

文 献

- 1) Burmister, D.M., "Graphical distribution of vertical pressure beneath foundations," Proc. A.S.C.E. vol. 63, 1937
- 2) Newmark, N.M., "Graphical procedure for computing vertical pressures," Univ. Illinois Eng. Exp. Sta., circ. 24, 1935
"Graphical procedure for computing vertical pressure (mimeographed)," Univ. Illinois, Urbana, III, 1937
- 3) Fröhlich, O.K. "Druckverteilung im Baugrunde,, Wien 1934
- 4) Krynine, D.P., "Pressures beneath a spread foundation" Proc. A.S.C.E., vol. 63, 1937
- 5) Kögler F.u. Scheidig, A., "Druckverteilung im Baugrunde" Bautechnik, Bd. 6 Heft 17, 1928
- 6) Krynine, D. P., "Soil Mechanics", N.Y. 1941
- 7) Terzaghi, K. & Peck, R.B. "Soil Mechanics", N.Y. 1948
- 8) Newmark, N. M., "Discussion for distribution of stresses under a foundation by A.E. Cummings", Trans. A.S.C.E., vol. 101, 1936

附記 本研究は約2年前行つたものに最近補足したもので、その間御指導賜つた教室の先生方に厚く御礼申上げると共に、計算、作図の1部に従事された米田太、馬場礼子両君の労に対して感謝の意を表する。

UDC 624.071.2 : 534.112

2 支柱間に張られた架空索條の固有 撓み振動について(第1報)

正 員 荒 木 謙 一*

ON THE NATURAL VIBRATION OF ANAERIAL CABLE SUSPENDED BY TWO POLES (1 st Report)

Ken-ichi Araki, C.E., Member

Synopsis Assuming the proper deflection curve of a cable and poles, the writer solves by Rayleigh's method, the fundamental mode of vibrations of the aerial cable suspended by two poles as two-degree-of-freedom coupled system. This solution is applicable to cables of such sag ratio as suspension bridge. The elongation of the cable is neglected.

要旨 曲げ振動をする2支柱間に張られた索の固有振動中、その鉛直面内で振動する最低次のものにつき、索および支柱の形状を仮定し、これらを自由度2を有する系の連成振動とみなしてその振動をRayleighの方法で誘導しその解を求めた。なお索の垂比は吊橋程度と限定し索の伸びは無視してある。

I. まえがき

吊橋、空中索道、ケーブルクレーンおよび送電線などの如く自重を以つてぶら下つているものを支える支塔あるいは支柱を設計するにあたり、索の鉛直面内の振動が支柱自身の曲げ振動によりいかに影響されるかは簡単な方法では求められてないので、その大勢を知るために多くの仮定を設け最低次振動の初歩的な近似解法を求める。

支柱を剛とした索のみの撓み振動については、従来諸先輩の御研究があり、Wolf¹⁾氏は垂比の小さい電線の場合にその伸びを考慮し撓み曲線を抛物線として鉛直面内および水平方向の最低次振動を算定されている。又野田博士²⁾は懸垂罫子で吊られた3径間連続の電線について撓み曲線を抛物線とし、伸びを無視して勢力法で解き、か

* 徳島大学教授、工学部土木工学教室

1) K. Wolf: "Schwingungen elastischer Seile," Z.A.M.M. Bd.7 (1927) s.137~144

2) 野田清一、西山静雄: "氷雪剝脱に依る架空電線の跳上り" 電気学会雑誌, 第55巻第564号 p.628

つ実験をしておられる。森口助教授³⁾は最も一般的な場合について厳密な基本微分方程式を導かれ且つ応用例⁴⁾を示しておられる。本文では最低次振動中の索の形状を、野田博士の実験結果⁵⁾を参考にして、 x^{2+01} の項を含む拋物線類似のものと仮定しかつ後述の理由から伸びは無視する。また支柱は先端荷重を受ける片持梁の静撓み曲線と同じと仮定する。かくの如く系の形状を与えて、自由度2を有する系の連成振動として、Rayleighの方法を用いる。

II. 対称型最低次固有振動

(1) 索及び支柱の形状

a) 静止状態 可撓架空索の静止の状態における形状は懸垂線となるが、垂比があまり大でない場合には拋物線とみなしてよい。図-1に於て索の両端を結ぶ線の中点を原点、この線を x 軸、鉛直線(下向)を y 軸にとると、静止の状態の索 A_0B_0 (鎖線)の形状は次式で表わされる。

$$y_0 = D_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{l^2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

