関する考察

水中を運動する橋脚に作用する抵抗には下記のようなものが考えられる。

- ① 加速度に比例する抵抗
- ② 水との接触によって生ずる抵抗
- ③ 造渦抵抗および水によるその他の抵抗
- ④ 橋脚の空気中において有する減衰抵抗

① の加速度に比例する抵抗は動水圧として評価される抵抗であり、これについての解析は本文中においてすでに行なわれた。つぎの ② の抵抗は橋脚に沿っての水流が生じるために現われる抵抗であり、水と橋脚との相対速度に比例的であろうと考えられる。また、水中を一定速度で運動する物体には速度の 2 乗に比例した抵抗が作用するといわれるが、地震動を受けて運動する橋脚のような場合には速度は一定ではないので、速度の 1~2 乗

に比例した抵抗を受けるものと考えられ、これが ③ の抵抗である。さらに空気中にある構造物では、遊隙や他の物体との機械的摩擦などがなく、線形範囲では粘性減衰が支配的であるとされており、これは水中においてもその本質が変化するとは考えられず、これが ④ の抵抗である。

いま上記の各抵抗の大小を比較するために、便宜上剛な橋脚が水中を単振動する場合について考える。②および④の抵抗を速度に比例するものとして、この比例定数を一括して c^* で表わす。また、③の抵抗を速度の 2 乗に比例するものとするれば、この比例定数 c^{**} は抗力係数を C_D とするとき、

$$c^{**} = \frac{C_D r_w r_e}{g} \dots\dots\dots(19)$$

と表わせる。一方、①の加速度に比例する抵抗 P_y は近似的にはつぎのような簡単な式で表わしてもよからう。

$$P_y = -\frac{r AM'}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} [M': \text{仮想質量係数}] \dots\dots\dots(20)$$

これらの各抵抗が働いている物体の運動を表現する微分方程式は非線形になるが、微小時間内では調和振動をするものと仮定し、その振動振幅を Y として速度の 2 乗に比例する抵抗、速度に比例する抵抗、加速度に比例する抵抗が 1/4 周期間になす仕事をそれぞれ計算するとつぎようになる。

$$J(\dot{y}^2) = \int_0^{T/4} c^{**} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial t} dt = \frac{2 C_D r_e r_w Y^3 \omega^3}{3 g} \dots\dots\dots(21)$$

$$J(\dot{y}) = \int_0^{T/4} c^* \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} dt = \frac{\pi c^* Y^2 \omega}{4} \dots\dots\dots(22)$$

$$J(\ddot{y}) = \int_0^{T/4} \frac{r AM'}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial t} dt = \frac{r AM' Y^2 \omega^2}{2 g} \dots\dots\dots(23)$$

ここで $J(\ddot{y})$ に対する $J(\dot{y}^2)$ の比をとると

$$\frac{J(\dot{y}^2)}{J(\ddot{y})} = \frac{4}{3} \frac{C_D}{\pi M'} \frac{r_w}{r} \frac{Y}{r_e} \dots\dots\dots(24)$$

となる。 C_D は Reynolds 数が $10^2 \sim 10^5$ 程度では 2~1 の値をとり、 M' は近似的には r_w/r に近い値となるから上の比の値は $Y/2 r_e$ 程度になる。しかるに Y は振動振幅を、 $2 r_e$ は橋脚の直径を表わすから、 $Y/2 r_e$ の値は $10^{-2} \sim 10^{-4}$ 程度の非常に小さな値になる。

つぎに $J(\ddot{y})$ に対する $J(\dot{y})$ の比は

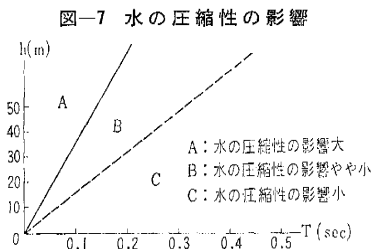
$$\frac{J(\dot{y})}{J(\ddot{y})} = \frac{\pi}{M'} \frac{\omega^*}{\omega} \left[\omega^* = \frac{g c^*}{2 r A} \right] \dots\dots\dots(25)$$

