

強度の場合は如何にすべきか、と云う如き重大な且つ困難な問題が残っている。従来はこれらは単に視察並びに小試験片により評価された程度であつて、工学的な尺度によつて適確に判断される為には岩盤に対する力学的研究並びに現地に於ける測定の技術が大いに進歩しなければならない。これ等の問題が解決される様になつて始めてダムの滑動の問題が全般的に解き得られる様になるのである。

附記 本文に述べた実験の実施にあたつて非常な労苦を惜しまれなかつた早稲田大学々生堀川、遠山の両君及び当研究所の若木君に対し厚く謝意を表するものである。

UDC 624.075.4

## 多径間連続板の挫屈荷重の計算法

正員 工学博士 倉 田 宗 章\*

# A METHOD OF DETERMINATION OF THE CRITICAL LOADS OF THE CONTINUOUS RECTANGULAR PLATES WITH MULTIPLE SPANS

*Dr. Eng., Muneaki Kurata, C.E., Member*

**Synopsis** The problems of elastic stability of the continuous columns with multiple equal spans have been conveniently solved by means of "Differenzengleichung".

In this paper, the author shows that the buckling problems of the continuous rectangular plates simply supported along the two opposite sides parallel to the direction of the multiple spans are solved in the same manner, moreover he derives the calculation formulae in the cases of various end conditions and illustrates those with numerical examples.

Finally, some considerations are delivered for practical applications.

**要旨** 等間隔多径間連続長柱の軸圧力に依る挫屈の問題は Differenzengleichung に依り簡易に解決されている。同様な方法が径間方向の相対 2 辺が単純に支承された連続板に対しても適用される事を示し、種々の端辺条件に対する計算公式並びにそれが数値計算例を挙げ併せて実際の応用に対する二、三の所見を述べたものである。

## 目 次

卷二

1. 基礎階差方程式 2. 端辺条件式 3. 挫屈条件式 4. 計算例

## 序 言

等間隔多径間連続柱の挫屈荷重は Fr.Bleich に依つて所謂 3 連モーメントの公式を用いて Differenzen-gleichung として解く事に依り簡易に求められた。著者は上記連続柱を径間方向の相対 2 辺が単純支承された連続板とした場合に対しても同様な取扱の可能なる事を示そうと思う。尙本文中、随所に省略せる演算は著者の旧著(建設工学、第 2 号、p.27)を参照する事により容易に判明し得る部分である。

## 1. 基礎階差方程式

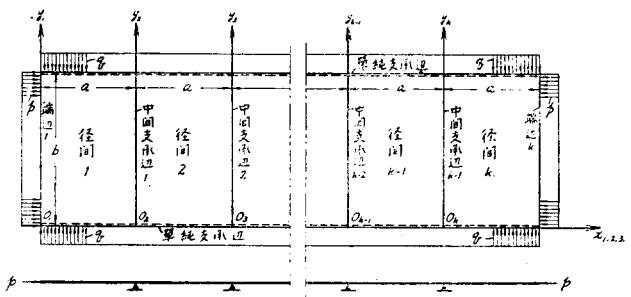
所題の連続板並びに座標系は図-1の如くであるとする。第  $r$  番目の径間部分につき中立面内の周辺直圧力を受ける板の微分方程式は  $w_r$  を撓度とすれば

但し  $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  : Laplace のオペレーター,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  : 板の曲げ剛度

$E$ : young 率,       $h$ : 板厚,       $\nu$ : poisson 比

\* 北海道大学教授、工学部土木工学科教室

図-1



さて  $x$  方向の相対 2 辺が単純に支承され、 $y$  方向に  $m-1$  個の節線を持つ如き撓屈曲形に対応する (1) 式の解は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} w_r = & \{ K_r \cosh \pi \lambda_1 \xi_r \\ & + L_r \sinh \pi \lambda_1 \xi_r \\ & + M_r \cosh \pi \lambda_2 \xi_r \\ & + N_r \sinh \pi \lambda_2 \xi_r \} \\ & \sin m \pi \eta_r \quad \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

但し  $K_r, L_r, M_r, N_r$   
は積分常数

$$\xi_r = \frac{x_r}{a}, \quad \eta_r = \frac{y_r}{b},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} = \frac{a}{b} \sqrt{\left\{ m^2 - \frac{P}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right\}} \pm \sqrt{\left\{ m^2 - \frac{P}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right\}^2 - (m^2 - Q)m^2}$$

$$P = \frac{pa^2}{D\pi^2}, \quad Q = \frac{qb^2}{D\pi^2} \quad (\text{無名数})$$

さて第  $r-1$  番目の中間支承辺に於いては次の諸条件が満たされねばならない。即ち

撓度は 0 である:

$$\begin{cases} |w_{r-1}| = 0, \\ \xi_{r-1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |w_r| = 0, \\ \xi_r = 0 \end{cases}$$

相隣る径間部分の角変位は連続する:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial w_{r-1}}{\partial x_{r-1}} \right| = \\ \xi_{r-1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial w_r}{\partial x_r} \right| \\ \xi_r = 0 \end{cases}$$

曲げモーメントは平衡する:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial^2 w_{r-1}}{\partial x_{r-1}^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{r-1}}{\partial y_{r-1}^2} \right| \\ \xi_{r-1} = 1 \end{cases} = \begin{cases} \left| \frac{\partial^2 w_r}{\partial x_r^2} + \nu \frac{\partial^2 w_r}{\partial y_r^2} \right| \\ \xi_r = 0 \end{cases}$$