今垂比 $D/2l$ が上述程度小さい場合には、其の4次以上の高次項は1に比して無視し得る故

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \frac{2D_0^2 x_0^2}{l^4} \dots \dots \dots (2)$$

従つて半索長 l' は

$$l' = \int_0^l \left\{ 1 + \frac{2D_0^2 x_0^2}{l^4} \right\} dx = l(1 + \lambda) \dots \dots \dots (3)$$

こゝに $\lambda = \frac{2D_0^2}{3l^2}$ にして垂比が $1/8$ 以下では 0.042 以下

次に支柱の形状は先端に、索の水平張力 H_0 を受ける片持梁の静撓み曲線と仮定すれば、その頂点 B_0 の水平変位 δ_{st} は

$$\delta_{st} = H_0 \int_0^h \frac{(h-z)^2}{EI} dz = \frac{H_0}{k} \dots \dots \dots (4)$$

こゝに $k = \frac{1}{\int_0^h \frac{(h-z)^2}{EI} dz}$, E 及び I はそれぞれ支柱の弾性係数及び2次モーメントである。

但し此の場合剪断力の影響及び頂点に働く索の鉛直分力の影響は微小故無視する。又 k は上式の如き常数にし てあたかもバネ常数の様なものであつて、一樣断面の場合は

$$k = \frac{3EI}{h^3} \dots \dots \dots (4')$$

となる。以下簡単の為に此の場合を扱う。そうすれば支柱の形状は

$$\xi_0 = \frac{3\delta_{st}}{2h^3} z^2 \left(h - \frac{z}{3} \right) \dots \dots \dots (5)$$

で表わせる。

b) 振動中の形状 索の振動の状況を考えるに、一般に垂比が極めて小さい場合は索の伸びが振動の主因となり弦の振動に酷似している。一方垂比が小さいが相当ある場合には、振動は主として重力の位置エネルギーに基づく様である。例えて云えば前者はバネの振動、後者は単振子の振動に相応している。本文では垂比が吊橋程度即ち $1/8 \sim 1/12$ 程度の場合を扱うとし後者に属すると考える。そうすれば森口助教授の次式⁶⁾で

$$\frac{\beta - \tan \beta}{\beta^3} = \alpha \equiv \frac{1}{16} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(\frac{H}{EA} \right)$$

$\frac{H}{EA}$ は通常 10^{-3} 程度以下、 $\frac{L}{D}$ は 10^{+1} 程度以下従つて α は 10^{-3} 程度以下となり、其の根は $\beta_1 = 4.490 \sim 4.493$ となり実用的には常数となる。而して円振動数 ω は

$$\omega = \frac{2\beta_m}{L} \sqrt{\frac{H}{\mu_x}}$$

3) 森口繁一: “索の微小振動の基本方程式” 振動第1巻3号昭22年8月 p.10

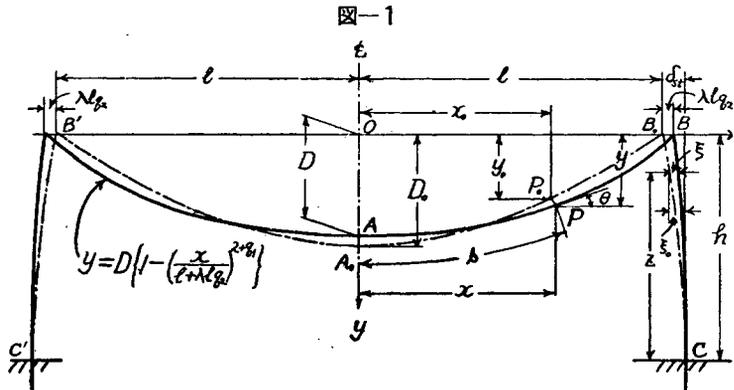
4) 同上: “吊橋索条の固有振動に就て” 土木学会誌, 昭和22,23年度論文集 p.36

5) 前掲2)の p.635 の図-14, 径間=30.18 m, 弛度=0.96 m, 垂比=1/31

6) 前掲4)の p.40

で与えられる故、 ω は $\frac{H}{EA}$ 従つて索の伸びには無関係と見なせる。そこで径間がわづか増減する場合も同様と考える。

かくして振動中の索は長さを変えずに図-1の如くその質量分布を変動して重力に対する位置エネルギーを増減する。而して索も支柱も左右対称型の最低次振動をするとし、前述の如く野田博士の実験を参考とし、索の形状(図-1の実線)を次式の如きものと仮定する。



$$y = D \left\{ 1 - \left(\frac{x}{l + \lambda q_2} \right)^{2+q_1} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