となる。この比の値は $10^{-1} \sim 10^{-2}$ 程度であり、さきの $J(\dot{y})/J(\dot{y}^2)$ と比較すると $10 \sim 10^2$ 倍の値である。すな

わち、水中で振動する橋脚に働く抵抗は加速度に比例した、いわゆる動水圧によるものが最も大であり、速度の2乗に比例する抗力はこれに比較するときわめて小さなものと考えられる。速度に比例する抵抗は両者の中間に位置するが、橋脚自身のもつ減衰係数ならびに水との接触による抵抗の定量的表現が困難であるので、これを解析的に究明することは容易でない。

(4) 水の圧縮性の影響に関する考察

水は圧縮性を有するから、ある条件の下では水中を運動する物体にもその影響がおよぶであろうことが推察される。水の圧縮性の影響は式(5)、(6)中の λ_m, λ'_m において評価される。すなわち $\omega^2/c^2 < \alpha_m^2$ の場合には λ_m が存在せず、式(5)、(6)の第1項が消滅するから、上の不等式が一つの規準を与えることになる。かくして上の不等式の成立する範囲は図-7のB、Cの領域である。



h は橋脚の高さ (=水深) であり、周期 $T=2\pi/\omega$ である。一方、A の領域では $\omega^2/c^2 > \alpha_m^2$ が成立するから、この場合には動水圧は式(6)にみるように地動と位相を異にすることを示している。式(6)で示される動水圧は λ_m, λ'_m の関数でもあるが、水の圧縮性を考えない場合には λ_m は存在せず、 $\lambda'_m \rightarrow \alpha_m$ となるから λ'_m/α_m が水の圧縮性の λ'_m に与える影響を示す一つの指標となる。図-7のCの領域は $\lambda'_m/\alpha_m > 0.9$ の範囲を示しており、水の圧縮性の影響を受ける度合いが小さな場合と考えてよい。動水圧に与える影響は、 $T=0.2$ sec, $h=30$ m では3~4%程度であるので、Cの領域では水の圧縮性の影響は非常に小さなものと考えてよい。

3. 模型振動実験

水中にある円柱状橋脚の振動性状についての理論解析結果を、模型振動実験によって検討吟味した。この実験に使用した模型橋脚は、メタアクリル酸樹脂製の3個の円筒と1個の円柱であって、それらの寸法は下記のとおりである。

- 模型 I : 外径 76 mm, 内径 70 mm, 筒長 1 000 mm
- 模型 II : 外径 45 mm, 内径 40 mm, 筒長 1 000 mm
- 模型 III : 外径 35 mm, 内径 30 mm, 筒長 1 000 mm
- 模型 IV : 直径 200 mm, 高さ 200 mm

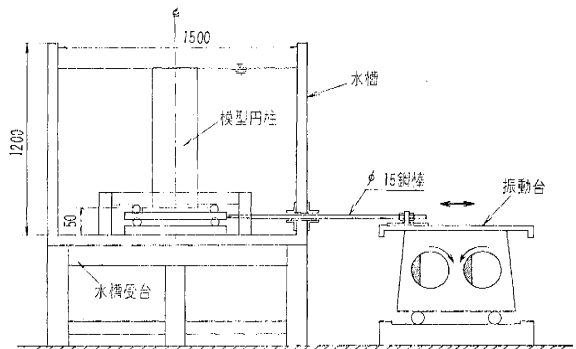
この模型に使用された材料の特性はつぎのようになっている。

単位体積重量 : 1.20 gr/cm³

弾性係数 : 2.8×10^4 kg/cm² (10°C)

模型 I, II, III にはその内面に電気抵抗線ひずみ計を接着し、模型 IV にはその外面に 2 mm 深さの溝を掘り、電気抵抗線ひずみ計を接着したのち断面形状を乱さぬように表面仕上げをした。これらの模型は図-8によるように、幅 100 cm, 奥行 150 cm, 高さ 120 cm の水槽内に設けられた振動版にその下端を固定した。この振動版は理論解析の場合と対応させて、模型底部では水平一方向のみの変位を許し、左右動・動揺・上下動などを与えないような装置とした。かくして得られた 1 自由度の模型装置を、図-8 のように松平式振動試験機の振動台

図-8 模型および振動台の配置の側面図 (単位 mm)



