

UDC 628.163 : 663.631.066.
532.584

沈澄池の淨化効率について

准員合田 健*

ON THE EXCLUDING EFFICIENCY OF SETTLING RESERVOIR

Takeshi Gūda, C.E., Assoc. Member

Synopsis The theoretical basis in establishing the economical and reasonable capacity of settling reservoir are shown by solving the hydrodynamically expressed equation of suspended materials transportation, estimating how those materials in water, flocs and particles, are decreasing at the end of basin while the length, slope, and depth of reservoir, viscosity of water, settling velocities of particles were varied. In this paper, for ordinary rectangular reservoir, assuming that the particles once reached at the bottom are never refloated, we performed a 3-dimensional analysis on the same basis as of the theory of T.R. Camp, America. And so calculated the excluding efficiency of reservoir e , it was cleared that for a given slope and depth e considerably increased with l , the length, but when l became larger than a limit value, e hardly increased.

要旨 本文は矩形沈澄池内の3次元乱流を考え、浮遊泥砂の運動方程式を工学的に合理的な境界条件の下に解いて、沈澄池の浄化効率その他を求め、原水の濁度及び乱れの強さ、フロックの大きさ及び沈降速度、池の水深及び深さ、滞留時間等が浄化効率その他に及ぼす影響を理論的に阐明したものである。実際問題に適用するには、更に考究すべき点もあるが、従来困難とされていた沈澄池の浄化効率向上に対し、有力な指針を与えたものと考えられる。

1. 緒言

混和池で攪拌、混和された水が沈澄池に導かれるので、それに含まれる泥砂などの夾雜物はフロックとして完全な浮遊状態を保つている。これをある一定勾配、一定長の沈澄池内で沈殿させるわけであるが、その浄化効率に対しては原水の濁度及び乱れの強さ、フロックの大きさ及び沈降速度、池の水深及び長さ、滞留時間など種々の要素が影響するはずであつて、これらの関係を数理的に厳密に解明出来れば、従来難問とされていた沈澄池の浄化効率向上に対し有力な指針を得ることと考えられる。

この意味において最近米国の Thomas R. Camp¹⁾ 等は浮遊粒子の運動を水深方向、長さ方向の2次元問題として解析し、滞留時間と沈殿効果との関係を解明する端緒をつかんだ様であるが、問題の取扱いに疑問の点があり、決して満足すべき理論とは云えない。

そこで本論文では矩形沈澄池内の3次元乱流を考え、

1. 池内の水は規則的な乱流であつて、その渦粘性は池内のどこでも一定である。
2. 池内で浮遊している泥砂のフロックは、取扱いの便宜上その粒径を一定とするか、又は数段階にわけて考えることができる。
3. 水は取入口より均等に流れ込み、かつ均等な溢流状態をなして流れ出る。

と云う仮定が近似的に許容されるものとして、池底に一たん到達した泥砂は再び浮き上らないと云う事実と矛盾しない様に、泥砂の運動方程式を解いてみた。その結果矩形沈澄池における浄化効率を明らかにするとともに、それに影響する各要素の関係を具体的に把握することができたが、この方法は 1) 混和池通過後のフロックの状態に自由に適合できること、2) 効率計算式が割合簡単であること、3) 条件に工学的な合理性が与えられること、などの点において沈澄池の浄化効率解明上資するところが少くないと思う。

2. 濁度分布の方程式とその解

一般に渦乱流中で運動する微細粒子の分布に関する基礎方程式で、不要又は微小な項を省略すると次の通りである。

* 京都大学大学院特別研究生、工学部土木工学教室

$$u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

ここで、 ϕ : 水の単位体積中に含まれる微細粒子の質量、即ち濁度、 $[ML^{-3}]$

u_0 : 流水の速度, $[LT^{-1}]$ η : 涡粘性係数, ($10^{-3}m^2/s$ 以下の値である), $[L^2T^{-1}]$

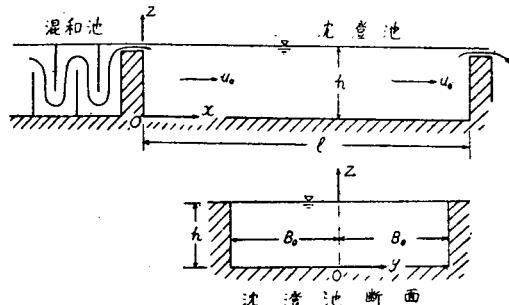
w_0 : 微細粒子の沈降速度で一定とする, [LT⁻¹]

