

UDC 624.072.233.5 : 534.113
625.14.036.4

弾性基礎上にある梁の撓み振動の基礎的研究*

准 員 後 藤 尚 男**

FUNDAMENTAL STUDIES ON THE FLEXURAL VIBRATION OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

Hisao Gotō, C.E., Assoc. Member

Synopsis In this paper the author has investigated the flexural vibration of the straight beams with uniform cross section on elastic foundation under the action of various disturbing forces, and has tried to apply these results to rail and tie.

In this paper, as the first step, by using energy method, the fundamental solutions have been induced most generally. That is, dealing with generalized coordinates, generalized forces and Lagrange's equations, the author obtained the solution concerning the generalized coordinates by method of variation of constants. Then applying these results to rail and tie, in the first instance the calculation of the rail under the action of C. 53 type steam locomotive has been carried out, and now some remarkable results have been obtained to a certain extent.

Hereafter the dynamical studies on the rail and tie are expected to be pursued together with the actual measurements in the practice.

要旨 本文は弾性基礎上にある均一な断面を有する直線梁が、各種の擾乱力を受ける場合の撓み振動を考究し、軌条及び枕木への適用を試みたものである。即ち一般座標、一般力より Lagrange の運動方程式を適用し、常数変化の法によつて一般座標を解析して基礎解を得た。そしてこの理論結果を軌条、枕木に適用して計算を進め、軌条の振動について数値計算を行つた。

1. 基礎方程式

一般に図-1,2 の如き梁の撓み振動曲線は正規函数を $u_r(x)$ とし、時間函数を一般座標 q_{rt} にとつて次の如く展開出来る。

$$y_{xt} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) q_{rt} \quad \dots \quad (1)$$

位置のエネルギー V 、運動のエネルギー T 及び散逸函数 F をかくと、

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{bK}{2} \int_0^l y^2 dx, \quad T = \frac{\rho a}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx, \quad F = \frac{\rho a k}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{bR}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \dots \quad (2)$$

こゝに、
 EI : 梁の曲げ剛性、
 b : 梁幅、
 l : 梁材長、
 a : 梁断面積、
 ρ : 梁密度、
 K : 基礎反力係数、
 k : 梁材料の内部摩擦係数、
 R : 基礎抵抗係数。

(2) 式に (1) 式を代入し、正規函数の直交性を考慮して演算を施すと、

$$V = \frac{EI}{2l^4} \sum_{r=1}^{\infty} m_r^4 \alpha_r^2 q_{rt}^2 + \frac{bK}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 q_{rt}^2, \quad T = \frac{\rho a}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \dot{q}_{rt}^2, \quad F = \frac{\rho a k}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \dot{q}_{rt}^2 + \frac{bR}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \dot{q}_{rt}^2 \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{こゝに} \quad \alpha_r^2 = \int_0^l u_r^2(x) dx, \quad \frac{m_r^4}{l^4} = \frac{\rho a}{EI} n_r^2 - \frac{bK}{EI}$$

n_r は減衰のない場合の自由振動の円振動数であり、 α_r, m_r は梁の材端条件により決定される値である⁽¹⁾。
 次に (3) 式の結果を Lagrange の運動方程式、

* 日本応用力学会、応用物理学会、音響学会連合講演会（昭.24.12.3）において「弾性基礎上にある梁の撓み振動の1解法」として講演。

** 京都大学講師、工学部土木工学教室

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial T}{\partial q_{rt}} \right) - \frac{\partial T}{\partial g_{rt}} + \frac{\partial F}{\partial q_{rt}} = -\frac{\partial V}{\partial q_{rt}} + Q_{rt} \quad \dots \dots \dots (4)$$

に代入すると、基礎方程式として次式をうる。

$$\ddot{q}_{rt} + 2\varepsilon\dot{q}_{rt} + n_r^2 q_{rt} = -\frac{1}{\rho a \alpha_r^2} Q_{rt} \quad \dots \dots \dots (5)$$

こゝに

$$\varepsilon = \frac{1}{2\rho a} (\rho a k + b R), \quad n_r^2 = \frac{1}{\rho a} \left(EI \frac{m_r^4}{l^4} + b K \right) \dots \dots \dots (5)_1$$

3. 集中擾乱力の作用する場合

(1) 移動周期力 図-1(a)の様に集中周期力 $P_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$ が水平速度 v で梁上を移動するときの一般力は⁽²⁾,

$$Q_{rt} = \sum_i P_i \cos(\omega_i t + \phi_i) u_r(vt + d_i)$$

たゞし $0 \leq vt + d_i \leq l$ で、 d_i, ϕ_i は $t=0$ における梁上の位置及び位相角を表わし、 $u_r(vt + d_i)$ は正規函数 $u_r(x)$ において $x = vt + d_i$ とおいた値を示す。上の一般力 Q_{rt} を(5)式に代入し、常数変化の法によつて q_{rt} を求め、かつ(1)式の関係を用うると(5)式の解が次の如く計算される。

1) $n_r > \varepsilon$; $\sqrt{n_r^2 - \varepsilon^2} = \sigma_r$ とおいて、

$$y_{xt} = e^{-\varepsilon t} \sum_r u_r(x) (c_r \cos \sigma_r t + c_r' \sin \sigma_r t) \\ + \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_i \sum_r \frac{P_i u_r(x)}{\sigma_r \alpha_r^2} \int_0^t \cos(\omega_i \tau + \phi_i) u_r(v\tau + d_i) e^{\varepsilon \tau} \sin \sigma_r(t-\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots (6)_1$$

2) $n_r = \varepsilon$;

$$y_{xt} = e^{-\varepsilon t} u_r(x) (c_r t + c_r') \\ + \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_i \frac{P_i u_r(x)}{\alpha_r^2} \int_0^t \cos(\omega_i \tau + \phi_i) u_r(v\tau + d_i) e^{\varepsilon \tau} (t-\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots (6)_2$$

3) $n_r < \varepsilon$; $\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - n_r^2} = \sigma_r, \sigma_r'$ とおいて、

$$y_{xt} = \sum_r u_r(x) (c_r e^{-\sigma_r t} + c_r' e^{-\sigma_r' t}) \\ + \frac{1}{\rho a} \sum_i \sum_r \frac{P_i u_r(x)}{(\sigma_r - \sigma_r') \alpha_r^2} \int_0^t \cos(\omega_i \tau + \phi_i) u_r(v\tau + d_i) (-e^{-\sigma_r(t-\tau)} + e^{-\sigma_r'(t-\tau)}) d\tau \quad \dots \dots \dots (6)_3$$