に固定され、かつ水槽正面を貫通する水平シャフトにより、加振する方法をとった。また模型下端での強制振幅および変位計はいずれも動ひずみ測定装置を用いて電磁オシログラフに記録させた。

a) 自由振動 空気中および水中における模型頂部に初期変位を与えることによって生ずる自由振動の記録から、それぞれの固有周期を測定した。かくして得られた各模型についての測定周期と理論計算周期とを比較対照したのが表-1である。空気中における固有周期の理論値は片持ばりの曲げ振動に関する周知の計算式によるものであり、水中での共振周期は本論文での解析結果にもとづいたもので、これを水中での共振周期と対応させた。

つぎに模型 I の空気中および水中での自由振動記録から、横軸に振動回数、縦軸に振幅をとって図示したのが

表-1 共振周期についての理論値と実験値の比較

模型	測定値	固有周期 (sec)	水中での共振周期 (sec)	固有周期に対する水中での共振周期比	理論値と実験値の差 (%)
		実験値	理論値		
模型 I φ 76 mm	実験値	0.05	0.12	2.40	0.5
	理論値	0.047	0.112	2.41	
模型 II φ 45 mm	実験値	0.09	0.155	1.85	7.5
	理論値	0.080	0.160	2.00	
模型 III φ 35 mm	実験値	0.10	0.182	1.82	5.2
	理論値	0.095	0.182	1.92	

図-9 自由振動における振動回数と振幅の関係

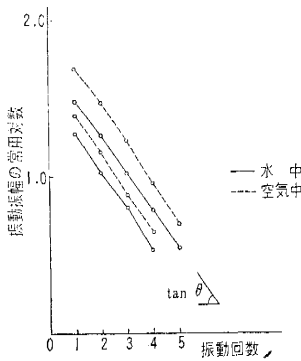


図-10 模型 I の水中での実験・理論の共振曲線

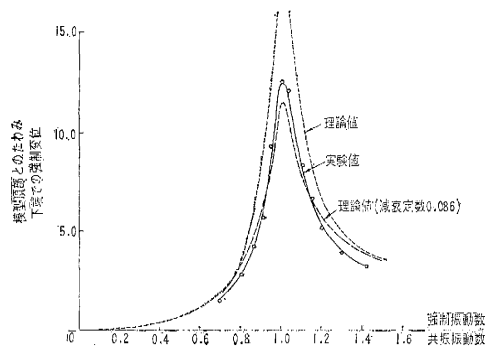


図-11 ひずみ分布についての理論値と実験値の比較

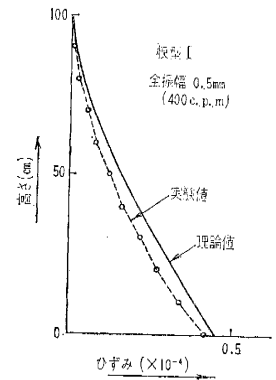


図-9 である。この図にみるように、振動回数と振幅との関係が半対数紙上ではほぼ直線となることから、この模型に関しては速度に比例的な減衰が支配的であることが推察される。さらに、この直線の勾配が、空気中と水中とではほとんど差異の認められないことは注目値する。このことは水中橋脚における減衰定数が空中橋脚のそれとほとんど同一であろうことを裏づけており、耐震設計上さらに究明されねばならない。

b) 強制振動 模型 I ~ IV を強制振動させ、その定常振幅を測定した。図-10 は一例として模型 I の頂部の振動たわみを測定して、本文による理論計算値と比較したものである。同図中の減衰定数 0.086 は自由振動記録から求めた測定値であり、この値を用いた一次振動の共振曲線の計算値を破線で示しているが、これが実験曲線と比較的によく対応している。

ついで模型 I の鉛直方向の測定ひずみ分布と理論解により計算したひずみ分布とを 図-11 に対比させた。絶対値は理論値がやや大であるが、その分布形状はかなりよく対応している。

さらに、きわめて太短い模型 IV についての鉛直方向のひずみ分布を 図-12 に示した。この模型は $r_e/h=0.5$ であるから動水圧分布も三角形分布に近くなっており、ひずみの絶対値も増大しているにもかかわらず、たわみあるいはひずみ分布の形状は空気中にある場合と大差ない。