なお原点は沈澱池入口下端中央, z 軸は鉛直上向き, x 軸は流れの方向, y 軸は x 軸に垂直に右向きにとつてある(図-1)。

图-1

境界条件としては、

- 1) 池の中心 $y=0$ にて, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$
 - 2) 側壁 $y=\pm B_0$ にて, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$
 - 3) 水面 $z=h$ にて, $\eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + u_0 \varphi = 0$
 - 4) 池底 $z=0$ にて, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$
 - 5) 入口 $z=0$ にて, $\varphi = \varphi_0(y, z)$



先に述べた「一たん池底に沈殿した泥砂は再び浮き上らない」と云う事実は、条件 4) によつて満足されるはずである。

今 $\eta_1 = \eta/u_0$, $w_1 = w_0/u_0$ とおいて(1)式を変形し, 更に

なる置換を行うと、

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

となり、前述の境界条件は夫々次の様になる。

$$4) \quad z=0, \quad \eta \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{w_0}{c_0} \psi = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (4.4)$$

$$5) \quad z=0, \quad \psi=\psi_0(u,z)=\varphi_0(u,z)e^{zw_0/2n} \quad \dots \quad (1.5)$$

(3) 式において $\psi = X(x)Y(y)Z(z)$ とおけば、 $\frac{1}{x}X'(x)/X(x) = Y''(y)/Y(y) + Z''(z)/Z(z)$

これを解いて、 $\psi \equiv S e^{-\eta/2} k^2 x' (a \cos \alpha x + b \sin \alpha x) \sqrt{n \cos \beta z + a \sin \beta z}$, $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$

積分常数を定めるために、先ず(4.1), (4.2)の条件式を用いると、 $b=0$, $\sigma=n\pi/B$ ($\zeta=\sigma z$, $n=0, 1, 2, \dots$)

$$\therefore \psi = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\eta_1 k^2 x} a_n \cos \alpha_n y (p \cos \beta z + q \sin \beta z) \text{ こゝに, } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \alpha_n y = a_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n y$$

次に (4.3), (4.4) の条件式を入れると, $m \equiv m_0/n$ として,

$$-p\beta \sin \beta h + q\beta \cos \beta h + \frac{w}{2}(p \cos \beta h + q \sin \beta h) = 0, \quad q\beta - \frac{w}{2}p = 0$$

これらから p 及び q に関する 2 次行列式を求めるとき、

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{2} \cos \beta h - \beta \sin \beta h & \frac{w}{2} \sin \beta h + \beta \cos \beta h \\ -\frac{w}{2} & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \tan \beta h = w\beta / (\beta^2 - w^2) \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

この関係を満足する β の値の群を $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \dots$ とするとき、前式から $a = m\beta / 2$ であるから

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_n^2 + \beta_m^2)/2} \cos \alpha_n y (\cos \beta_m z + \frac{w}{2\alpha_n} \sin \beta_m z) S_{m,n}$$

これに条件式(4.5)を入れて $S_{m,n}$ を求めればよいが、

$$\psi_0(y, z) = \psi_{x=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_{m,0}}{2} \left(\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S_{m,n} \cos \alpha_n y \left(\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z \right)$$

であるから、上式の両辺に $\cos \alpha_\lambda y \left(\cos \beta_\mu z + \frac{w}{2\beta_\mu} \sin \beta_\mu z \right)$ をかけて $0 \leq y \leq B_0$, $0 \leq z \leq h$ の範囲で積分し、 Σ が消えればよい。然るに先ず

$$\begin{aligned}
& \int_0^h \int_0^{B_0} \psi_0(y, z) \cos \alpha_\lambda y \left(\cos \beta_\mu z + \frac{w}{2\beta_\mu} \sin \beta_\mu z \right) dy dz \\
&= \int_0^h \int_0^B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{m,o}}{2} \left[\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z \right] \left[\cos \beta_\mu z + \frac{w}{2\beta_\mu} \sin \beta_\mu z \right] \cos \alpha_\lambda y dy dz \\
&\quad + \int_0^h \int_0^B \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S_{m,n} \left[\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z \right] \left[\cos \beta_\mu z + \frac{w}{2\beta_\mu} \sin \beta_\mu z \right] \cos \alpha_n y \cos \alpha_\lambda y dy dz \quad \dots(6)
\end{aligned}$$