此等の条件式に (2) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} K_{r-1} \cosh \pi \lambda_1 + L_{r-1} \sinh \pi \lambda_1 + M_{r-1} \cosh \pi \lambda_2 + N_{r-1} \sinh \pi \lambda_2 &= 0, \\ K_r + M_r &= 0, \end{aligned}$$

$$K_{r-1} \lambda_1 \sinh \pi \lambda_1 + L_{r-1} \lambda_1 \cosh \pi \lambda_1 + M_{r-1} \lambda_2 \sinh \pi \lambda_2 + N_{r-1} \lambda_2 \cosh \pi \lambda_2 - L_r \lambda_1 - N_r \lambda_2 = 0,$$

$$K_{r-1} \beta_1 \cosh \pi \lambda_1 + L_{r-1} \beta_1 \sinh \pi \lambda_1 + M_{r-1} \beta_2 \cosh \pi \lambda_2 + N_{r-1} \beta_2 \sinh \pi \lambda_2 - K_r \beta_1 - M_r \beta_2 = 0,$$

$$\text{茲に } \begin{cases} \beta_1 \\ \beta_2 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \end{cases} - \nu \left( \frac{ma}{b} \right)^2$$

上の第 2 式より  $K_r = -M_r = B_r$  とおくものとすれば、 $K_{r-1} = -M_{r-1} = B_{r-1}$  と書けるから残りの 3 式を書き換えると

$$B_{r-1} (\cosh \pi \lambda_1 - \cosh \pi \lambda_2) + L_{r-1} \sinh \pi \lambda_1 + N_{r-1} \sinh \pi \lambda_2 = 0,$$

$$B_{r-1} (\lambda_1 \sinh \pi \lambda_1 - \lambda_2 \sinh \pi \lambda_2) + L_{r-1} \lambda_1 \cosh \pi \lambda_1 + N_{r-1} \lambda_2 \cosh \pi \lambda_2 - L_r \lambda_1 - N_r \lambda_2 = 0,$$

$$B_{r-1} (\beta_1 \cosh \pi \lambda_1 - \beta_2 \cosh \pi \lambda_2) + L_{r-1} \beta_1 \sinh \pi \lambda_1 + N_{r-1} \beta_2 \sinh \pi \lambda_2 - B_r (\beta_1 - \beta_2) = 0,$$

この第 1 式と第 3 式とより

$$\begin{cases} L_{r-1} = -B_{r-1} \coth \pi \lambda_1 + B_r \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 \\ N_{r-1} = B_{r-1} \coth \pi \lambda_2 - B_r \operatorname{cosech} \pi \lambda_2 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (3)$$

これを第 2 式に入れると

$$B_{r-1} S - B_r T + A_r = 0$$

$$\text{但し } S = \lambda_1 \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{cosech} \pi \lambda_2, T = \lambda_1 \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi \lambda_2, A_r = L_r \lambda_1 + N_r \lambda_2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

今 (3) 式に於て添数  $r-1$  の代りに  $r$  と置いて得る式を用いれば

$$A_r = L_r \lambda_1 + N_r \lambda_2 = -B_r T + B_{r+1} S \quad \dots \dots \dots (4a)$$

と書かれるから (4) 式は次の如くなる

$$B_{r-1} S - 2B_r T + B_{r+1} S = 0$$

$$\text{従つて } B_{r-1} - 2B_r \frac{T}{S} + B_{r+1} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

これは  $B_r$  に関する 2 階の Symmetrische Differenzengleichung に他ならない。此の一般解は容易に求めら

れて  $C_1, C_2$  を新たな未定常数として次の如く表わされる。

$$\text{但し } \cos\alpha = \frac{T}{S}$$

## 2. 端边条件式

$x$  軸に直交する両端の相対 2 辺を夫々、 1- 端辺 ( 第 1 径間に属するもの ) 及び  $k$ - 端辺 ( 最終径間に属するもの ) と仮称し、此等が単純支承辺、固定辺、或いは自由辺なる場合を考察する。然る時は夫々の場合に対する条件式は次の如く書かれる。即ち  $\xi_1=0$ ,  $\xi_k=1$  なる時

### i) 単純支承の場合

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} w_k = 0 \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\partial^2 w_k}{\partial y_k^2} = 0 \end{array} \right\}$$

### ii) 固定の場合

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} w_k = 0 \\ \frac{\partial w_k}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right\}$$

### iii) 自由の場合

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} = 0 \\ & \left[ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1 \partial y_1^2} \right] + \frac{p}{D} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\partial^2 w_k}{\partial y_k^2} = 0 \\ & \left[ \frac{\partial^3 w_k}{\partial x_k^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_k}{\partial x_k \partial y_k^2} \right] + \frac{p}{D} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} = 0 \end{aligned} \right\}$$

此等の条件式に(2)式に於て  $r=k$  において得る式を代入して  $\xi_k=1$  とおけば

k-端辺条件式として

i) 単純支承辺の場合

$$M_k \cosh \pi \lambda_2 + N_k \sinh \pi \lambda_2 = 0, \quad K_k \cosh \pi \lambda_1 + L_k \sinh \pi \lambda_1 = 0$$

を得るから、これより

$$L_k = -K_k \coth \pi \lambda_1 = -B_k \coth \pi \lambda_1, \quad N_k = -M_k \coth \pi \lambda_2 = B_k \coth \pi \lambda_2$$

故に

$$A_k = L_k \lambda_1 + N_k \lambda_2 = -B_k T$$

この式と(4)式に於て  $r=k$  とおいて得る式とより

$$B_{k-1} - B_k \left( 2 \frac{T}{S} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

ii) 固定辺の場合、前同様  $L_k, N_k$  を求め  $A_k$  を  $B_k$  で表わせば途中の演算を省略して<sup>1)</sup>

$$A_k = -B_k \left( T - \frac{S^2}{T} \right)$$

を得るから、(4) 式に於て  $r=k$  とおいて得る式とより

iii) 自由辯の場合、此の場合も途由の演算を省略して<sup>2)</sup>

$$A_k = -B_k \frac{TT' - \bar{S}S''}{T'}, \text{ 但し } T' = \frac{\gamma_1 + P\lambda_1}{\beta_1} \coth \pi\lambda_1 - \frac{\gamma_2 + P\lambda_2}{\beta_2} \coth \pi\lambda_2$$

$$\bar{S} = \frac{\lambda_1}{\beta_1} \operatorname{cosech} \pi\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{\beta_2} \operatorname{cosech} \pi\lambda_2, \quad S'' = (\gamma_1 + P\lambda_1) \operatorname{cosech} \pi\lambda_1 - (\gamma_2 + P\lambda_2) \operatorname{cosech} \pi\lambda_2$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{array} \right\} &= \left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{l} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \end{array} \right] - (2-\nu) \left( \frac{ma}{b} \right)^2 \end{aligned}$$