こゝに D は振動中の中央の弛度にして q_1, q_2 の函数

次に支柱の形状も静止の場合と同性質と仮定すれば、その形は

$$\xi = \frac{3 \lambda q_2 z^2 \left(h - \frac{z}{3} \right)}{2 h^3} \dots\dots\dots (6')$$

こゝに ξ は高さ z の点の静止の位置からの水平変位

以上の如く形状を仮定して、 q_1 および q_2 を一般座標に選び以下系の振動を自由度2の場合として取扱う。

(2) 運動方程式

a) 位置エネルギー 系の任意の時刻に於ける位置エネルギーを静止の位置を基準として求めるが、微小振動を考えている故 q_1 および q_2 の3次以上の項は省く。

先に索の静止の形状を拋物線と仮定したが、この事は索の水平単位長あたりの重量 w が一定とみなした事であつて、この w は一般に索ならびに附属物の全重量を径間で割つて求められるが、以下簡単の為に、索に沿つての単位長当りの其れ等の和を w とし、あたかも1本の索だけの場合の如く扱う。

$$\bar{w} = \frac{1}{l} \int_{A_0}^{B_0} w ds = (1 + \lambda) w \dots\dots\dots (7)$$

又振動中の水平単位長あたりの重量 \bar{w}_q は

$$\bar{w}_q = \left(\frac{1 + \lambda}{1 + \lambda q_2} \right) w \dots\dots\dots (7')$$

かくすれば索の位置エネルギー V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= - \int_0^{l(1+\lambda q_2)} \bar{w}_q y dx - \int_0^l \bar{w} y_0 dx \\ &= -(1 + \lambda) w l D \left\{ 1 - \frac{1}{3 + q_1} \right\} - \frac{2(1 + \lambda) w l D_0}{3} \end{aligned}$$

しかして D は q_1 及び q_2 の函数で次の如くに求まる。すなわち式(3)を求めたと同様にして、式(6)より半

索長を求め
$$l' = l + \lambda q_2 + \frac{2D^2 \left(1 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2}{(3 + 2q_1)(l + \lambda q_2)}$$

伸びが無い事より式(7)と等置して

$$\left(\frac{D}{l} \right)^2 = \frac{2\lambda(3 + 2q_1)(1 - q_2)(1 + \lambda q_2)}{(2 + q_1)^2} \dots\dots\dots (8)$$

こゝに $\lambda = \frac{2D^2}{3l^2}$ にして

$$D = D_0 \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{3} q_1 \right) (1 - q_2) (1 + \lambda q_2)}}{1 + \frac{1}{2} q_1} \dots\dots\dots (8')$$

従つてこれを用いて q_1 及び q_2 の3次項以上を無視すれば

$$D\left(\frac{2+q_1}{3+q_1}\right) = \frac{2D_0}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{18} q_1^2 - \frac{1-\lambda}{2} q_2 - \frac{(1+\lambda)^2}{8} q_2^2 \right\}$$

これを先の V_1 の式に入れ

$$V_1 = (1+\lambda) ul D_0 \left\{ \frac{1}{27} q_1^2 + \frac{1-\lambda}{3} q_2 + \frac{1+2\lambda}{12} q_2^2 \right\}$$

又支柱の位置エネルギー V_2 は $V_2 = -\lambda l q_2 \left(H_0 - \frac{k\lambda l q_2}{2} \right) \dots\dots\dots(9)$

此の V_1 と V_2 を加えれば系の位置エネルギーとなるが此のうちの振動に關係のあるのは q_1^2 及び q_2^2 の項のみ

で $V = ul' D_0 \left[\frac{1}{27} q_1^2 + \left\{ \frac{1}{12} + \frac{1}{6} (1+\mu) \right\} q_2^2 \right] \dots\dots\dots(10)$