(6)₁, (6)₂, (6)₃ 式の第1項は基礎式(5)の同次式の一般解で初期条件により決まる自由振動を表わし、第2項は非同次式即ち原式(5)の特解で擾乱力による振動を表わしている。

(2) 移動不変力 図-1(b)の集中不変力が移動するときは、 $Q_{rt} = \sum_i P_i u_r(vt + d_i)$, $0 \leq vt + d_i \leq l$ となる。しかして初期条件により決まる自由振動は(5)式の同次式の一般解であるから、擾乱力の種類には関係せず $n_r \geq \varepsilon$ に従つて、夫々 (6)₁, (6)₂, (6)₃ 式の第1項で表わされる。故に以後この自由振動の項を省略し、(6)₁, (6)₂, (6)₃ 式の第2項即ち擾乱力による振動のみをかくことにする。然らば、

$$1) \quad n_r > \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_r \sum_i \frac{P_i u_r(x)}{\sigma_r \alpha_r^2} \int_0^t u_r(v\tau + d_i) e^{\varepsilon \tau} \sin \sigma_r(t-\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots (7)_1$$

$$2) \quad n_r = \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_i \sum_r \frac{P_i u_r(x)}{\alpha_r^2} \int_0^t u_r(v\tau + d_i) e^{\varepsilon \tau} (t-\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots (7)_2$$

$$3) \quad n_r < \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{1}{\rho a} \sum_i \sum_r \frac{P_i u_r(x)}{(\sigma_r - \sigma_r') \alpha_r^2} \int_0^t u_r(v\tau + d_i) (-e^{-\sigma_r(t-\tau)} + e^{-\sigma_r'(t-\tau)}) d\tau \quad \dots \dots \dots (7)_3$$

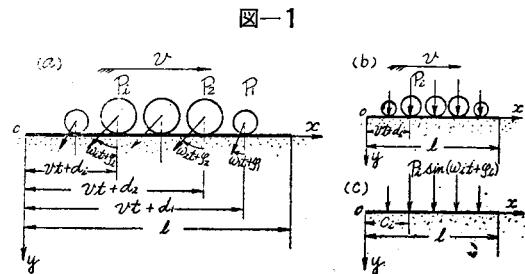
(3) 固定周期力 図-1(c)に示す様に集中周期力がその作用点を移動することなく作用するときは、

$$Q_{rt} = \sum_{i=1}^n P_i \sin(\omega_i t + \phi_i) u_r(c_i)$$

擾乱力による振動のみかいて、

$$1) \quad n_r > \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_r \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{\sigma_r \alpha_r^2} \int_0^t \sin(\omega_i \tau + \phi_i) e^{\varepsilon \tau} \sin \sigma_r(t-\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots (8)_1$$

$$2) \quad n_r = \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{\alpha_r^2} \int_0^t \sin(\omega_i \tau + \phi_i) e^{\varepsilon \tau} (t-\tau) d\tau \quad \dots \dots \dots (8)_2$$



$$3) \quad n_r < \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{1}{\rho a} \sum_{r=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{(\sigma_r - \sigma_r') \alpha_r^2} \int_0^t \sin(\omega_r t + \varphi_i) (-e^{-\sigma_r(t-\tau)} + e^{-\sigma_r'(t-\tau)}) d\tau \quad \dots \dots \dots (8)_3$$

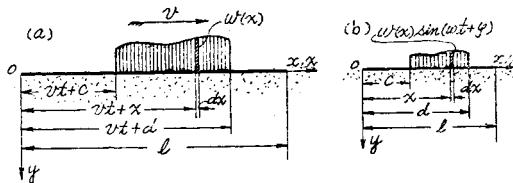
以上において单一擾乱力のときは $i=1$ とすればよいことはいうまでもない。

4. 分布擾乱力の作用する場合

(1) 移動不変力 図-2(a)に示す様に分布不変力が移動するときは,

$$Q_{rt} = \int_c^d w(x) u_r(rt+x) dx \quad \text{ただし } 0 \leq rt+x \leq t, 0 \leq c \leq x \leq d \leq t$$

図-2



擾乱力による振動のみかく。

$$1) \quad n_r > \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_r \frac{u_r(x)}{\sigma_r \alpha_r^2} \int_0^t \int_c^d w(x) u_r(rt+x) e^{\varepsilon \tau} \sin \sigma_r(t-\tau) d\tau dx \quad \dots \dots \dots (9)_1$$

$$2) \quad n_r = \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \frac{u_r(x)}{\alpha_r^2} \int_0^t \int_c^d w(x) u_r(rt+x) e^{\varepsilon \tau} (t-\tau) d\tau dx \quad \dots \dots \dots (9)_2$$

$$3) \quad n_r < \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{1}{\rho a} \sum_r \frac{u_r(x)}{(\sigma_r - \sigma_r') \alpha_r^2} \int_0^t \int_c^d w(x) u_r(rt+x) (-e^{-\sigma_r(t-\tau)} + e^{-\sigma_r'(t-\tau)}) d\tau dx \quad \dots \dots \dots (9)_3$$

(2) 固定週期力 図-2(b)に示す様に分布週期力がその作用点を移動することなく作用するときは,

$$Q_{rt} = \int_c^d w(x) \sin(\omega t + \varphi) u_r(x) dx, \quad \text{ただし } 0 \leq c \leq x \leq d \leq t$$

擾乱力による振動のみかいて,

$$1) \quad n_r > \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_r \frac{u_r(x)}{\sigma_r \alpha_r^2} \int_0^t \int_c^d w(x) \sin(\omega \tau + \varphi) u_r(x) e^{\varepsilon \tau} \sin \sigma_r(t-\tau) d\tau dx \quad \dots \dots \dots (10)_1$$

$$2) \quad n_r = \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \frac{u_r(x)}{\alpha_r^2} \int_0^t \int_c^d w(x) \sin(\omega \tau + \varphi) u_r(x) e^{\varepsilon \tau} (t-\tau) d\tau dx \quad \dots \dots \dots (10)_2$$

$$3) \quad n_r < \varepsilon; \quad y_{xt} = \frac{1}{\rho a} \sum_r \frac{u_r(x)}{(\sigma_r - \sigma_r') \alpha_r^2} \int_0^t \int_c^d w(x) \sin(\omega \tau + \varphi) u_r(x) (-e^{-\sigma_r(t-\tau)} + e^{-\sigma_r'(t-\tau)}) d\tau dx \quad \dots \dots \dots (10)_3$$

