UDC 624.072.32
624.043.11

変垂曲線アーチの新軸線公式(第2報)

正　員　武　田　英　吉

NEW FORMULA FOR THE AXIAL LINE OF THE TRANSFORMED CATENARY ARCH (Report 2)

Eikichi Takeda, C.E., Member

Synopsis Ordinary transformed catenary arch is subjected to a reduced load whose upper rim is a straight line and lower rim the arch itself. Considering the actual load condition, writer obtained a solution for an arch whose reduced load being represented by a cubic parabola for its upper rim and the lower rim the arch itself. Comparing this arch to the ordinary transformed catenary arch, writer found many points to be studied.

要旨 変垂曲線アーチに対する換算荷重の上縁を水平線にとつたものは広く用いられている。筆者は実際の換算荷重上縁が曲線になる点に着眼してこれを3次抛物線と仮定して解法を試み，この軸線を普通変垂曲線と比較してみた。

目　　次

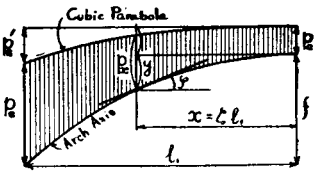
1. まえがき
2. 軸線公式
3. k を決定する図表
4. 特別の場合
5. 軸線表及び軸線図
6. 荷重曲線表及び荷重曲線図
7. あとがき

1. まえがき

名古屋で開かれた第5回年次学術講演会で変垂曲線アーチの新軸線公式（第1報）を発表したのであるが，これは換算荷重曲線の上縁曲線を普通の2次抛物線としたものであつた。本論文はこの曲線を3次抛物線と仮定した場合である。その結果公式は幾分複雑となつたが荷重曲線の異なる場合の一つとして考慮に値するものと考えられる。こうすると換算荷重が等分布荷重になる場合が出てこないのであるがこれは止むを得ないことである。したがつて等分布荷重に近い荷重を受けるときは第1報の公式を使用する方がよいように思う。荷重曲線として如何なるものをとるのがよいかは簡単にいうことはできない。

2. 軸線公式

図—1



図—1 において，　$p_s=mp_c$,　$p_s'=\mu p_s=\mu m p_c$,　$p_c=\dfrac{f}{m+\mu m-1}$ ……(1)

とすれば　$p_x=y+p_c-p_s'\zeta^3=y+p_c-p_c\mu m\zeta^3$ ……(2)

$$\tan\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{S_x}{H},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{H}\frac{dS_x}{dx}=\frac{p_x}{H}=\frac{1}{H}(y+p_c-p_c\mu m\zeta^3)$$

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2}=\frac{l_1^2}{H}(y+p_c-p_c\mu m\zeta^3)=k^2(y+p_c-p_c\mu m\zeta^3) \quad\cdots\cdots(3)$$

ここで　$k^2=\dfrac{l_1^2}{H}$　　これを解いて

$$y=C_1\cosh k\zeta+C_2\sinh k\zeta-p_c+\mu m p_c\zeta^3+\frac{6\mu m p_c}{k^2}\zeta \quad\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{dy}{d\zeta}=C_1k\sinh k\zeta+C_2k\cosh k\zeta+3\mu m p_c\zeta^2+\frac{6\mu m p_c}{k^2} \quad\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{l_1}(C_1k\sinh k\zeta+C_2k\cosh k\zeta+3\mu m p_c\zeta^2+\frac{6\mu m p_c}{k^2} \quad\cdots\cdots(6)$$

境界条件を用いて C_1 及び C_2 をきめれば

$$\zeta=0,\ y=0:\ C_1-p_c=0$$

$$\zeta=1,\ y=f:\ C_1k^2\cosh k+C_2k^2\sinh k-k^2p_c+\mu mk^2p_c+6\mu m p_c=fk^2$$

$$\zeta=0,\ \frac{dy}{dx}=0:\ \frac{1}{l_1}\left(C_2k+\frac{6\mu m p_c}{k^2}\right)=0$$

これから次の関係が得られる。

$$C_1=p_c,\quad C_2=\frac{-6\mu m p_c}{k^3},\qquad \frac{6\mu m}{k^3}=\frac{\cosh k-m}{\sinh k-k} \quad\cdots\cdots(7)$$

したがつて軸線式は　$y=p_c\left\{(\cosh k\zeta-1)+\mu m\zeta^3-\frac{\cosh k-m}{\sinh k-k}(\sinh k\zeta-k\zeta)\right\}$ $\cdots\cdots(8)$

あるいは　$y=\frac{f}{m+\mu m-1}\left\{(\cosh k\zeta-1)+\mu m\zeta^3-\frac{\cosh k-m}{\sinh k-k}(\sinh k\zeta-k\zeta)\right\}$ $\cdots\cdots(9)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f}{(m+\mu m-1)l_1}\left\{k\sinh k\zeta+3\mu m\zeta^2-\frac{k(\cosh k-m)}{\sinh k-k}(\cosh k\zeta-1)\right\} \quad\cdots\cdots(10)$$

$$p_x=p_c\left\{\cosh k\zeta-\frac{\cosh k-m}{\sinh k-k}(\sinh k\zeta-k\zeta)\right\} \quad\cdots\cdots(11)$$