ここに $\mu = \frac{2kD_0}{ul'} = \frac{6D_0EI}{ul'h^3}$

b) 運動エネルギー 索が伸びない事に着目して、其の上の任意の点の運動エネルギーを求める為には其の座標 (x, y) を索の最下点 A より索に沿つて測つた長さ s, q_1 及び q_2 の函数として表わし、これを時間について微分し自乗したものを時間に無關係な s につき 0 より l' まで積分すればよい。しかし、 \dot{q} も q と同程度の微小量と考えられる故、位置エネルギーを求めた時と同様にそれ等の3次以上の項は無視する。しかるに運動エネルギーの式中 \dot{x} 及び \dot{y} は自乗の形で含まれているから \dot{x} 及び \dot{y} 自身に関しては \dot{q}_1 及び \dot{q}_2 の1次項迄をとり2次以上は省いてよい事になる。そこで式(6)及び(8)を用いて

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \frac{\lambda(1-q_2)(3+2q_1)x^{2+2q_1}}{l^{2+2q_1}(1+\lambda q_2)^{3+2q_1}}$$

従つて

$$s = x + \frac{\lambda(1-q_2)x^{3+2q_1}}{l^{2+2q_1}(1+\lambda q_2)^{3+2q_1}}$$

これを x について解き λ の2次以上の項を微小量として省略すれば

$$x = s - \frac{\lambda(1-q_2)s^{3+2q_1}}{l^{2+2q_1}(1+\lambda q_2)^{3+2q_1}} \dots\dots\dots(11)$$

簡単化して

$$x = s - \lambda(1+3\lambda) \left\{ 1 - (1+3\lambda)q_2 \right\} l \left(\frac{s}{l'} \right)^{3+2q_1}$$

更に q の2次以上を無視し

$$x = s - \lambda(1+3\lambda) l \left(\frac{s}{l'} \right)^3 \left\{ 1 + 2 \left(\log \frac{s}{l'} \right) q_1 - (1+3\lambda)q_2 \right\} \dots\dots\dots(11')$$

これを時間について微分し $\dot{x} = \lambda(1+3\lambda) l \left(\frac{s}{l'} \right)^3 \left\{ -2 \left(\log \frac{s}{l'} \right) \dot{q}_1 + (1+3\lambda)\dot{q}_2 \right\} \dots\dots\dots(12)$

$$\begin{aligned} \int_0^{l'} (\dot{x})^2 ds &= \frac{2\lambda D_0^2}{3} (1+6\lambda) \left\{ 4(\dot{q}_1)^2 \int_0^{l'} \left(\frac{s}{l'} \right)^6 \left(\log \frac{s}{l'} \right)^2 ds - 4(1+3\lambda) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \int_0^{l'} \left(\frac{s}{l'} \right)^6 \left(\log \frac{s}{l'} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + (1+6\lambda)(\dot{q}_2)^2 \int_0^{l'} \left(\frac{s}{l'} \right)^6 ds \right\} \\ &= \frac{2\lambda}{3} (1+6\lambda) D_0^2 l' \left\{ \frac{8}{343} (\dot{q}_1)^2 + \frac{4(1+3\lambda)}{49} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1+6\lambda}{7} (\dot{q}_2)^2 \right\} \\ &\approx \lambda D_0^2 l' \{ 0.01555 (\dot{q}_1)^2 + 0.05442 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 0.09524 (\dot{q}_2)^2 \} \dots\dots\dots(12') \end{aligned}$$

次に式(6)の y を求めるが、式(8')を展開して1次項まで採ると

$$D = \left(1 - \frac{1}{6} q_1 - \frac{1-\lambda}{2} q_2 \right) D_0$$

となり又(11')式を用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{l} \right)^{2+q_1} &= \left(\frac{s}{l'} \right)^{2+q_1} (1+\lambda)^{2+q_1} - (2+q_1) \left(\frac{s}{l'} \right)^{1+q_1} \lambda(1+3\lambda) \left(\frac{s}{l'} \right)^3 \left\{ 1 + 2 \left(\log \frac{s}{l'} \right) q_1 - (1+3\lambda)q_2 \right\} \\ &\approx (1+2\lambda) \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\lambda + \log \frac{s}{l'} \right) q_1 \right\} - 2\lambda(1+4\lambda) \left(\frac{s}{l'} \right)^4 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} + \lambda + 3 \log \frac{s}{l'} \right) q_1 - (1+3\lambda)q_2 \right\} \end{aligned}$$

かつ $\left\{ \frac{x}{l(1+\lambda q_2)} \right\}^{2+q_1} \approx \left(\frac{x}{l} \right)^{2+q_1} (1-2\lambda q_2)$