以上において(6)式の第2項及び(7),(8),(9),(10)式の右辺, 即ち擾乱力による振動の項における各積分は, $u_r(x)$ が三角函数と双曲函数で表わされるので, 積分内は三角函数と指数函数との積となつて積分が可能である。1例として(8)式を計算すると次の如くなる。

$$\begin{aligned} 1) \quad n_r > \varepsilon; \quad y_{xt} &= \frac{1}{\rho a} \sum_r \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{\alpha_r^2 \sqrt{(n_r^2 - \omega_i^2)^2 + 4 \omega_i^2 \varepsilon^2}} \sin \left(\omega_i t + \varphi_i - \tan^{-1} \frac{2 \omega_i \varepsilon}{n_r^2 - \omega_i^2} \right) \\ &\quad - \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_r \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{(\omega_r^2 - \omega_i^2)^2 + 4 \omega_i^2 \varepsilon^2} \lambda_{ri} \cos \sigma_r t + \lambda_{ri}' \sin \sigma_r t \quad \dots \dots \dots (11)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad n_r = \varepsilon; \quad y_{xt} &= \frac{1}{\rho a} \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{\alpha_r^2 (n_r^2 + \omega_i^2)} \sin \left(\omega_i t + \varphi_i - \tan^{-1} \frac{2 \omega_i \varepsilon}{n_r^2 - \omega_i^2} \right) \\ &\quad - \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{(\omega_r^2 + \omega_i^2)^2} (\mu_{ri} + \mu_{ri}') \quad \dots \dots \dots (11)_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad n_r < \varepsilon; \quad y_{xt} &= \frac{1}{\rho a} \sum_r \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{\alpha_r^2 \sqrt{(n_r^2 - \omega_i^2)^2 + 4 \omega_i^2 \varepsilon^2}} \sin \left(\omega_i t + \varphi_i - \tan^{-1} \frac{2 \omega_i \varepsilon}{n_r^2 - \omega_i^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho a} \sum_r \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_r(x) u_r(c_i)}{(\omega_r^2 - \omega_i^2)^2 + 4 \omega_i^2 \varepsilon^2} (\nu_{ri} e^{-\sigma_r t} + \nu_{ri}' e^{-\sigma_r' t}) \quad \dots \dots \dots (11)_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \lambda_{ri} &= (n_r^2 - \omega_i^2) \sin \varphi_i - 2\omega_i \varepsilon \cos \varphi_i, \quad \lambda_{ri}' = \frac{1}{\sigma_r} [(n_r^2 + \omega_i^2) \varepsilon \sin \varphi_i + (n_r^2 - \omega_i^2 - 2\varepsilon^2) \omega_i \cos \varphi_i] \\ \mu_{ri} &= (n_r^2 + \omega_i^2) (\varepsilon \sin \varphi_i - \omega_i \cos \varphi_i), \quad \mu_{ri}' = (n_r^2 - \omega_i^2) \sin \varphi_i - 2\omega_i \varepsilon \cos \varphi_i \\ \nu_{ri} &= \frac{1}{\sigma_r - \sigma_{ri}} (\sigma_r^2 + \omega_i^2) (\sigma_r \sin \varphi_i - \omega_i \cos \varphi_i), \quad \nu_{ri}' = -\frac{1}{\sigma_r - \sigma_{ri}} (\sigma_r^2 + \omega_i^2) (\sigma_r' \sin \varphi_i - \omega_i \cos \varphi_i) \end{aligned}$$

(11)₁, (11)₂, (11)₃ 各式の初めの項は (8)₁, (8)₂, (8)₃ 各式の定積分の上限よりえられ、擾乱力による強制振動を表わし、後の項は定積分の下限よりえられ、擾乱力による自由振動を表わしている⁽³⁾。

(3) 任意の擾乱力の作用する場合 擰乱力として材長 x 方向に各種の集中力、分布力が組合わさつているときは、基礎式(5)が線型微分方程式であるから、個々の解を重畠すればよい。更に擾乱力が材長方向に任意の形状 $w(x)$ を有し、時間的に $\phi(t)$ なる一般の場合には以上の理論より $\int \int w(x) \phi(t) u_r(x) dt dx$ の積分が可能であればよい。 $\phi(t)$ は實際上週期函数として Fourier 級數に展開出来、 $w(x)$ が工学上通常取扱われている範囲では結局上記の積分が可能となつて、任意の擾乱力が作用する場合でも取扱いうるわけである。

上述の(6), ..., (11)各式においては, $n_r \geq \varepsilon$ に分けてかいたが, (5) 式から $\varepsilon = \text{const.}$ なるに対して n_r は $n_1 < n_2 < \dots < n_{r-1} < n_r < n_{r+1} < \dots$ であるから, 一般的には次の如く表わさねばならない。

$$2) \quad n_{s-1} < \varepsilon = n_s < n_{s+1}; \quad y_{xt} = [\sum_{r=1}^{s-1} u_r(x) g_{rt}]_{n_r < \varepsilon} + [u_s(x) g_{st}]_{n_r = \varepsilon} + [\sum_{r=s+1}^{\infty} u_r(x) g_{rt}]_{n_r > \varepsilon} \quad \dots \dots (12)_2$$

たゞし []_{n \geq \varepsilon} は夫々 $n \geq \varepsilon$ に相当する y_{xt} の式を示す。通常の材質、形状の染で、普通の基礎の場合は いうまでもなく 1), 即ち最低次の n が ε より大で減衰振動をする場合であるので (12) 式の如くかけばよい。