を得るから、上式と(4)式に於て  $r=k$  と置いて得る式とより

$$B_{k-1} - B_k \left( 2 \frac{T}{S} - \frac{\bar{S} S''}{\bar{S} T'} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

1) 建設工学, 第2号, 拙著参照。 2) 脚註1) 參照。



すべて  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ,  $\nu = 0, 3$  と仮定するものとする。

a) 両端単純支承辺の場合 此の場合には(19)式より

$$\sin k\alpha = 0$$

従つて

$$\alpha = s \frac{\pi}{k}, \quad (s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1)$$

故に前出(6)の第2式を参照すれば挫屈条件式は次の如く書かれる。

$$\cos s \frac{\pi}{k} = \frac{T}{S} = \frac{\lambda_1 \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi \lambda_2}{\lambda_1 \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{cosech} \pi \lambda_2} \quad (19')$$

$$(s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1)$$

今上式に於いて  $b = \infty$  とした極限の場合を考えてみよう。此の時  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = i \frac{Z}{\pi}$  但し  $Z = a \sqrt{\frac{p}{D}}$  となるから、上式を書き換えて

$$\cos s \frac{\pi}{k} = \frac{\frac{\pi \lambda_1}{k} \cosh \pi \lambda_1 \sinh \pi \lambda_2 - \pi \lambda_2 \cosh \pi \lambda_2}{\frac{\pi \lambda_1}{k} \sinh \pi \lambda_1 \sinh \pi \lambda_2 - \pi \lambda_2}$$

とし  $\lambda_1 \rightarrow 0$ ,  $\pi \lambda_2 \rightarrow iZ$  なる極限移行を施すと  $\cos s \frac{\pi}{k} = \frac{\sin Z - Z \cos Z}{\sin Z - Z}$

となる。此れは等径間連続長柱の挫屈条件方程式に他ならない<sup>4)</sup>。而して両端鉄支承なる場合上式の最小根は  $s=k$  と置いて  $Z=\pi$  となる事が知られている<sup>5)</sup>。

先づ荷重条件として  $p$  のみが作用する場合を考える。上記連続長柱の場合に於ける結果を参照して(19')式に於いて  $s=k$  と置いてみると左辺は常に無関係に -1 となる。一方右辺  $\frac{T}{S}$  を  $P$  の函数として図示し<sup>6)</sup>ておけば図-2に示す如く丁度  $P=1.5625$  で(19')の関係が成立する事が解る<sup>7)</sup>。然るに  $P=1.5625$  は  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  なる周辺単純支承の单一板の最小挫屈荷重を与えるものに他ならない。此の結果を考察するに元来只今の如き連続板にあつては各径間が夫々单一板として交互に反対側に撓曲する場合が最も簡単な挫屈形式でありそれは径間数に無関係に考えられる形態である事を注意すれば首肯し得られる処である。

次に荷重  $q$  のみが作用する場合を考える。此の場合も前と同様な挫屈形式が最小根に対応するであろう事は想像に難くない。即ち各径間を夫々单一板の如く考えればよい。只今の場合  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  であるから单一板としては周知の如く  $y$  方向に一波長形に挫屈する場合が最小挫屈荷重に対応し其の時  $Q=16$  である[因みに  $y$  方向に半波長形に挫屈する場合は  $Q=25$ ]。実際  $m=2$  とした場合の  $\frac{T}{S}$  を  $Q$  の函数として図示すれば  $Q$  の上記の値で(19')式を満足する事が解る[図-3 参照]。

b) 一端固定辺他端単純支承辺の場合 此の場合には(20)式より

$$\cos k\alpha = 0$$

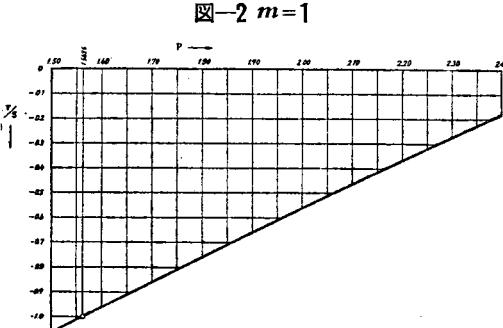


図-2  $m=1$

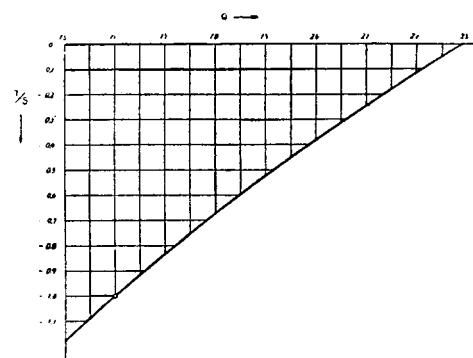


図-3  $m=2$

- 4) Fr.Bleich und E.Melan "Die Gewöhnlichen und Partiellen Differenzengleichungen der Baustatik" 1927, s.216.
- 5) 坂静雄 "鶴角撓度法による剛節架構の安定論" 建築雑誌第45期, 第55号, p.p.9~11.
- 6) 只今の連続板に於て特に  $k=1$  なる場合を考えれば、それは周辺単純支承の单一板に他ならない。其の時  $P=1.5625$  であるから大体此の附近で  $T/S$  を  $P$  の函数として図示しておけばよい事が推察される。但し  $m=1$  とおくものとする。
- 7) (19')式に直接  $P=1.5625$  を代入すれば  $T/S = -\infty/\infty$  となり不定形となる。然し只今の如く図式に認められることは  $\lim_{P \rightarrow 1.5625} \left( \frac{T}{S} \right) = -1$  が成立する事に他ならない。