従つて式 (6) は

$$y = D_0 \left\{ 1 - \frac{q_1}{6} - \frac{1-\lambda}{2} q_2 \right\} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - 2\lambda \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} + 8\lambda^2 \left(\frac{s}{l'} \right)^4 \right] - \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \left[q_1 \{ (1+2\lambda)(\lambda + \log \frac{s}{l'}) - 2\lambda(1+4\lambda) \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + 3 \log \frac{s}{l'} \right) \} - 2\lambda \{ 1 - (1+9\lambda) \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \} q_2 \right]$$

λ^2 の項を無視して

$$y \doteq D_0 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - 2\lambda \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \right] - \frac{q_1}{6} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + 4\lambda \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} + 6 \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \left(\log \frac{s}{l'} \right) \left\{ 1 + 2\lambda \left(1 - 3 \frac{s^2}{l'^2} \right) \right\} \right] - \frac{1-\lambda}{2} q_2 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - 6\lambda \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots(13)$$

$$\dot{y} = -D_0 \left\{ \frac{\dot{q}_1}{6} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + 4\lambda \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} + 6 \left(\frac{s}{l'} \right) \left(\log \frac{s}{l'} \right) \left\{ 1 + 2\lambda \left(1 - 3 \frac{s^2}{l'^2} \right) \right\} \right] + \frac{1-\lambda}{2} \dot{q}_2 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - 6\lambda \left(\frac{s}{l'} \right)^2 \right\} \right] \right\} \dots\dots\dots(14)$$

$$\int_0^{l'} (\dot{y})^2 ds = D_0^2 l' \{ (0.007111 - 0.0239\lambda) (\dot{q}_1)^2 + (0.01778 + 0.0504\lambda) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (0.1333 - 0.4952\lambda) (\dot{q}_2)^2 \} \dots\dots\dots(14')$$

従つて索の運動エネルギー T_1 は

$$T_1 = \frac{wl' D_0^2}{2g} \{ (0.007111 - 0.00784\lambda) (\dot{q}_1)^2 + (0.01778 + 0.105\lambda) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (0.1333 - 0.400\lambda) (\dot{q}_2)^2 \} \dots$$

又一様断面の支柱の運動エネルギー T_2 は

$$T_2 = \frac{\gamma}{2g} \int_0^h (\dot{\xi})^2 dz = \frac{11\lambda D_0^2 \gamma h}{140g} (\dot{q}_2)^2 \dots\dots\dots(15)$$

こゝに γ は支柱の単位高さあたりの重量

系の運動エネルギー T は T_1 と T_2 の和で

$$T = \frac{wl' D_0^2}{2g} \left[\{ 0.007111 - 0.00784\lambda \} (\dot{q}_1)^2 + \{ 0.01778 + 0.105\lambda \} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \{ 0.1333 + (\nu - 0.400)\lambda \} (\dot{q}_2)^2 \right] \dots\dots\dots(16)$$

こゝに $\nu = \frac{118h}{70wl'}$

c) 振動の解 以上の T 及び V を Lagrange の運動方程式に入れると

$$\left. \begin{aligned} m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 &= -k_{11} q_1 \\ m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 &= -k_{22} q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

こゝに $m_{11} = 0.007111 - 0.00874\lambda$, $m_{12} = m_{21} = 0.00889 + 0.0525\lambda$

$$m_{22} = 0.1333 + (\nu - 0.400)\lambda, k_{11} = \frac{2g}{27D_0}, k_{22} = \left\{ \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{3}(1+\mu) \right\} g/D_0$$

式 (17) の一般解は $q_i = A_i \cos(pt + \psi)$ の様な純粹の単振動の組合わせと考えられるから

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - m_{11}p^2)q_1 - m_{12}p^2q_2 &= 0 \\ -m_{21}p^2q_1 + (k_{22} - m_{22}p^2)q_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

となり振動数方程式は

$$A = \begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}p^2 & -m_{12}p^2 \\ -m_{21}p^2 & k_{22} - m_{22}p^2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

此の根を p_1 及び p_2 とすれば、系の振動の一般式は

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \cos(p_1 t + \psi_1) + A_1^{(2)} \cos(p_2 t + \psi_2) \\ q_2 &= A_2^{(1)} \cos(p_1 t + \psi_1) + A_2^{(2)} \cos(p_2 t + \psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

で表わされ、 $A_i^{(r)}$ 及び ψ_r は初期条件から決定される。

なお支柱が完全に剛であれば $p = \sqrt{\frac{k_{11}}{m_{11}}} = \frac{3.227\sqrt{g/D_0}}{1 - 0.4097(D_0/l)^2} \dots\dots\dots(20)$