5. 軌条の撓み振動への適用

走行車輌による軌条の振動はかなり複雑である。即ち車輌は走行に伴つて上下、前後、左右動をするとともにこれら3軸のまわりに回転運動をしている⁽⁴⁾。しかも軌条自身の不整、継目、枕木、道床、路盤等が相関連している。これらの現象は複雑があるので実験的な研究に譲り、こゝでは本文の結果を適用するため、軌条を一様な弾性基礎上につれて継目で単純支持された有限梁と考える。

機関車の動輪は周知の通り回転すると、軸重 W の外に過剰平均量 m を生じ、これが $P \cos(\omega t + \phi)$ なる錠撃として現われる(図-3)。機関車の慣性力即ち質量をも考慮したときの一般力は国井博士の結果⁽⁵⁾を運行荷重の形にかくと、

$$Q_{rt} = \sum_i \left[W_i + P_i \cos(\omega_{it} + \varphi_i) - \frac{W_i}{q} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} q_{jt} \sin \frac{j\pi(vt+d_i)}{l} \right\} \right] \sin \frac{r\pi(vt+d_i)}{l} * \dots \quad (13)$$

同博士は橋桁の強制振動において(13)式の*i*=1の場合につき、第1次振動に較べて2次以上の高次振動を省略して、漸近的解法により慣性力を導入された。しかし軌条の場合には7.の計算例にも示す通り、第1次振動に対して2次以上の振動を絶対に無視出来ないため、国井博士の解法をそのまま適用することが出来ない。又軌条の質量に較べて車輪の質量が非常に大きいので、喜内教授のいわれるような取扱い⁽⁶⁾も出来ない。実際に(13)式を用いて軌条の振動を理論的に解くことは殆ど不可能である。それ故慣性力の影響は実験的研究にまつことにして、こゝでは取扱いこれを考慮しないことにすると、(13)式の「」内の第3項は消失するから、

$$Q_{rt} = \sum_i [W_i + P_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)] \sin \frac{r\pi(vt + d_i)}{l} \quad ** \quad (13)_t$$

然らば(13)₁式は不変力 W_i と、移動過期力 $P_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$ ということになり、本文の結果を用うればよく、これは結局 Timoshenko の取扱い方を応用したことになる⁽⁷⁾。なお軌条は実測結果からみて、(12)₁式の場合の振動をしているので結局(6)₁及び(7)₁式に相当する。両式の積分を遂行して撓み振動曲線の解として次式をうる。

$$y_{xt} = e^{-\varepsilon t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{r\pi x}{l}}{l} (c_r \cos \sigma_r t + c_r' \sin \sigma_r t) + \frac{1}{2\sigma a l} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{r\pi x}{l}}{\sigma_r} \left[2\beta_{ri} W_i \cos \left(\frac{r\pi r}{l} t + \phi_{ri} \right) \right]$$

* * * 鎖繫は各動輪とも P_i , ω_i , ϕ_i が等しいとみなされるが、式の便宜上今後 P_i のみに添字 i を附しておく。

$$+ \gamma_{rl} P_i \cos \left\{ \left(\omega + \frac{r\pi v}{l} \right) t + \Psi_{ri} \right\} + \gamma_{rl'} P_i \cos \left\{ \left(\omega - \frac{r\pi v}{l} \right) t + \Psi_{rl'} \right\}] \\ - \frac{e^{-\epsilon t}}{2 \rho a l} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{r\pi x}{l}}{\sigma_r} \{ (2\lambda_{rl} W_i + \mu_{rl} P_i) \cos \sigma_r t + (2\lambda_{rl'} W_i + \mu_{rl'} P_i) \sin \sigma_r t \} \dots \dots \dots (14)$$

こゝに、 $\beta_{ri} = [\{(\beta_1 - \beta_2) \sin \phi - (\beta_3 + \beta_4) \cos \phi \}^2 + \{(\beta_1 - \beta_2) \cos \phi + (\beta_3 + \beta_4) \sin \phi \}^2]^{1/2}$

$$\gamma_{ri} = [\{(\gamma_1 - \gamma_2) \sin \Psi_1 - (\gamma_3 + \gamma_4) \cos \Psi_1\}^2 + \{(\gamma_1 - \gamma_2) \cos \Psi_1 + (\gamma_3 + \gamma_4) \sin \Psi_1\}^2]^{1/2}$$

$$\gamma_{ri'} = [\{(\gamma_1' - \gamma_2') \sin \Psi_2 + (\gamma_3' + \gamma_4') \cos \Psi_2\}^2 + \{(\gamma_1' - \gamma_2') \cos \Psi_2 - (\gamma_3' + \gamma_4') \sin \Psi_2\}^2]^{1/2}$$

$$\lambda_{ri} = (\beta_1 - \beta_2) \cos \phi + (\beta_3 + \beta_4) \sin \phi, \quad \lambda_{ri}' = (\beta_1 - \beta_2) \sin \phi - (\beta_3 - \beta_4) \cos \phi$$

$$\mu_{ri} = (\gamma_1 - \gamma_2) \cos \Psi_1 + (\gamma_3 + \gamma_4) \sin \Psi_1 + (\gamma_1' - \gamma_2') \cos \Psi_2 - (\gamma_3' + \gamma_4') \sin \Psi_2$$

$$\mu_{ri}' = (\gamma_1 + \gamma_2) \sin \Psi_1 - (\gamma_3 - \gamma_4) \cos \Psi_1 - (\gamma_1' + \gamma_2') \sin \Psi_2 - (\gamma_3' - \gamma_4') \cos \Psi_2$$

$$, (\beta_1 - \beta_2) \sin \phi - (\beta_3 + \beta_4) \cos \phi \quad , \quad r\pi d_i$$

$$\phi_{ri} = \tan^{-1} \frac{(\beta_1 - \beta_2) \cos \phi + (\beta_3 + \beta_4) \sin \phi}{(\beta_1 + \beta_2) \cos \phi - (\beta_3 - \beta_4) \sin \phi}, \quad \phi = \frac{\pi}{l},$$

$$w_1 = \tan^{-1}(\gamma_1 - \gamma_2) \sin \Psi_1 - (\gamma_3 + \gamma_4) \cos \Psi_1 \quad w_2 = \tan^{-1}(\gamma_1 + \gamma_2) \sin \Psi_2 - (\gamma_3 - \gamma_4) \cos \Psi_2$$