これより  $\alpha = \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k}$ , ( $s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1$ )

故に前出(6)式を考慮すれば挫屈条件式は次の如く書かれる。

$$\cos\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} = \frac{T}{S} = \frac{\lambda_1 \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi \lambda_2}{\lambda_1 \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{cosech} \pi \lambda_2} \quad (20')$$

( $s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1$ )

扱て  $k=1$ , 即ち单一板の場合には上式より次の関係式を得る。

$$\lambda_1 \cosh \pi \lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi \lambda_2 = 0 \quad (20'')$$

これは既知の公式である<sup>8)</sup>。

扱て、先づ荷重  $p$  のみの作用する場合を考えよう。 $k=1$  の時は上述の如く(20'')式を得て最小根は此の場合  $P=2.5966$  なる事が既知である、次に  $k=\infty$  なる極限の場合を想像しよう。此の場合には Fr. Bleich が連続柱について指摘せる如く<sup>9)</sup> 端辺固定の影響は消失して両端単純支承辺の場合に一致する事が予想される。而して其の場合最小根は  $P=1.5625$  であつた。如上の考察より  $k \geq 2$  なる任意の  $k$  個の径間数の連続板に対しては(20')の最小根  $P$  は

$$1.5625 < P < 2.5966$$

と推定される。扱て図-2に見る如く  $P$  の函数としての  $\frac{T}{S}$  曲線は上の領域では負値単調な増加函数を表わしている。従つて(20')式の左辺の採り得る負の最小値が此の場合の最小根  $P$  を与える事が解る。その為には

$$s=k-1$$

と置かなくてはならない。従つて(20')式は次の如く書かれる。

$$\cos\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\pi = \frac{T}{S} \quad (20''')$$

上式より任意の  $k$ (径間数)に対して  $\frac{T}{S}$  の採る可き値が算出されるから逆に  $\frac{T}{S}$ -曲線[図-2]により其の時の  $P$  を読み取る事が出来る。各種の  $k$  の値に対する実際の結果は表-1に示す如くである。尙上式に於て  $k=\infty$  とおけば  $\frac{T}{S}=-1$  となり  $P=1.5625$  を得て当初の予想に一致する。即ち上の結果より径間数の増加に伴い固定辺の影響は急速に減少して両端単純支承辺の場合に近付く有様が解る。

次に荷重  $q$  のみが作用する場合を考えよう。両端単純支承の場合同様此の場合も  $y$  方向に一波長形に挫屈する場合が最小挫屈荷重に対応すると考える事が出来る。即ち  $m=2$  の場合に対する  $\frac{T}{S}$  曲線[図-3]を用い、前記  $P$  の場合と同様の手続にて  $k$  の種々の値に対する  $Q$  の最小根を求めれば表-2の結果を得る。此の場合も  $k$  の増加に伴い固定端の影響が急速に減少する事が解る。

c) 両端固定辺の場合 此の場合は(21)式より

$$\sin k\alpha = 0$$

これより  $\alpha = s \frac{\pi}{k}$ , ( $s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1$ )

従つて只今の挫屈条件式は両端単純支承辺の場合のそれと同一である。今  $b=\infty$  なる極限の場合を考えると再び連続長柱の公式を得て其の最小根は此の場合  $s=k-1$  と置いて求められる事が知られている<sup>10)</sup>。次に  $k=1$  即ち单一板の場合を考えよう。此の時  $s=0$  とおいてみれば挫屈条件式(19')より

$$\lambda_1 \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_1 - \lambda_2 \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_2 = 0$$

を得る。これは既知の公式である<sup>11)</sup>。

8) S.Iguchi "Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte," 北大工学部紀要 Vol.4, No.4, s.41.

9) Fr. Bleich 前掲書 [註-4)] s.218 10) Fr. Bleich 前掲書 [註-4)] s.217

11) S. Iguchi 前掲論文 [註-8)] s.44

表-1

$k$	$\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\pi$	$\cos\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\pi$	$P$
2	$\frac{3}{4}\pi$	-0.707 11	1.853
3	$\frac{5}{6}\pi$	-0.866 03	1.695
4	$\frac{7}{8}\pi$	-0.923 88	1.637
5	$\frac{9}{10}\pi$	-0.951 06	1.611
6	$\frac{11}{12}\pi$	-0.965 93	1.597
$\infty$	$\pi$	-1	1.5625

表-2

$k$	$\cos\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\pi$	$Q$ [ $m=2$ ]
2		17.77
3		16.80
4	表-1 に同じ	16.45
5		16.28
6		16.20
$\infty$		16

次に  $k=2$  の場合には  $s=1$  において (19') 式より  $\lambda_1 \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi \lambda_2 = 0$  得る。これは (20') 式に他ならない。即ち一端固定他端単純支承なる单一板の挫屈条件方程式である。今斯かる单一板の挫屈撓曲形を 2 個互に単純支承端を突合せて逆対称形に接続したものは只今の連続板の挫屈撓曲形となる事を注意すれば首肯される帰結である。上の二、三の特例に鑑み一般に此の場合の最小根は (19') 式に於て  $s=k-1$  と置いて求められるであろう事が推測される。

先づ荷重  $p$  のみが作用する場合を考えよう。先づ  $k=2$  に対しては上述の如く其の最小根は(20")式より求められて  $P=2.5966$  であつた。又  $k=\infty$  に対しては前例同様  $P=1.5625$  と予想出来る。故に  $k>2$  なる場合には