これらの実験的な事実は理論解における一般座標における次数 f を実際にはそれほど多くとるの必要がなく、特殊な場合以外は $f=1$ 、すなわち、一次振動のみをとっても實際上十分に

あろうことを裏づけている。いずれにしても、表-1、図-10, 11, 12 などにおける結果は、理論値と実験値とが比較的よく対応していることを示しており、これは本文中における理論的な取り扱いが工学上はほぼ妥当であろうことを立証しているものと解してよからう。

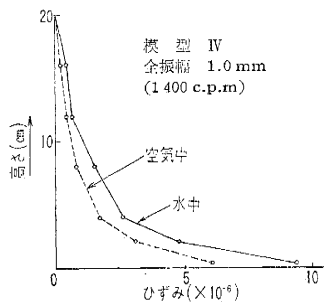
4. 水中橋脚の耐震設計についての考察

(1) 水中橋脚の最も大きな特徴は、空気中にある同一の橋脚よりもその固有周期が長くなることである。橋脚のような構造物では、このように固有周期が増大するのは望ましくないと考えられ、耐震的にはこの固有周期の増大率を小さくすべきであらう。その方策としては 図-6 に示したように太短かくて、かつ、その排除した水の重量に対して橋脚の自重の大なるものが望ましい。橋脚の排除する水の重量は外周で規定され、自重は断面積により決定されるから、中空断面の井筒状橋脚は水の影響を受ける度合が大となり、この点、耐震的には不利な構造といえる。

(2) 従来慣用されている仮想質量の考え方は、本文における理論解析で $h \rightarrow \infty$ とした場合に相当することはすでに指摘したが、これは 図-6 においては $r_e/h=0$ に相当する。同図から明らかのように r_e/h の値が大きくなった場合、すなわち、太短い橋脚の場合には従来の仮想質量の考え方では過大な C_{v1} 値 (式(17)で $j=1$) を与える。したがって仮想質量は断面形状のみで決定されるべきでなく、高さとの関連において考えられねばならない。

これまでの水中橋脚に関する模型実験において、従来の仮想質量の考え方で計算した水中での共振周期が、実験による測定値とよく合致していると報告されているのは、実験に用いられた模型がいずれも細長くて、 r_e/h の値の小さなものが多く、結果的には C_{v1} の値が 1 に近かったためと考えられる。Clough は太短い円筒に対しては仮想質量に修正係数を乗せねばならないという結論を模型実験により得ているが、著者らの研究はこうした現

図-12 水中と空気中における測定ひずみの比較



象の理論的根拠を与えたものと解してよい。

(3) 対象とする橋脚が太短かく、排除する水の重量に対して自重が大であって、その振動特性が空気中にある場合とほとんど変化しないと判明する場合には、慣用震度法による設計も可能であろう。このとき、付加的外力として作用する動水圧は式(6)で与えられ、水の圧縮性を考慮しない場合には図-3に示したようになる。かかる場合には r_{eff} の値のみを知れば、動水圧の大きさやその分布形状をただちに求める。このときには、橋脚の頂部が水面より上位にあっても計算上はさしつかえない。

(4) 地震波には各種の性質の異なった波がふくまれているが、最大の加速度をとまなる主要波の周期を硬い地盤で仮りに 0.1 sec 程度と考えると、これより図-7を参照すると、10~15 m 以下の水深では水の圧縮性の影響はほとんどないことを知る。つぎに軟い地盤で主要波の周期を仮りに 0.5 sec 程度と考えると、50~60 m の水深の場合でも水の圧縮性の影響はきわめて小さなものとなる。一方、周期の短い地震動が来襲する可能性のある岩盤上に、高さが数 10 m の橋脚を建設する場合には、図-7 の A の領域に相当する場合があります。このときには動水圧は水の圧縮性の影響を受ける度合が大となり、その位相がずれる現象も現われることになる。

かくして地震動の周期と水深との関係が図-7の領域 A に入る場合には、ぜひとも水の圧縮性を考慮した解析が必要になるが、その反面、領域 C に入る場合にはその影響は小さなものになるので、これを無視してさしつかえないと考えられる。