$$\Psi_{ri} = \tan^{-1} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \cos \Psi_l + (\gamma_3 + \gamma_4) \sin \Psi_l}{(\gamma_1' - \gamma_2') \cos \Psi_2 - (\gamma_3' + \gamma_4') \sin \Psi_2},$$

$$\Psi_1 = \varphi + \frac{r\pi a_i}{l}, \quad \Psi_2 = \varphi - \frac{r\pi a_i}{l}, \quad \text{以下複號同順}$$

$$\beta_1, \beta_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left(\sigma_r \pm \frac{r\pi v}{l}\right)^2}, \quad \beta_3, \beta_4 = \frac{\sigma_r \pm \frac{r\pi v}{l}}{\varepsilon^2 + \left(\sigma_r \pm \frac{r\pi v}{l}\right)^2}$$

$$\gamma_1, \gamma_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left(\sigma_r \pm \omega \pm \frac{r\pi v}{l} \right)^2}, \quad \gamma_3, \gamma_4 = \frac{\sigma_r \pm \omega \pm \frac{r\pi v}{l}}{\varepsilon^2 + \left(\sigma_r \pm \omega \pm \frac{r\pi v}{l} \right)^2}$$

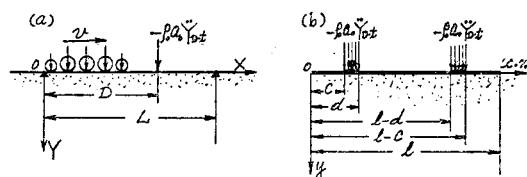
$$\gamma_1', \gamma_2' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\sigma_r \mp \omega \pm \frac{r\pi v}{l})^2}, \quad \gamma_3', \gamma_4' = \frac{\sigma_r \mp \omega \pm \frac{r\pi v}{l}}{\varepsilon^2 + (\sigma_r \mp \omega \pm \frac{r\pi v}{l})^2}$$

$\beta_1, \dots, \beta_4, \gamma_1, \dots, \gamma_4, \gamma'_1, \dots, \gamma'_4$ には添字 r, ϕ, Ψ_1, Ψ_2 には添字 ri を附すべきであるが、簡単のため省略してある。(14)式の第1項は初期条件による自由振動、第2、第3項は夫々走行車輌による強制振動及び自由振動を表わしている。

6. 枕木の撓み振動への適用

軌条と枕木とは走行車輌によつて相関連して振動するわけであるが、その構造上軌条の振動が枕木の振動を大きく支配すると考えてもよいと思われる。そうすると図-4(a)において軌条原点から $X=D$ の位置にある枕木は $F_D(t) = -\rho_0 a_0 \ddot{Y}_{Dt}$ なる擾乱力を受ける。たゞし $\rho_0 a_0$ は軌条単位長当りの質量である。(14)式において $y_{xt} = Y_{Dt}$, $x=D$, $l=L$, $\varepsilon=\varepsilon_0$ とおいて計算を進めると、

图一



$$\left. \begin{aligned} E_r &= (\varepsilon_0^2 - \sigma_r^2) c_r - 2\varepsilon_0\sigma_r c_r', \quad E_r' = (\varepsilon_0^2 - \sigma_r^2) c_r' + 2\varepsilon_0\sigma_r c_r \\ \nu_{rl} &= (\varepsilon_0^2 - \sigma_r^2) (2\lambda_{ri}W_i + \mu_{ri}P_i) - 2\varepsilon_0\sigma_r (2\lambda_{ri}'W_i + \mu_{ri}'P_i) \\ \nu_{rl}' &= (\varepsilon_0^2 - \sigma_r^2) (2\lambda_{ri}'W_i + \mu_{ri}'P_i) + 2\varepsilon_0\sigma_r (2\lambda_{ri}W_i + \mu_{ri}P_i) \end{aligned} \right\} \dots \quad (15)_1$$

枕木は両端自由でその正規函数を $u_s(x)$ で表わすと、一般力は図-4(b)より分布擾乱力の場合を応用して、

実測記録によると枕木も(12)₁式に相当するので、(15)₂式に(15)式を代入し(10)₁式に相当する解を求めるが、初期条件による自由振動の項をも考慮して計算を遂行すると結局次式を得る*。

$$\begin{aligned}
y_{st} &= e^{-\varepsilon t} \sum_{s=1}^{\infty} U_s(x) (A_s \cos \sigma_s t + A_s' \sin \sigma_s t) \\
&+ \frac{\rho_0 a_0}{2 \rho a} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} U_s(x) \{e^{-\varepsilon t} (E_1 \cos \sigma_s t + E_2 \sin \sigma_s t) - e^{-\varepsilon 0t} (E_3 \cos \sigma_r t + E_4 \sin \sigma_r t)\} \\
&+ \frac{1}{4 \rho a L} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i \frac{U_s(x)}{\sigma_r} \left[2 W_i \beta_{si} \cos \left(\frac{r \pi v}{L} t + \phi_{si} \right) + P_i \gamma_{si} \cos \left\{ \left(\omega + \frac{r \pi v}{L} \right) t + \Psi_{si} \right\} \right. \\
&\quad \left. + P_i \gamma_{si'} \cos \left\{ \left(\omega - \frac{r \pi v}{L} \right) t + \Psi_{si'} \right\} - e^{-\varepsilon t} (\delta_{si} \cos \sigma_s t + \delta_{si'} \sin \sigma_s t) \right] \\
&- \frac{1}{4 \rho a L} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i \frac{U_s(x)}{\sigma_r} \{e^{\varepsilon t} (\nu_1 \cos \sigma_s t + \nu_2 \sin \sigma_s t) - e^{-\varepsilon 0t} (\nu_3 \cos \sigma_s t + \nu_4 \sin \sigma_s t)\} \quad \dots \dots (16)
\end{aligned}$$

こゝに、 A_s, A'_s : 初期条件により決定される常数,

$$E_1, E_3 = \frac{E_r(\sigma_r + \sigma_s)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r + \sigma_s)^2} \pm \frac{E_r(\sigma_r - \sigma_s)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r - \sigma_s)^2} - \frac{E_r'(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r - \sigma_s)^2} + \frac{E_r'(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r + \sigma_s)^2}$$

$$E_2, E_4 = \frac{E_r(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r - \sigma_s)^2} \pm \frac{E_r(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r + \sigma_s)^2} \mp \frac{E_r'(\sigma_r + \sigma_s)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r + \sigma_s)^2} - \frac{E_r'(\sigma_r - \sigma_s)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\sigma_r - \sigma_s)^2}$$