なる最小根の存在領域を設定し得る。扱て此の場合の挫屈条件式(19')式の右辺  $\frac{T}{S}$  は上記の領域で  $P$  の負値単調な増加函数なる事は図-2 に見る如くであつて既述の如く  $s=k$  とおけばその最小根が求められる。然し斯くては(19')式は径間数  $k$  に無関係となり Fr.Bleich が連続柱に於ける同様の事柄について説明せる如く<sup>12)</sup>各径間部分が平面を保つ結果となる事を証明する事が出来る。依つて問題に適さない故に  $s=k-1$  とおけば(19')式は

$$\cos\left(1 - \frac{1}{k}\right)\pi = \frac{T}{S}$$

と書かれる。 $k$  の種々の値に対する上式の最小根は前例同様にして図-2 の  $\frac{T}{S}$ -曲線により読み取る事が出来て表-3 の結果を得る。尚茲に注意すべき事は上式に於て  $k=2k'$  と置けば(20")式に一致して  $k'$  個の径間数の一端固定辺他端単純支承辺の連続板の最小挫屈荷重は  $2k'$  個の径間数の両端固定辺の連続板のそれに等しい事となる。此れは前者の撓屈撓曲形を 2 個互に単純支承端辺を突合せて逆対称形に接続すれば後者の挫屈形に他ならない事を注意すれば了承される。又  $k=\infty$  とすれば此の場合も  $\frac{T}{S}=-1$  を得るから  $P=1.5625$  となり径間数の増加に伴い固定端の影響が消失するに至る事が解る。

次に荷重  $q$  のみが作用する場合には前例同様  $m=2$  の場合が  $Q$  の最小値を与える事は容易に推測出来るから図一三により表一四の結果を得る。此の場合も  $k$  の増加に伴い固定端の影響が速かに減少する事が解る。

表—3

$k$	$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\pi$	$\cos\left(1 - \frac{1}{k}\right)\pi$	$P$
2	$\frac{1}{2}\pi$	0	2.5966
3	$\frac{2}{3}\pi$	-0.500 00	2.062
4	$\frac{3}{4}\pi$	-0.707 11	1.853
5	$\frac{4}{5}\pi$	-0.809 02	1.752
6	$\frac{5}{6}\pi$	-0.866 03	1.695
$\infty$	$\pi$	-1	1.5625

卷一

d) 一端自由辺他端単純支承の場合 先づ後の計算の便宜上(22)式を逆数の形に書いて置く。即ち

上式は  $\alpha$  を parameter とする挫屈条件式と考える事が出来る。今  $k=1$  と置いてみると第1式左辺の分子は 0 となるから右辺の分子も 0 に等置なくてはならない。然る時は第2式を参照して結論

$$\tilde{T}^{\nu} = \frac{\gamma_1 + P\lambda_1}{\beta_1} \coth \pi \lambda_1 - \frac{\gamma_2 + P\lambda_2}{\beta_2} \coth \pi \lambda_2 = 0$$

とすべきである。此れは單一板の公式である筈で特に荷重  $p$  のみが作用する場合には上式の最小根は

P=0.5107

と求められる。又荷重  $q$  のみが作用し  $p$  が存在しなければ、

$$\gamma_1 = -\lambda_1 \beta_2, \quad \gamma_2 = -\lambda_2 \beta_1$$

と書く事が出来るから前式より直ちに

$$\lambda_2 \beta_1^2 \tanh \pi \lambda_1 = \lambda_1 \beta_2^2 \tanh \pi \lambda_2$$

を得て既知の公式<sup>13)</sup>に一致する。

次に計算例として先づ荷重  $p$  のみが作用する場合を考えよう。 $k=1$  なら前述の如く  $P=0.5107$  である。

12) Fr. Bleich 前掲書 s.217

13) S.Timoshenko, "Theory of Elastic Stability" 1936 p.339. Eq.(i).

次に  $k = \infty$  に対する  $P$  を求めるために (22') の第1式左辺を次の如く変形する:

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha} = \cos \alpha - \cot k\alpha \sin \alpha$$

今  $\alpha = i\alpha'$  とおき  $\lim_{k \rightarrow \infty} \coth k\alpha' = 1$  なる事を考慮すれば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cosh a' - \coth ka' \sinh a') \\ = \cosh a' - \sinh a' = \frac{T}{S} \pm \sqrt{\frac{T^2}{S^2} - 1} \quad \text{但し} \quad \cos \alpha = \cosh a' = \frac{T}{S}$$

故に  $k = \infty$  に対する最小根は

$$\frac{ST'}{SS''} = \frac{T}{S} \pm \sqrt{\frac{T^2}{S^2} - 1} \quad \dots \dots \dots \quad (25)$$

より求められ  $P=0.5967$  を得る故に任意の  $k$  に対しては

$$0.5107 < P < 0.5967$$

と予想出来る。従つて上の領域で  $P$  に対する  $\frac{T}{S}$ ,  $\frac{ST'}{SS''}$  の函数値を計算しておけば

$$\cos \alpha = \frac{T}{S}, \quad \sin \alpha = i\sqrt{\left(\frac{T}{S}\right)^2 - 1}$$

の値が計算されるから、例えば

$$\sin n\alpha = 2 \cos \alpha \sin(n-1)\alpha - \sin(n-2)\alpha$$

なる漸化式により任意の  $k$  に対する  $\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}$  の函数値を算出する事が出来る。故に挫屈条件式の根  $P$  は  $\frac{ST'}{SS'}$ -曲線と  $\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}$ -曲線との交点より図式に読み取る事が出来る。只今の場合表—5の結果を得る。即ち、径間数の増加に伴い極めて迅速に一定の極限値に近付くが両端単純支承辺の場合とは一致しない事が解る。