ここで上式の右辺第1項が0になることは明らかであるが、第2項の積分は改めて計算しなければならない。

今 $\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \cos \beta_m z = Z_m(z)$, $\cos \beta_\mu z + \frac{w}{2\beta_\mu} \cos \beta_\mu z = Z_\mu(z)$ において、 $\int_0^h Z_m(z)Z_\mu(z)dz$ を計算すると、 $m \neq \mu$ なるときに限つて 0 となるが、以下これを証明し、 $m = \mu$ なるときの積分の値を求めよう。

が成立し、 Z_μ についても同様で、しかも同時に次の様になる。

$$\frac{d^2 Z_m}{dz^2} + \beta_m^2 Z_m = 0, \quad \frac{d^2 Z_\mu}{dz^2} + \beta_\mu^2 Z_\mu = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

(8) の各式に夫々 Z_μ , Z_m を乗じて差引き, 0 から π まで積分すると, (7) 式の関係を利用して

$$-(\beta_\mu^2 - \beta_m^2) \int_0^h Z_\mu Z_m dz = \int_0^h \left(Z_m \frac{d^2 Z_\mu}{dz^2} - Z_\mu \frac{d^2 Z_m}{dz^2} \right) dz \\ = \left[Z_m \frac{dZ_\mu}{dz} - Z_\mu \frac{dZ_m}{dz} \right]_0^h = -\frac{w}{2} [Z_m Z_\mu - Z_\mu Z_m]_{z=h} - \frac{w}{2} [Z_m Z_\mu - Z_\mu Z_m]_{z=0} = 0$$

従つて $\mu \neq m$ のときは明らかに $\int_0^h Z_\mu Z_m dz = 0$ となる。ところが $\mu = m$ なる場合には、(8) 式において、

$$\beta m^2 \int_0^h Z_m^2 dz = - \int_0^h Z_m \frac{d^2 Z_m}{dz^2} dz = - \left[Z_m \frac{dZ_m}{dz} \right]_0^h + \int_0^h \left(\frac{dZ_m}{dz} \right)^2 dz$$

又一方，

$$\therefore \beta_m^2 \int_0^h Z_m^2 dz + \int_0^h \left(\frac{dZ_m}{dz} \right)^2 dz = \left(\beta_m^2 + \frac{w^2}{4} \right) h$$

これと先に求めた関係 $\beta_m^2 \int_0^h Z_m^2 dz - \int_0^h \left(\frac{dZ_m}{dz} \right)^2 dz = - \left[Z_m \frac{dZ_m}{dz} \right]_0^h$ を加えると、

これに(7)式の関係を代入して、

$$2\beta_m^2 \int_0^h Z_m^2 dz = \left(\beta_m^2 + \frac{w^2}{4} \right) h + \frac{w}{2} [Z_m^2]_{z=h} + Z_m^2]_{z=0}$$

ところが(7), (9)式を用いて, $z=0$ 及び $z=h$ にて,

これを(6)式に入れると2重級数の常数 $S_{m,n}$ が次の如く求められる。

$$\int_0^h \int_{-\infty}^{B_0} \psi(y, z) \cos \alpha_\lambda y \left(\cos \beta_\mu z + \frac{w}{2\beta_\mu} \sin \beta_\mu z \right) dy dz = \frac{B_0}{2} \frac{\left(\beta_m^{-2} + \frac{w^2}{4} \right) h + w}{2\beta_m^{-2}} S_{m,n}$$

ここで $\lambda \rightarrow n$, $\mu \rightarrow m$ とかけば,

$$\left. \begin{aligned} S_{m,n} &= \frac{4\beta_m^2}{\left\{(\beta_m^2 + \frac{w^2}{4})h + w\right\}B_0} \int_0^h \int_0^{B_0} \psi_0(y, z) \cos \alpha_n y Z_m(z) dy dz \\ S_{m,0}/2 &= \frac{2\beta_m^2}{\left\{(\beta_m^2 + \frac{w^2}{4})h + w\right\}B_0} \int_0^h \int_0^{B_0} \psi_0(y, z) Z_m(z) dy dz \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

よつて所要の解は、
 $\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{m,0}}{2} e^{-\beta_m^2 \eta_1 x} \left(\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z \right)$
 $+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{m,n} e^{-(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \eta_1 x} \cos \alpha_n y \left(\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z \right) \quad (13)$