ただし複号同順, E_r, E'_r は(15)₁式で与えられる。

$$\begin{aligned}\beta_{si} &= \{\beta_{2s'} \sin \phi_{ri} - \beta_{1s'} \cos \phi_{ri}\}^2 + \{\beta_{1s'} \sin \phi_{ri} + \beta_{2s'} \cos \phi_{ri}\}^2\}^{1/2} \\ \gamma_{si} &= \{\gamma_{2s'} \sin \Psi_{ri} - \gamma_{1s'} \cos \Psi_{ri}\}^2 + \{\gamma_{1s'} \sin \Psi_{ri} + \gamma_{2s'} \cos \Psi_{ri}\}^2\}^{1/2} \\ \gamma_{si}' &= \{\gamma_{4s'} \sin \Psi_{ri}' - \gamma_{3s'} \cos \Psi_{ri}'\}^2 + \{\gamma_{3s'} \sin \Psi_{ri}' + \gamma_{4s'} \cos \Psi_{ri}'\}^2\}^{1/2} \\ \phi_{si} &= \tan^{-1} \frac{\beta_{2s'} \sin \phi_{ri} - \beta_{1s'} \cos \phi_{ri}}{\beta_{1s'} \sin \phi_{ri} + \beta_{2s'} \cos \phi_{ri}} \\ \Psi_{si} &= \tan^{-1} \frac{\gamma_{2s'} \sin \Psi_{ri} - \gamma_{1s'} \cos \Psi_{ri}}{\gamma_{1s'} \sin \Psi_{ri} + \gamma_{2s'} \cos \Psi_{ri}}, \quad \Psi_{si}' = \tan^{-1} \frac{\gamma_{4s'} \sin \Psi_{ri}' - \gamma_{3s'} \cos \Psi_{ri}'}{\gamma_{3s'} \sin \Psi_{ri}' + \gamma_{4s'} \cos \Psi_{ri}'} \\ \delta_{si} &= \beta_{1s'} \sin \phi_{ri} + \beta_{2s'} \cos \phi_{ri} + \gamma_{1s'} \sin \Psi_{ri} + \gamma_{2s'} \cos \Psi_{ri} + \gamma_{3s'} \sin \Psi_{ri}' + \gamma_{4s'} \cos \Psi_{ri}' \\ \delta_{si}' &= \beta_{1s''} \cos \phi_{ri} + \beta_{2s''} \cos \phi_{ri} + \gamma_{1s''} \cos \Psi_{ri} + \gamma_{2s''} \cos \Psi_{ri} + \gamma_{3s''} \sin \Psi_{ri}' + \gamma_{4s''} \cos \Psi_{ri}' \\ \beta_{1s'}, \beta_{1s''} &= \beta_{ri} L_1 (\mp \beta_{s1} + \beta_{s2}), \quad \beta_{2s'}, \beta_{2s''} = \beta_{ri} L_1 (\beta_{s3} \pm \beta_{s4}), \quad L_1 = \left(\frac{r \pi v}{L} \right)^{-2}\end{aligned}$$

ただし複号同順、 $\theta_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}', \phi_{\alpha\beta}, \Psi_{\alpha\beta}, \Psi_{\alpha\beta}'$ は(14)式で与えられる。

$\beta_{s1}, \dots, \beta_{s4}, \dots, \gamma_{s1}, \dots, \gamma_{s4}, \dots, \gamma_{s1}', \dots, \gamma_{s4}' = \{ (14)_1 \text{ 式}; \beta_1, \dots, \beta_4, \gamma_1, \dots, \gamma_4, \gamma_1', \dots, \gamma_4' \} \sigma_r = \sigma_s = L$
 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 = \{ E_1, E_2, E_3, E_4 \}_{E_r = \nu_{r1}, E_r' = \nu_{r2}}; \nu_{r1}, \nu_{r1}' \text{ は } (15) \text{ 式で与えられる。}$

$$U_s(x) = \frac{u_s(x)}{\sigma_s \alpha_s^2} \sin \frac{r\pi D}{L} \frac{1}{d-c} \left\{ \int_c^d u_s(x) dx + \int_{l-d}^{l-c} u_s(x) dx \right\}$$

$$u_5(x) = (\cos m - \cosh m) \left(\cos \frac{mx}{l} + \cosh \frac{mx}{l} \right) + (\sin m + \sinh m) \left(\sin \frac{mx}{l} + \sinh \frac{mx}{l} \right)$$

$$\alpha_s^2 = \int_0^l u_s^2(x) dx = l (\sin m \sinh m)^2$$

* 軌条; $X, Y, L, D, \rho_0, a_0, \varepsilon_0$, 枕木; $x, y, l, \rho, a, \varepsilon$ の外はすべて添字 r は軌条を, s は枕木を表わすものとする。

$E_1, \dots, E_4, \nu_1, \dots, \nu_4, \beta_{1s}', \beta_{2s}', \beta_{1s}''', \beta_{2s}''', \gamma_{1s}', \gamma_{1s}''', \gamma_{4s}', \gamma_{4s}'''$ は添字 rs を, $\beta_{si}, \gamma_{si}, \gamma_{st}', \phi_{si}, \psi_{si}', \delta_{si}, \delta_{si}'$ は添字 r を附すべきであるが簡単のため省略している。(16) 式において第1項は初期条件による枕木の自由振動, 第2項は(14)式の第1項による自由振動, 第3項は(14)式第2項による強制振動, 第4項は(14)式第3項による自由振動を表わしている。これらの各項の振動は実測することにより⁽⁸⁾, 略確認することが出来た。