今度は荷重  $q$  のみが作用する場合を考えよう。先づ

$k=2$ なる場合は連続板は1長辺自由残りの3辺単純支承の單一板と4辺単純支承の單一板との結合されたものと見做され、夫々辺比  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ であるから前者が  $y$  方向に半波長形に挫屈する場合は  $Q=2.672$ 、一波長形に挫屈する場合は  $Q=25$ 、一波長形に挫屈する場合に間連続板に対しては  $y$  方向へ半波長形に挫屈する場合に

$$2.672 < Q < 25$$

となるべく、一波長形に挫屈する場合は〔区別の為此の場合の根を  $Q'$  と記す〕

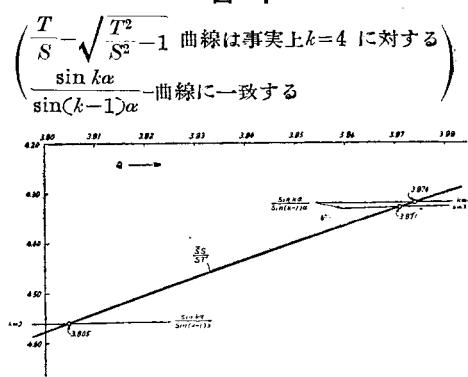
$$5.610 < Q' < 16$$

と予想し得る。然るに上の両限界より  $Q, Q'$  の大小関係を判断する事は出来ないから両者の場合につき吟味比較しなくてはならない。前同様  $\frac{ST}{SS''}$ -曲線と  $\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}$ -曲線との交点より最小限  $Q$  を読みとればよい。尙  $k = \infty$  なる極限に対しては此の場合も (25) の関係式が成立する。其の手数は図-4に示す如くである。但し同図に於ては前記両曲線は便宜上その逆数を示してある。尙此の時 (25) 右辺の複号の各場合は互に逆数関係にあるから計算上特別の手数は要さない。而も事實上それは  $k=4$  に対する  $\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}$  曲線に一致する。拙て實際の結果は表-6の如くである。即ち最小挫屈荷重は  $y$  方向に半波長形に挫屈する場合に対応する事が解る。因みに前記  $Q$  の試索限界では  $-\frac{T}{S} < -1$  となり従つて  $\cos \alpha < -1$  なる事となり奇異の觀があるが、元來  $\alpha$  は単なる parameter であつて最後に消去さるべき性質のものであるから其の値の如何は問題とはならないのである。

表一 5

$k$	1	2	3	4	$\infty$
$P$	0.5107	0.591 <sub>5</sub>	0.596 <sub>3</sub>	0.5967	0.5967

4



表一

$k$	1	2	3	4	$\infty$
$[m=1] Q$	2.6722	3.805	8.871	3.874	3.874
$[m=2] Q'$	5.61	6.06	6.05	6.05	6.05

e) 一端自由辺他端固定辺の場合 此の場合は(23)式より

又(6)より

上式は  $\alpha$  を parameter とする挫屈条件方程式である。既て单一板に対しては  $k=1$  とおけば上の両式より直ちに次式を得る。

$$TT' = \bar{S}S'^*$$

$$\text{或いは} \quad \{\lambda_1 \coth \pi\lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi\lambda_2\} \left\{ \frac{\gamma_1 + P\lambda_1}{\beta_1} \coth \pi\lambda_1 - \frac{\gamma_2 + P\lambda_2}{\beta_2} \coth \pi\lambda_2 \right\} \\ = \left\{ \frac{\lambda_1}{\beta_1} \operatorname{cosech} \pi\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{\beta_2} \operatorname{cosech} \pi\lambda_2 \right\} [(\gamma_1 + P\lambda_1) \operatorname{cosech} \pi\lambda_1 - (\gamma_2 + P\lambda_2) \operatorname{cosech} \pi\lambda_2] \dots \dots (26)$$

今上式の両辺を  $\frac{\gamma_1 + P\lambda_1}{\beta_1} \coth \pi \lambda_1$  で割つて  $b = \infty$  なる極限を考えてみる。此の時

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=i\sqrt{P} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \beta_1=0 \\ \beta_2=-P \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \gamma_1=0 \\ \gamma_2=-iP\sqrt{P} \end{array} \right\}$$

なる事を考慮すれば上式は結局次の如くなる。

$$\frac{1}{\pi} - \sqrt{P} \cot \pi \sqrt{P} = \frac{1}{\pi} \quad \text{これより} \quad \cot \pi \sqrt{P} = 0$$

此の式の最小根は  $\pi\sqrt{P} = \frac{\pi}{2}$ 、従つて  $P = \frac{1}{4}$  或いは  $p = \frac{\pi^2 D}{4a^2}$  を得る。これは長さ  $a$  なる一端固定他端自由なる長柱の撓屈荷重に他ならない。又荷重  $q$  のみが作用し  $p$  が存在せぬ場合には

$$\gamma_1 = -\lambda_1 \beta_2, \quad \gamma_2 = -\lambda_2 \beta_1$$

と書く事が出来るから(26)式より容易に次式を導き得る。

$$-2\beta_1\beta_2 + (\beta_1^2 + \beta_2^2) \cosh \pi\lambda_1 \cosh \pi\lambda_2 = \frac{\lambda_1^2\beta_2^2 + \lambda_2^2\beta_1^2}{\lambda_1\lambda_2} \sinh \pi\lambda_1 \sinh \pi\lambda_2$$

<sup>14)</sup>此れは既知の单一板の公式に他ならない。

次に計算例として先づ  $p$  のみが作用する場合を考えよう。 $k=1$ なら 1 長辺自由他の長辺固定残りの 2 辺単純支承の単一板となり其の最小根は  $P=0.6565$  である。次に  $k=\infty$  に対しては  $\alpha=i\alpha'$  とおいて  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tanh k\alpha' = 1$  なる事を考慮すれば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(k-1)\alpha}{\cos k\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cosh \alpha' - \tanh k\alpha' \sinh \alpha') = \cosh \alpha' - \sinh \alpha' = \frac{T}{S} \pm \sqrt{\frac{T^2}{S^2} - 1}$$