こゝに $S_{m,n}$, $S_{m,0}/2$, α_n , β_m , η_1 等は前出の通りである。

斯くして境界条件 1)~5) を満足する $\psi(x, y, z)$ は次の如くなる。

$$\begin{aligned} \psi &= \psi e^{-xw_0^2/(4\eta_1)} e^{-zw_0/(2\eta_1)} = \psi e^{-xw_0^2/(4\eta_1 w_0)} e^{-zw_0/(2\eta_1)} = \psi e^{-x\eta_1 w_0^2/4} e^{-zw/2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{m,0}}{2} e^{-(\beta_m^2 + w^2/4)\eta_1 x} Z_m(z) e^{-zw/2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{m,n} e^{-(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + w^2/4)\eta_1 x} \cos \alpha_n y Z_m(z) e^{-zw/2} \end{aligned} \quad (14)$$

こゝに, $w=w_0/\eta$, $\eta_1=\eta/\eta_0$ にして, $\alpha_n=n\pi/B_0$, ($n=1, 2, \dots$), β_m は(5)式を満足する β の値の絶対値の小なるものから順に $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, とし, 又 $Z_m(z)=\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z$; $S_{m,n}$ 及び $S_{m,0}/2$ は(12)式で与えられる。

3. 沈澱量と淨化効率について

原水は混和池を経て沈澱池に入り, 均一に一定流速 u_0 で流下しながら順次フロックを池底に沈積してゆくとした場合, 途中の濁度変化は(14)式の2重級数を計算すれば得られる。この式によれば x 及び z の増加にともなつて, 最初の濁度 φ_0 が次第に減じていゆることがわかるが, 実際の計算に際しては, 任意の $\varphi_0(y, z)$ に対してこの2重級数が如何に収斂するかを予め検討しておくことが必要である。

問題を簡単にするために, 混和池における混和攪拌が均一に行きわたつたものとすれば, 流入断面 $x=0$ における濁度の分布を一定と考え, $\varphi_0(y, z)=\text{const.}$ とすることができる。この場合は(12)式より

$$\left. \begin{aligned} S_{m,0} &= \frac{2\beta_m^2}{\left\{(\beta_m^2 + \frac{w^2}{4})h + w\right\}B_0} \int_0^h \int_0^{B_0} \varphi_0 e^{-zw/2} Z_m(z) dy dz = \frac{2\beta_m \varphi_0 e^{hw/2}}{\left\{(\beta_m^2 + \frac{w^2}{4})h + w\right\}} \sin \beta_m h \\ S_{m,n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となるから, (14)式は次の如く簡単になる。

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\beta_m \varphi_0 e^{hw/2}}{\left\{(\beta_m^2 + w^2/4)h + w\right\}} e^{-(\beta_m^2 + w^2/4)x\eta/u_0} Z_m(z) e^{-zw/2} \sin \beta_m h \quad (16)$$

これから任意の x 断面単位長当りの濁度総量 I を求めると,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^h \int_0^{B_0} \varphi dy dz = B_0 \sum_{m=1}^{\infty} S_{m,0} e^{-(\beta_m^2 + w^2/4)x\eta/u_0} \int_0^h e^{-zw/2} \left(\cos \beta_m z + \frac{w}{2\beta_m} \sin \beta_m z \right) dz \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4wB_0\beta_m \varphi_0 e^{hw/2} \sin \beta_m h}{(\beta_m^2 + w^2/4)(\beta_m^2 + w^2/4)h + w} e^{-(\beta_m^2 + w^2/4)x\eta/u_0} \end{aligned} \quad (17)$$

上式で $x=l$ において得られる $I_{x=l}$ は, 最終断面で残存している濁度総量であつて, この沈澱池から次の沈澱池又は配水設備へ $I_{x=l}$ だけの濁りが常に浮游状態のまゝ運びこまれることを示している。初めの流入断面の濁度総量 $2 \int_0^h \int_0^{B_0} \varphi_0 dy dz = 2\varphi_0 h B_0$ と $I_{x=l}$ との比を百分率で表わした

$$G = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2w\beta_m e^{hw/2} \sin \beta_m h}{(\beta_m^2 + w^2/4)(\beta_m^2 + w^2/4)h + w} e^{-(\beta_m^2 + w^2/4)l\eta/u_0} \times 100 \quad (18)$$

は, 初期濁度に対する残留濁度の割合(%)を表わすことになる。ところで我々が求めようとする沈澱池の淨化効率といふものは, 最終断面で始めの何%が沈澱除去されたかを示せばよいから, 結局所要の淨化効率 $E(%)$ は,

$$E = 100 - G \quad (19)$$

となる。従つて沈澱池の長さ, 深さや池内の流水の速度, 渦粘性並びにフロックの沈降速度などが淨化効率に与える影響は, (19)式従つて(18)式の簡単な1重級数を計算することによつて, 嚴密に計算することができるようになつた。