7. 数値計算例

計算例として C. 53 型蒸気機関車による軌条の振動を計算した。単一動輪による軌条中点の撓み及び曲げモーメントを $t=0$ において $d_i=0, \varphi=0$ として強制振動の項のみを書けば(14)式より,

$$y_{f, \frac{l}{2}} = \frac{1}{2 \rho a l} \sum_{r=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{\sigma_r} \left[2 W_i \beta_r \cos\left(\frac{r\pi v}{l} t + p_r\right) + P_i \gamma_r \cos\left(\left(\omega + \frac{r\pi v}{l}\right) t + \Psi_r\right) + P_i \gamma_r' \cos\left(\left(\omega - \frac{r\pi v}{l}\right) t + \Psi_r'\right) \right] \quad (17)$$

$$M_{f, \frac{l}{2}} = \frac{EI\pi^2}{2 \rho a l^3} \sum_{r=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} r^2}{\sigma_r} \left[2 W_i \beta_r \cos\left(\frac{r\pi v}{l} t + \phi_r\right) + P_i \gamma_r \cos\left(\left(\omega + \frac{r\pi v}{l}\right) t + \Psi_r\right) + P_i \gamma_r' \cos\left(\left(\omega - \frac{r\pi v}{l}\right) t + \Psi_r'\right) \right] \quad (18)$$

動輪が軌条中点の直上に来たときの軸重 W_i による撓みを簡単に y とかけば, (17)式で $vt=l/2$ とおいて,

$$y = \frac{W_i}{\rho a l} \sum_{r=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\sigma_r} \left\{ \frac{\sigma_r + r\pi v/l}{\varepsilon^2 + (\sigma_r + r\pi v/l)^2} + \frac{\sigma_r - r\pi v/l}{\varepsilon^2 + (\sigma_r - r\pi v/l)^2} \right\} \quad (17)_1$$

特に減衰項を無視した場合は, 上式で $\varepsilon=0$ とおいて,

$$y = \frac{2 W_i}{\rho a l} \sum_{r=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n_r^2 - (r\pi v/l)^2} \quad (17)_2$$

更に(17)₁式で $\varepsilon=0, v=0$ とおくと, y は静力学的撓み y_s となり次式で表わされる。

$$y = y_s = \frac{2 W_i}{\rho a l} \sum_{r=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n_r^2} \quad (17)_3$$

いま動輪の錐撃作用の影響をも簡単にとり入れるため, (17)式 [] 内の第2, 第3項も便宜上中点直上で最大値をとるものと仮定して*, $\varepsilon=0$ の場合(17)₂式で P_i を W_i に加算すると,

$$y = \frac{2(W_i + P_i)}{\rho a l} \sum_{r=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n_r^2 - (r\pi v/l)^2} \quad (17)_4$$

一方静力学的計算法による撓み及び曲げモーメントは, すでに求められている如く⁽⁹⁾,

$$y_{s0} = \frac{W_i}{2 K L_0} \left\{ \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\cosh \lambda - \cos \lambda} \right\}, \quad \text{ただし } L_0 = \sqrt{\frac{4 EI}{bK}}, \quad \lambda = \frac{l}{L_0} \quad (17)_5$$

$$M_{s0} = \frac{W_i L_0}{4} \left\{ \frac{\sinh \lambda + \sin \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \right\} \quad (18)_1$$

計算例は以上の(17), (17)₁, ..., (17)₅, (18), (18)₁ 各式を用いて中央の動輪について計算した(図-5(c))。用いた数値は次の如くである。

動輪; $i=4, W_i=7710 \text{ kg}^{**}$, 直径 $f=1.75 \text{ m}$, 速度 $v=50 \text{ km/hr}$, $\omega=2v/f=15.873 \text{ sec}^{-1}$, $P_i=\frac{m}{g} \frac{u^2}{f'}^{(10)}$, ただし m は過剰平均量, f' は動輪中心より釣合錐重心までの距離, u は釣合錐重心の接線方向速度(図-3),

これらの値を C. 53 型機関車について確かめることができなかつたので, Inglis が 0-8-0 型機関車について実験より求めた値を用いると⁽¹¹⁾, $P_i=\frac{5.74}{g} \left(\frac{v}{\pi f_i} \right)^2 = 622 \text{ kg}$.

軌条; 37 kg 軌条, $EI=1.998 \times 10^5 \text{ kg.m}^2$, $\rho=7.9857 \times 10^2 \text{ kg.m}^{-4} \text{ sec}^2$, $b=0.12224 \text{ m}$, $a=0.4728 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, $l=25 \text{ m}$

道床; $K=10 \text{ kg.cm}^{-3}$, 軌条及び道床による ε は枕木についての実測⁽¹²⁾より, 30 sec^{-1} と推定した。

* これは理論的には全く正しくないのはいうまでもない。しかし図-5(d)よりもわかる如く, 錐撃作用を表わす(17)式の第2, 第3項の和($P_i \sim y$ 曲線)が, 中点直上即ち $vt=l/2$ で正の最大位を与えて軸重($W_i \sim y$ 曲線)の最大値と合致し, 軌条中点に最大撓みを生ぜしめる様な $t=0$ における φ の値があるはずである。しかし(17)式に φ があるため, この様な φ は簡単に求めないので, こうした仮定をした。(17)₄式の結果は勿論安全側である。

** 片側軌条1本について計算するので軸重 W はその $1/2$ 即ち輪重の値をとつた。

これらの値を用いて計算した結果は図-5に示す通りであつて、(a),(b)図は動輪による攪乱荷重の状態、(d)図は走行荷重による軌条中点の時間一撓み曲線であるから、 W_4 を単位荷重と考えると、 W_4-y 曲線は軌条中点の撓みの影響線を示すことになる。従つて機関車全体の軸重 $\sum_{i=1}^6 W_i$ による軌条中点の最大撓みは、(c)図に示す荷重位置の場合に生じ、その値は 3.534 485 mm となる。

表-1, ..., 4 は(17)の各式による計算結果であつて、 $r=1, 3, 5, \dots, 27$ に対する軌条中点の最大撓み(単位 mm)を表わし、 v 及び K の単位は夫々 km/hr, kg/cm³ である。この計算で級数の収斂が悪いのは、軌条では(5)₁式で EI/l の値が小さく、一方 r の増加に伴う m_r の増加が緩慢でかつ bK なる const. が大きく影響し、結局 n_r^2 の増加が極めて緩慢であることが決定的原因である。