と書かれるから此の場合も  $P$  は(25)式より求められて  $P=0.5967$  である。故に

$$0.5967 \leq P \leq 0.6565$$

の領域で  $\frac{ST'}{SS''}$ -曲線と  $\frac{\cos(k-1)\alpha}{\cos k\alpha}$ -曲線との交点より  $P$  の値を読みとれば表-7の結果を得る。

次に荷重  $g$  のみが作用する場合を考えよう。先づ  $k=2$  の場合は前例表-6と比較して只今の場合は  $Q > 3.805$  と予想され又  $k=\infty$  に対しても既述の如く(25)式が用いられ  $Q = 3.874$  である。故に  $k \geq 2$  なる任意の  $k$  に対しては最小根のは

表一

$k$	1	2	3	4	$\infty$
$P$	0.6565	0.601 <sub>8</sub>	0.597 <sub>0</sub>	0.596 <sub>7</sub>	0.5967

三

表一-6

$k$	1	2	3	4	$\infty$
$[m=1] Q$	5.844	3.946	3.878	3.874	3.874

$3.805 > Q > 3.874$   
の領域で求められる事が解る。而して実際の数値的結果は表-3 の如くである。

今表-5、及び表-6を夫々表-7及び表-8に比較すれば前者にあつては増加数列、後者にあつては減少数列として共に同一極限値に収斂する有様が解る。而も径間数が大凡4以上になると自由辺の影響は存続するが他の端辺が単純支持なるか固定なるかの差異は事实上消滅することとなる。

(2) 両端自由刃の場合、此の場合には(24)式より

14) S.Timoshenko 前掲書 p.341 Eq.(m)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(k-2)\alpha}{\sin(k-1)\alpha \pm \sin \alpha} &= \frac{ST'}{SS''} \\ \cos \alpha &= \frac{T}{S} \end{aligned} \right\} \quad (24')$$

又(6)式より

即ち上式は  $\alpha$  を parameter とする挫屈条件式である。只今の場合は  $k=1$  と置いて单一板に対する公式を誘導する事は出来ない。此の事は一般解並びに端辺条件の誘導に際し中間支承又は端辺に於ける撓み 0 なる条件が基本的に利用されているに拘らず、両端自由辺なる单一板にあつては斯かる端辺が存在しない事に起因するもので  $k=1$  と置く事が無意味なる事が了承されよう。 $k=2$  とおけば 2 径間の場合で(24')第1式左辺に於いて上号を採れば左辺は 0 となるから(22')式に於ける  $k=1$  の場合同様

$$T' = 0$$

を得る。此の結果は 1 長辺自由残りの 3 辺単純支承の单一板の挫屈撓曲形を 2 個単純支承の長辺を互に突合せて逆対称形に接続したものが只今の場合の逆対称挫屈形に相当する事を注意すれば首肯される(図-5(a))。

又(24')第1式左辺に於いて下号を採れば  $\frac{0}{0}$  となり不定形となるから  $k=2+\varepsilon$  と置いて  $\varepsilon \rightarrow 0$  としてみる。即ち左辺は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon \alpha}{\sin(1+\varepsilon)\alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

となり第2式と共に考慮すれば(23')式に於ける  $k=1$  の場合同様直ちに(26)式に到達する。此の結果は 1 長辺自由他の長辺固定の单一板の挫屈撓曲形を 2 個固定辺を互に突合せて正対称形に接続したものが只今の場合の正対称挫屈形に相当する事を注意すれば了承される処である(図-5(b))。

一般に径間数が偶数個なる場合を考えるに環境条件の対称性により、挫屈形は中央支持辺に関して逆対称形及び正対称形の 2 種の場合が考えられる。前者の場合中央支持辺に於ける撓曲面の形状は図-5(a)型、後者の場合は同図(b)型となるであろう事は想像に難くない。従つて中央より片方半数の径間部分についてみれば前者は一端自由辺他端単純支承辺の連続板として、後者は一端自由辺他端固定辺の連続板として挫屈せるものと見做す事が出来る。此の事は次の如く証明される。今径間数を  $2k'$  とし(24')第1式左辺に於いて  $k=2k'$  とおけば

$$\frac{\sin(k-2)\alpha}{\sin(k-1)\alpha \pm \sin \alpha} = \frac{\sin(2k'-2)\alpha}{\sin(2k'-1)\alpha \pm \sin \alpha} = \frac{2 \sin(k'-1)\alpha \cos(k'-1)\alpha}{\sin k'\alpha \cos(k'-1)\alpha + \cos k'\alpha \sin(k'-1)\alpha \pm \sin \alpha}$$

しかるに

$$\cos k'\alpha \sin(k'-1)\alpha + \sin \alpha = \sin k'\alpha \cos(k'-1)\alpha$$

$$\sin k'\alpha \cos(k'-1)\alpha - \sin \alpha = \cos k'\alpha \sin(k'-1)\alpha$$

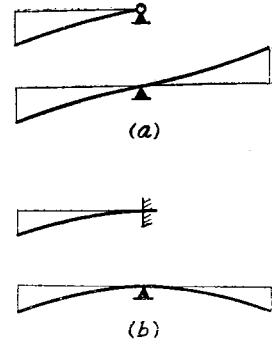
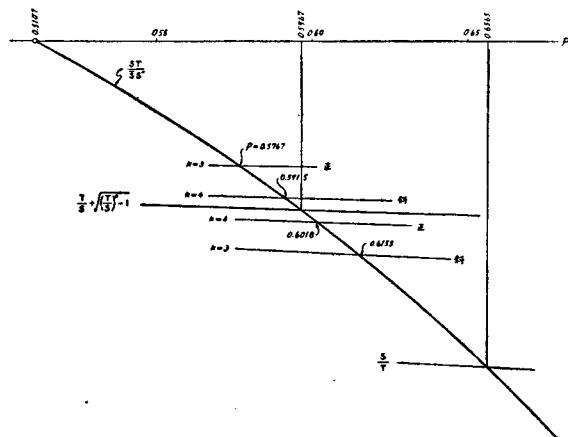
なる関係を顧慮すれば

$$\frac{\sin(k-2)\alpha}{\sin(k-1)\alpha \pm \sin \alpha} = \begin{cases} \frac{\sin(k'-1)\alpha}{\sin k'\alpha} : \text{左辺上号に対し} \\ \frac{\cos(k'-1)\alpha}{\cos k'\alpha} : \text{左辺下号に対し} \end{cases}$$