5. 結 論

本研究により得られた成果を以下に要約し、さらに今後の課題として残された問題点に言及すればつぎのごとくである。

(1) Westergaard の動水圧式は水中橋脚のように奥行き幅がせまく、ある程度、弾性変形を生じてやすい構造物にそのまま適用するのは不適當である。また橋脚のように細長い構造物に作用する動水圧は、Westergaard の式による値よりも小さな値になり、その傾向は細長いほどいぢるしい。

(2) 水中橋脚ではその周囲に沿っての水の流れが発生するので、奥行き方向を無視大と考えた場合のような動水圧自身の共振という現象は存在しないことがわかった。これは円柱状橋脚についての解析結果であるが、円柱以外の橋脚でも同様な結果が得られるものと推察される。

(3) 水中橋脚の耐震設計において現在用いられている仮想質量は、無限に長い剛体についての値であって、実際の橋脚のように有限の長さの場合にはこの値はさらに小さくなる。また、水深が大になれば水の圧縮性の影

響を受けて、仮想質量は振動数の関数になる。

(4) 水中橋脚は空気中にある同一の橋脚より共振周期が大となるので、耐震的には不利な構造物である場合が多い。水中における共振周期は、3.(2) で記したように仮想質量をその構造物の質量で除した値に 1 を加えた値の平方根に固有周期を乗じた値として与えられる。また共振周期の増大率は橋脚のたわみ形状、質量、幾何学的寸法などで左右され、とくに水深の大なる場合には水の圧縮性の影響も受ける。

(5) 水中橋脚の建設される地点が岩盤または非常に硬い地盤で、周期の小さな地震動を受ける可能性のある場合には、水の圧縮性を考慮した解析が行なわれなければならない。

(6) 減衰抵抗に関しては不明な点が多いが、水の抗力と呼ばれる速度の 2 乗に比例する抵抗は、水のおよぼす動水圧に比較して十分に小さなものとみなしてよさそうである。

(7) 水中橋脚のたわみ形状や断面力分布などは、空気中にある同一橋脚のそれと相似であるとみなして大過ない場合が多い。

この研究は水の質量作用に関して、大きな基本的仮定を設けることなく、理論解析を遂行したものであり、従来の理論式は本文で得た解の特殊な場合として説明できた。しかし、いぜんとして水の減衰作用や動水圧の非定常解などの問題を未解決のまま取り残した。また水中橋脚の断面形状についても楕円形や小判形断面などでは作用する動水圧の算定が困難になり、とくに角柱断面などに対しては実際上理論解析が不可能となるので、これらについては、実験的考察にまたねばならない。これらの未解決の問題についても順次研究を進めていく計画である。

参 考 文 献

- 1) Westergaard, H.M.: Water Pressures on Dams during Earthquakes, Trans. ASCE, Vol. 98, 1933, pp. 418~434.
- 2) 畑野 正: 重力堤堤に作用する地震力の影響(その 3), 土木学会論文集第 5 号, 昭.25, pp. 83~90.
- 3) 小岩清貞: アーチダムに働く地震動動水圧, 土木学会論文集 第 44 号, 昭.32.4, pp. 28~37.
- 4) 岡本舜三・加藤勝行・有野元彦: 水中構造物の模型振動実験, 土木学会 第 17 回年次学術講演会講演概要, 第 1 部, 昭.37.5, pp. 79~80.
- 5) 桜井彰雄: 水中に立てられた柱状構造物の振動, 土木技術, 第 16 卷, 6 号, 昭.36.6, pp. 11~17.
- 6) Clough, R.W.: Effects of Earthquakes on Underwater Structures, Proc. of II W.C.E.E., Vol. 2, 1960, pp. 815~831.
- 7) Werner, Sundquist: On Hydrodynamic Earthquake Effects, Trans. of American Geophysical Union, Oct. 1949.
- 8) Savage, J.L.: Earthquake Investigations for the Pit River Bridge, Civil Engineering, Vol. 9, 1939, p. 470.
- 9) 後藤尚男・土岐憲三: 水中構造物の振動と耐震に関する基礎的研究, 地震工学会国内シンポジウム講演集, 1962, pp. 105~110.

(原稿受付: 1963.7.18)