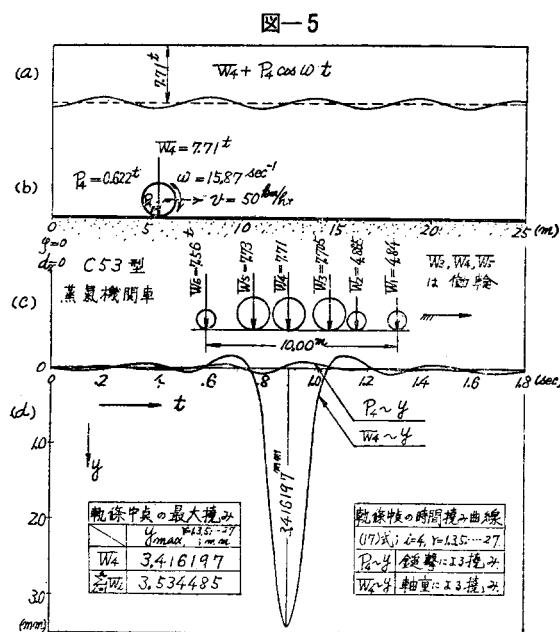


表-1

K	(17) ₃ 式		(17) ₅ 式	
	v	0	50	100
2	11.633 17	11.642 79	11.633 17	
6	5.051 51	5.054 16	5.061 48	
10	3.414 93	3.416 1997	3.420 04	

表-2

K	収斂性		
	式	(17) ₃	(17) ₅
2	11.633 17	11.726 60	0.992 03
6	5.051 51	5.144 33	0.981 96
10	3.414 93	3.507 04	0.973 74

表-3

K	(17) ₄ 式			
	r	0	50	100
2	11.633 17	12.582 06	15.441 69	
6	5.051 51	5.461 90	6.696 12	
10	3.414 93	3.691 80	4.524 57	

表-4*

K	(衝撃) : (17) ₄ 式		
	y_0/y_0	y_{50}/y_0	y_{100}/y_0
2	1	1.081 56	1.327 38
6	1	1.081 23	1.3 ² 556
10	1	1.081 07	1.324 93

* 表-4 中 y_0, y_{50}, y_{100} は夫々速度 0, 50, 100 km/hr に相当する最大撓みを表わしている。

曲げモーメントについては、(18)式の \sum_r の中に r^2 があるため一層収斂が悪くなつて、(18)₁式による値 1738.241 kg.m に対し、(18)式では $r=1, 3, 5, \dots, 27$ に対して 1040.732 kg.m となつて 60% に過ぎないから、更に項数を多く計算しなければならない。

以上の計算から明らかにされた諸点は次の通りである。

1. 軌条の最大撓みは動輪がその直上に来たときに起り、 W に基づくものが決定的である(図-5(d))。
2. (17)₁式によると $y=3.416 197$ mm, (17)₂式では $v=50$ km/hr, $K=10$ kg/cm³ に対し 3.416 1997 mm。(表-1), 従つて $\varepsilon=30$ sec⁻¹ 程度では最大撓みについては ε の影響を無視してよい。
3. W のみによる最大撓みは、 v の変化よりも K の大きさに支配される(表-1)。
4. 級数の収斂性は K が小さいほど良好である(表-2)。
5. 鎮撃をも考慮すると、衝撃係数は大体速度の自乗に比例して増大する(表-3, 4)。
6. 速度上昇による衝撃の増加割合は K に殆ど関係がない(表-4)。

7. 以上は単一車輪についてあるが、機関車全体としては図-5(d)の W_1-y 曲線を影響線と考えて取扱えばよい。

8. 最大曲げモーメントに関しては上述の程度の計算しかしなかつたが、更に計算を進めれば最大撓みと同様の結果が得られると思う。

8. 結 言

本文では軌条及び枕木に関する動力学的な研究を進めて行く第1段階として、弾性基礎上にある梁の撓み振動を考究したわけである。その後電気抵抗の変化を利用して軌条応力を測定することに成功して、本文の理論結果を適用して少なからざる成果を収めた⁽¹³⁾。本文では基礎的な研究として極く一般的な取扱いを行つたが、今後更に次の諸点について研究して行かねばならない。

1. 理論的には梁の回転慣性、剪断力、軸力等の影響をも考慮する。
2. 本文では走行車輛の上下動による軌条の撓み振動を考えたが、車輛の左右動、前後動による軌条の横振動や振れの問題も取扱わねばならない。
3. すべて有限長の梁を考えたが、無限長の梁についても理論的に考究を進めている。
4. 走行荷重自身の慣性力を考慮して理論解を求めるることは、前述の如く殆ど不可能であるので、実験的な研究を行つている。
5. 走行車輛の衝撃、軌条の不整及び縫目等の影響も実験的に研究する。
6. 基礎地盤反力係数は道床係数として具体的に研究することになつてゐる。

終りに終始御懇意な御指導を賜つた京大教授石原、村山両博士に深謝の意を表する次第である。

参 考 文 献 そ の 他

- (1) Lord Rayleigh; "Theory of Sound", Vol. 1, p. 262~286.
- (2) S. Timoshenko; "Vibration Problems in Engineering", p. 368.
- (3) これらの内の特別の場合は Timoshenko の結果と一致する、上掲文献(2)参照。
- (4) 例えは、小坂潤二; "客貨車工学" 上 p. 480.
- (5) 三瀬幸三郎、国井修二郎; "走行荷重による橋桁の強制振動論" 九州大学弹性工学研究所報告、第1卷第1号(昭.18.3) p. 9.
- (6) 喜内敏; "梁及び矩形版の撓み振動の理論" 土木学会論文集第5号(昭.25.11) p. 129 及び p. 134.
- (7) 上掲文献(2)及び S. Timoshenko; "Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail", Intern. Congress for Applied Mechanics, Proceedings Zürich, 1926, p. 407~418.
- (8) 京福電鉄、東古市駅及び本丸岡駅構外で実施(昭.23.9).
- (9) K. Hayashi; "Theorie des Trägers auf Elastischer Unterlage", S. 75.
- (10) 森彦三、松野千勝; "機関車工学" 中, p. 284~286.
- (11) Inglis; "A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges", Cambridge (1934).
- (12) 上掲(8)による実測記録による。
- (13) 小林勇、後藤尚男、浜口篤弘、三輪利英; "電気抵抗の変化による軌条応力の測定(第1報)", 第3回関西工学連合講演会(昭25.10.15)で講演、近く土木学会誌に登載の予定。