と書かれるから結局(24')は第1式の左辺複号中、上号を採る時は(22')に、下号を採る時は(23')に一致する事が解る。扱て  $k$  が偶数ならば(24')第1式左辺複号中上号は逆対称形挫屈に、下号は正対称形挫屈に對応する事は上に見た通りであるが、此の事は一般に  $k$  の奇偶に拘らず成立する事を証する事が出来る(証明省略)。

計算例については上述せる処より径間数が偶数個なる場合、逆対称形挫屈に對しては表-5 並びに表-6 の結果が、正対称形挫屈に對しては表-7 並びに表-8 の結果が其の儘該当する。但し此等の表中の径間数  $k$  は只今の場合  $2k$  としなくてはならない。又  $k=\infty$  に對しては  $\alpha=i\alpha'$  と置いて前同様

図-5

図-6 図中、正、斜と記してあるのは夫々正対称形  
挫屈、逆対称形挫屈に對応するの意である

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(k-2)\alpha}{\sin(k-1)\alpha \pm \sin \alpha} = \cosh \alpha' - \sinh \alpha' = \frac{T}{S} \pm \sqrt{\frac{T^2}{S^2} - 1}$$

なる関係を得るから此の場合も(25)式を得て撓屈荷重は前記各表中に与えるものに一致する事が解る。径間数が奇数なる場合に対しては直接(24')第1式の両辺を夫々  $P$  又は  $Q$  の函数として図示し、両曲線の交点より求むる  $P$  又は  $Q$  の値を読みとるのである。図-6は荷重  $p$  のみが作用する場合の根  $P$  の因式試索の有様を示したもので、同図中  $k$  が偶数である如き場合に対する作図は表-5及び表-7に示す半数の径間数の場合の作図に他ならない。実際の数値的結果は表-9、表-10の如くである。

表-9 荷重  $p$  のみが作用する場合の  $P$  の値

$k$	2	3	4	5	6	$\infty$
逆対称形撓屈	0.5107	0.6155	0.5915	0.5982	0.5963	
正対称形撓屈	0.6565	0.5767	0.6018	0.5955	0.5970	0.5967

表-10 荷重  $q$  のみが作用する場合の  $Q$  の値

$k$	2	3	4	5	6	$\infty$
逆対称形撓屈	2.673	4.190	3.805	3.890	3.871	
正対称形撓屈	5.344	3.580	3.946	3.855	3.878	3.874

上表より撓屈荷重は径間数が偶数なる時は逆対称形撓屈に奇数個なる時は正対称形撓屈に対応する事が解る。図-7は此等の撓曲形を  $x$  方向の断面に沿つて図解したものである。さて上掲各表より大凡3~4径間以上では  $P$  或いは  $Q$  は殆ど  $k=\infty$  の場合のそれに一致する事が認められ、実際に自由端辺を有する多径間連続板の撓屈荷重は公式(25)より求められると言う事が出来る。

### 結 言

要するに本文は所題の如き等径間連続板の撓屈荷重は階差方程式の解法を利用して求める事が出来、任意の径間数に対する撓屈荷重を一挙に求め得る便宜がある事を示し、大抵の場合3~4径間以上では径間数無限なる極限の場合の撓屈荷重を以て当てるも實際上差支えない事を明らかにしたものと考えられる。

尙本計算法の応用の直接の拡張として直ちに考えられる事は所題の如き連続板が  $y$  軸方向にも  $r$  個接続する如き場合[図-8]への適用であつて、此れは容易に解る如く本文に言う連続板を  $y$  方向にも等間隔に  $r-1$  個の  $x$ -軸に平行なる中間単純支承辺を以て支持したものに他ならない。即ち撓屈撓曲形を想定すれば  $y$  方向の各径間は順次交互に反対側へ逆対称形に撓曲接続する筈だから當該中間支承辺に於ける  $y$  方向の曲げモーメントは0である。従つてその一径間部分に着目すれば本文にて詳述せる連続板の撓屈形であつて結局問題は  $y$  方向の径間中の一つのみにつき  $x$  方向に連続する連続板として取扱えば足りる事となる。此れは又  $x$ -軸に直交する両端辺が単純支承ならば  $x$  方向の径間中の一つにつき  $y$  方向に連続する連続板として取扱う事も出来る訳である。實用上からは径間数の相当多い時は自由端辺が存在しなければ端辺はすべて単純支承と見做してよい事は本文に示した通りであるから、斯かる場合は結局  $x, y$  両方向の径間で仕切られる一格子内を周辺単純支承の单一板として取扱うのみでよい事となる。然し自由端辺の存する時はその自由端辺を端辺とする方向の一帯状部分を連続板として本文中の公式(25)により撓屈荷重を求めなければならない。尙本文はさきに井口鹿象博士指導の下に行つた“矩形組合板の撓屈理論”的一部であつて文部省科学研究費の援助を受けた。記して深謝の意を表する。

図-7

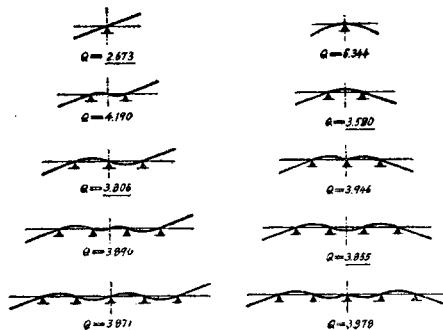


図-8