ここで　$\mu=\frac{p_s'}{p_s}=\frac{p_c+f-p_s}{p_s}=\left(\frac{p_c+f}{p_s}\right)-1,\quad k:\ \frac{6\mu m}{k^3}=\frac{\cosh k-m}{\sinh k-k}$　から定める。

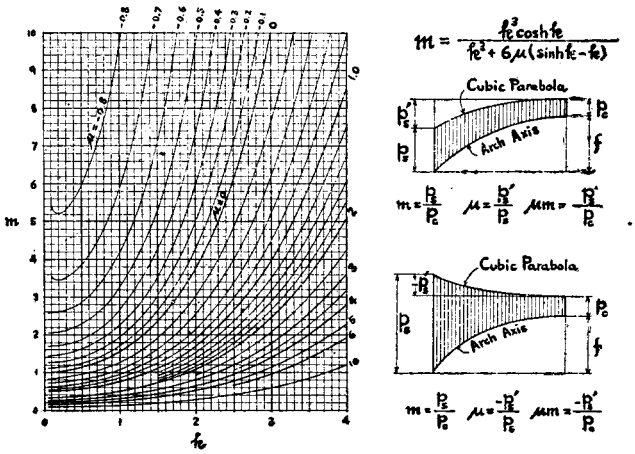
3. k を決定する図表

前節(7)式の関係により μ, m, k の関連を図表で示すことができる。このとき算式としては次のものが便利である。

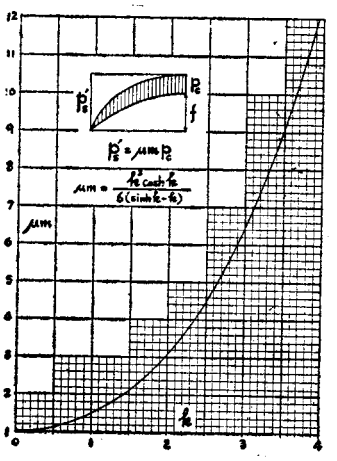
$$m=\frac{k^3\cosh k}{k^3+6\mu(\sinh k-k)}\quad 又は\quad \mu m=\frac{k^3(\cosh k-m)}{6(\sinh k-k)} \quad\cdots\cdots(12)$$

これ等の式により図—2及び図—3($m=0$ の場合)が得られる。図表から得られるのは概略値であるから精密値は上式から求めなければならない。

図—2



図—3



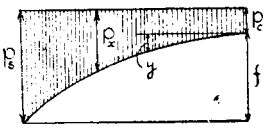
4. 特別の場合

もしも荷重曲線の上縁が水平線となれば変垂曲線の場合となる。このときは図—4に示すようになる。

$$\mu=0\ (p_s'=0)$$

$$\left.\begin{aligned} &m=\cosh k,\quad p_x=p_c\cosh k\zeta \\ &y=\frac{f}{m-1}(\cosh k\zeta-1),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{fk}{(m-1)l_1}\sinh k\zeta \end{aligned}\right\}\text{(変垂曲線)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

図—4

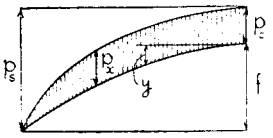


また図—5に示すようにアーチの両端で荷重強度が0となる場合は次のようになる。

$\mu=\infty,\quad m=0,\quad \mu m\neq 0\ (p_s'=p_c+f)$

$$\left.\begin{aligned} &\mu m=\frac{k^3\cosh k}{6(\sinh k-k)}\ (\text{図—2}),\qquad p_x=p_c\left\{\cosh k\zeta-\frac{\cosh k}{\sinh k-k}(\sinh k\zeta-k\zeta)\right. \\ &y=\frac{f}{\mu m-1}\left\{(\cosh k\zeta-1)+\mu m\zeta^3-\frac{\cosh k}{\sinh k-k}(\sinh k\zeta-k\zeta)\right\} \\ &\frac{dy}{dx}=\frac{f}{(\mu m-1)l_1}\left\{k\sinh k\zeta+3\mu m\zeta^2-\frac{k\cosh k}{\sinh k-k}(\cosh k\zeta-1)\right\} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(13)$$