なお, 長さ l なる沈澱池を速度 u_0 を以て流下する際の総沈澱量 M を求めると, 次の様になる。

図-2,3 は(18)及び(19)式に示す残留濁度及び浄化効率 E についての若干の計算例を示したものである。こゝでは $h=2.0\text{ m}$ とし、 η は普通の開水路乱流の場合のそれより小さく $10^{-3}(\text{m}^2/\text{s})$ 程度にとつており、フロックの径はかなり小さいもの（径 0.1 mm 以下）まで含めてある。図-2はフロックの沈降速度 w_0 と η の比 $w=w_0/\eta$ を横軸にとって、 l_η/u_0 の変化に応じた G -曲線をかいたものであるが、平均流速 u_0 が大きくなれば当然渦粘性 η も大きくなるはずであるから、 l_η/u_0 の変化は η 及び u_0 を一定にしておいて池の長さ l をかえたと考えても大した誤りがない。この計算例に示す $l_\eta/u_0=0.05\sim 0.5\text{ m}^2$ は、 $u_0=0.5\text{ m/s}$ で $l=25\sim 250\text{ m}$ の見当とみてよい。図の如く G -曲線は大体誤差函数に似た形となり、破線で示したところは、池長約 75 m で $w_0=1.0\text{ cm/s}$ 程度のフロックは約 30% 近く残留することを示している。

図-3は b_0/u_0 を横軸にとつてかいた効率Eの曲線であつて、 $w=1.0\text{ m}^{-1}$ ($\therefore u_0=0.1\text{ cm/s}$)の如き微粒子に対しては、殆ど沈澱の効果がないことがわかる。実際の沈澱池では $w=5.0\sim 20.0\text{ m}^{-1}$ のフロックが主なる対象として論ぜられることになるが、これらに対するE-曲線は、 $b_0/u_0 \approx 0.25\text{ m}^2$ を境として、これ以上この値従つて池の長さを大にしても曲線はあまり上昇しない、即ち浄化効率があまりよくならないことがわかる。 η/u_0 を一定と考えると、 $b \approx 120\text{ m}$ あたりが実際上適当な限度と考えよいわけである。

なお、水深の影響や沈澄池への流入方法及びそれからの流出方法の影響などについても、検討すべき点が少くないが、これらは改めて詳しく考察したい。

4. 結語

以上の計算は濁度の3次元的な分布函数から新たに導いた浄化効率の式その他が、1.に述べたような利点を有することを示し、計算例によつて割合簡単に結果が出てくることを実証しているが、この場合級数は10項内外をとれば予期の精度は充分期待できる。ただ式を簡単にするために、池内の流速を一定としているなど今少し不備の点があつて、沈澱池効率の実際的な問題にそのまま適用するわけには行かないが、2,3の注目すべき結果ができるより効率究明上こうした理論が更に発展適用されることにかなり希望をもつてゐる。さきに種々の形状をもつた池内の流れを2次元ボテンシャル流として研究した成果⁽²⁾と本論文及びその今後の発展とを合わせて、沈澱池問題に対し相当まとまつた結論が近く得られるように思つてゐる。

本論文は文部省科学研究費による「沈砂池及び沈澄池の流体力学的研究」の成果の1部であり、特別の御指導を賜つた京大教授石原博士に深謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- (1) Thomas R. Camp: "Sedimentation and the Design of Settling Tanks" Proc. of A. S. C. E., March, 1945.

(2) 合田健: "沈砂池問題に対する等角写像の 2,3 の応用に就て", 土木学会誌 33 卷 1 号, 昭和 23 年 3 月
 合田健: "矩形沈砂池の隅角部に曲線を入れた場合の影響について", 土木学会論文集第 4 号, 昭和 24 年 4 月

图-2 残留濁度 G(%)

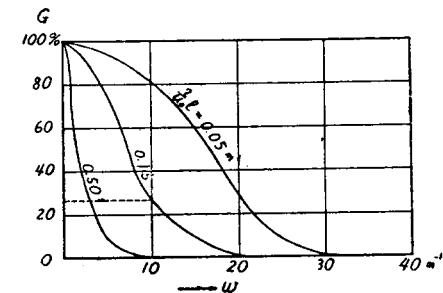


図-3 淨化効率 $E(\%)$