図—5



5. 軸線表及び軸線図

アーチの軸線の縦距 y を以上の公式で計算してその結果を表にしたものが表—1で，これを図示したものが図—6である。図—6には荷重曲線もついでに画き加えた。

ここで $\frac{f}{p_c}=m+\mu m-1=5$ にとつて計算を行つた。

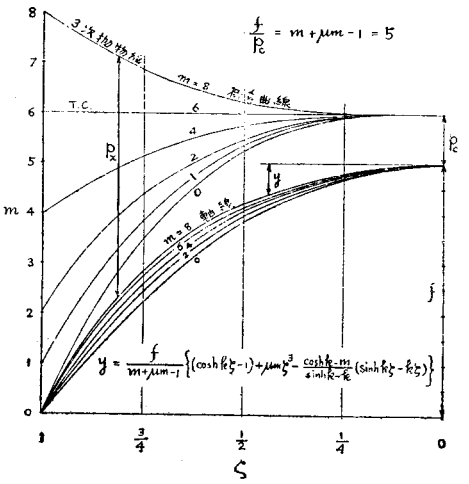
表—1　第2号修正変垂曲線アーチ軸線縦距 $y(f=1)$

m	μ	μm	k	$\zeta=3/4$	$\zeta=1/2$	$\zeta=1/4$	
0	∞	6	2.897	0.5556	0.2326	0.0543	*
			3.340	0.5963	0.2733	0.0694	**
1	5.0	5	2.818	0.5351	0.2207	0.0514	
			—	0.5625	0.2500	0.0625	*
			—	0.5625	0.2500	0.0625	**
2	2.0	4	2.744	0.5166	0.2098	0.0486	
			1.317	0.5291	0.2251	0.0546	*
			2.999	0.5337	0.2299	0.0565	**
4	0.5	2	2.604	0.4841	0.1905	0.0437	
			2.064	0.4858	0.1938	0.0454	*
			2.713	0.4890	0.1978	0.0468	**
6	0	0	2.478	0.4573	0.1742	0.0397	
			2.478	0.4573	0.1742	0.0397	*
			2.478	0.4573	0.1742	0.0397	**
8	-0.25	-2	2.363	0.4340	0.1605	0.0359	
			2.769	0.4361	0.1604	0.0356	*
			2.285	0.4339	0.1570	0.0342	**

* 変垂曲線アーチに対する値

** 第2号修正変垂曲線アーチに対する値

図—6　第2号修正変垂曲線アーチ荷重曲線及び軸線図



6. 荷重曲線表及び荷重曲線図

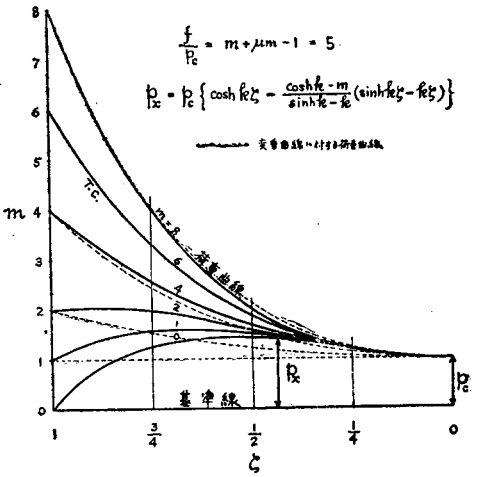
アーチの荷重曲線の縦距 p_x を計算しその結果を表にしたものが表—2で，これを図示したものが図—6及び図—7である。図—7は水平基準線上に p_x をおいたものである。ここで $\frac{f}{p_c}=m+\mu m-1=5$ にとつて計算をした。また比較のために普通の変垂曲線に対するものも画き加えた。

表—2　第2号修正変垂曲線アーチ荷重曲線
縦距 $p_x(p_c=1)$

m	μ	μm	k_c	$\zeta=3/4$	$\zeta=1/2$	$\zeta=1/4$	
0	∞	6	2.897	1.2465	1.4129	1.1776	
			3.340	0.6067	0.8667	0.9719	**
1	5.0	5	2.818	1.5664	1.4784	1.1788	
			—	1.0000	1.0000	1.0000	*
			—	1.0000	1.0000	1.0000	**
2	2.0	4	2.744	1.9707	1.5491	1.1807	
			1.317	1.5291	1.2251	1.0546	*
			2.999	1.4186	1.1493	1.0325	**
4	0.5	2	2.604	2.5767	1.7025	1.1869	
			2.064	2.4574	1.5815	1.1361	*
			2.713	2.3202	1.4890	1.1090	**
6	0	0	2.478	3.2866	1.8709	1.1984	
			2.478	3.2866	1.8709	1.1984	*
			2.478	3.2866	1.8709	1.1984	**
8	-0.25	-2	2.363	4.0135	2.0025	1.2117	
			2.769	3.0263	1.7838	1.1798	*
			2.285	4.2947	2.2848	1.2958	**

* 変垂曲線アーチに対する値
** 第1号修正変垂曲線アーチに対する値

図—7　第2号修正変垂曲線アーチ荷重曲線図



7. あとがき

3次抛物線を荷重曲線とする変垂曲線を第2号修正変垂曲線と名付け，2次抛物線を荷重曲線とするものを第1号修正変垂曲線と名付けることにする。この他にも種々な荷重曲線が考えられるので筆者は引続いていろいろの場合について考慮してみたいと思う。

なお変垂曲線アーチの新軸線公式（第1報）で発表した第1号修正変垂曲線は $f/p_c=m+\mu m-1=6$ にとつたものであつて本論文のものと異つているから注意が必要である。