調圧水槽の安定条件について（第2報）

正員 林 泰 造*

STABILITY CONDITION OF SURGE TANK (2nd Report)

Taizo Hayashi C. E. Member

Synopsis; A study was made of the influence on the stability of a pressure adjusting reservoir as exerted by the deflection of the efficiency curve of the water-wheel which is an important characteristic not dealt with in the first report.

In the light of the result of the study, Thoma's condition $F>l/2kH_0Ag$ was revised and a formula, $F>\xi l/2k\ H_0Ag$ was theoretically introduced. On the other hand, the meaning of the correction coefficient ξ in this formula was examined from various view-points.

梗　概　第1報に継続して調圧水槽の安定性に関し，第1報に於ては取扱われなかつた今1つの重要な特性——水車の効率曲線の傾き——が調圧水槽の安定性に如何なる影響を持つかを考察し，Thoma の条件 $F>l/2kH_0Ag$ を修正して $F>\xi l/2kH_0Ag$ なる式を理論的に誘導し，併せて同式中に現われる補正係数 ξ の意味について種々考察を加えたものである。

§1. 前書き

第1報に於ては，並列運転中の他の発電機等の回転部分の慣性が調圧水槽中の水面振動の安定性を増大せしめるものである事に関して主として記述をした。この事から逆に考えれば，調圧水槽振動系が最も安定性を減ずるのは，調圧水槽を持つた水車に直結された発電機が，外部の発電機網から切離されて特に単独運転を行う場合となる。この事柄は第1報の数値計算例（図-7）からも明かに観取される。従つて調圧水槽の安定性を論ずる際には調圧水槽を有つた水車発電機が単独運転を行つて居る場合の安定性を考察するか，又は実際には他の発電機と並列運転下に在るにしても，他の発電機等の回転部分の慣性の振動安定性えの貢献を一切無視して，振動論的には恰も同水車発電機が単独運転をして居るものと考えて系の安定性を考察するならば，調圧水槽の安定性を考える場合には安全側の計算となる訳である。本報に於ては斯かる意味での安全側の計算を行う事によつて，式の簡易化と全体の見透しとを計りつゝ，第1報に於ては記述しなかつた今1つの重要な特性——水車の効率曲線勾配の影響——の問題に着目して計算を進めて見る事とする。なお本報は第1報に継続して，本間仁先生の御示唆と御指導との許に成つたものである。

§2. 基本式

(a) 水車に対する基本式

第1節に記載した如き意味に於て水車発電機が単独運転をして居る場合について考察をする。此の場合水車に直結された回転部分の慣性は余り大きくはならない。従つて此処では Thoma が採用した考え方に倣つて水車に関しては次の特性式を以て代用する：

$$\eta(H,Q_*)HQ_*=\text{const.} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

記号は第1報の場合と同一である。又 $\eta(H,Q_*)$ は，H 及び Q_* の函数としての効率 η と云う意味を表わす。因に Thoma の場合の水車の特性式は

$$\eta(HQ_*)HQ_*=\text{const.}, \quad \therefore\ HQ_*=\text{const.} \qquad \cdots\cdots(2.1')$$

であり，之は (2.1) の特殊の形と見る事が出来る。

(b) 隧道中の水の運動方程式

第1報と全く同一で，

$$\frac{l}{Ag}\frac{dQ}{dt}=H_*-H-kQ^2 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(c) 調節水槽に関する連続方程式

之も第1報と全く同一で，

* 東京大学第一工学部

$$F\frac{dH}{dt}=Q-Q_*\qquad\cdots\cdots(2.3)$$

§3. 平衡位置

(2.2),(2.3) の中で時間に関して変動する項を0と置いた式と (2.1) とから平衡位置を定める次の式を得る:

$$H_*-H-kQ^2=0,\qquad Q-Q_*=0,\qquad \eta(H,Q_*)HQ_*=\mathrm{const.}\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) は図式又は逐次計算によつて近似的に解く事ができる。かくして (3.1) から求められる平衡点諸量を $H_0, Q_0(=Q_{*0}),\ \eta_0$ と記す。

4. 方程式の線型化

平衡点近傍の諸量の微小変位を小文字 q,h,q_* で表わせば

$$Q=Q_0+q,\quad H=H_0+h,\quad Q_*=Q_0+q_*\qquad\cdots\cdots(4.1)$$

となる。(4.1) を (2.1), (2.2) 及び (2.3) に代入して q,h,q_* に関する2次以上の項を無視し, 且 (3.1) の関係を使用して整頓すれば (2.1), 及び (2.3) は夫々次の如くとなる:

$$Q_0\left\{H_0\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0+\eta_0\right\}h+H_0\left\{Q_0\left(\frac{\partial\eta}{\partial H_*}\right)_0+\eta_0\right\}q_*=0\qquad\cdots\cdots(4.2)$$

$$\frac{l}{Ag}\ \frac{dq}{dt}=-h-2kQ_0.q\qquad\cdots\cdots(4.3)$$

$$F\frac{dh}{dt}=q-q_*\qquad\cdots\cdots(4.4)$$

但し上式中 $(\partial\eta/\partial H)_0$, $(\partial\eta/\partial Q_*)_0$ とは夫々次の如き量である:

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0=\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_{H=H_0},\ \left(\frac{\eta\partial}{\partial Q_*}\right)_0=\left(\frac{\partial\eta}{\partial Q_*}\right)_{Q=Q_0}\qquad\cdots\cdots(4.5)$$

次に (4,2), (4.3), (4.4) の3式から未知量 q_* 及び h を消去して未知量 q に関する1本の式を作れば,

$$\frac{l}{Ag}\ \frac{d^2q}{dt^2}+Q_0\left[2k-\frac{H_0\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0+\eta_0}{FH_0\left\{Q_0\left(\frac{\partial\eta}{Q_*}\right)_0+\eta_0\right\}}\cdot\frac{l}{Ag}\right]\frac{dq}{dt}+\left[\frac{1}{F}1-\frac{2kQ_0^2}{H_0}\cdot\frac{\left\{H_0\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0+\eta_0\right\}}{\left\{Q_0\left(\frac{\partial\eta}{\partial Q_*}\right)_0+\eta_0\right\}}\right]q=0\cdots(4.6)$$

を得, 之は q に関する振動方程式となつている。

§5. 安定性

(4.6) は q に関する振動方程式であり, dq/dt の係数即ち減衰係数及び q の係数即ち復原係数が正なる事がその振動の安定条件となる。然し kQ_0^2 は隧道中の水頭損失を表わし, 一般に $2kQ_0^2/H_0\ll 1$ である事から, 復原係数は先ず一般に恒に正となるものと考えて差支ない様に思われる。従つて安定性として問題となるのは減衰係数の符号である。即ち (4.6) から, 減衰係数が正なる為の条件として

$$F>\frac{l}{2kH_0Ag}\cdot\frac{\left(\frac{\partial\eta}{H_0}\right)\cdot H_0+\eta_0}{\left(\frac{\partial\eta}{\partial Q_*}\right)_0\cdot Q_0+\eta_0}\qquad\cdots\cdots(5.1)$$

を得, 之は所要の安定条件となる。因に Thoma の条件は,

$$F>\frac{l}{2kH_0Ag}\qquad\cdots\cdots(5.2)$$

§6. 補正係数の吟味

(5.1) と (5.2) とを比較する事により, (5.1) の右辺の後半の項:

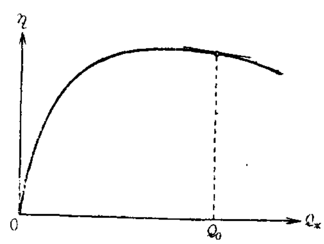
$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0\cdot H_0+\eta_0\Big/\left(\frac{\partial\eta}{\partial Q_{*0}}\right)\cdot Q_0+\eta_0\qquad\cdots\cdots(5.3)$$

は, 本報の場合に於ける, Thoma の条件の補正係数とも名付くべき無次元の数となつて居る事が判明する。次に之の補正係数の大さについて若干の吟味を行う:

先づ $(\partial\eta/\partial Q_*)_0$ については, 之は落差 H を一定に保ちつゝ, 水車えの流入水量 Q_* のみを変化せしめた時の, 平衡点近傍に於ける効率の変化の割合であつて, **図-1** の $Q_*=Q_0$ なる点に対応する曲線上の点に於てこの曲線に引かれた切線の勾配である。

次に分子に現われる $(\partial\eta/\partial H)_0$ について考える。之は流量 Q_* を$Q_*=Q_0$: 一定 に保ちつゝ, 落差 H のみを平衡点近傍に於て変化せしめた時に効率が変化する変化の割合である。即ち Q_* を一定にして, H を変数

図—1



にとつて画いた効率曲線に，平衡点 $H=H_0$ に於て引いた切線の勾配である。而して斯かる画き方の効率曲線は之迄注目せられず，殆ど見掛けられぬものであつた。即ち落差 H を増（又は減）せしめると，水車に流入する水の流速は $c\cdot\sqrt{2gH}$ であるから，流量 Q_* も亦当然増大（又は減少）する。従つて Q_* を一定に保ちつゝ落差 H を増（又は減）させる為には，之に応じて案内瓣を閉め，（又は開き）つゝ効率曲線を画かねばならぬ。案内瓣の開き面積が変化すれば，それに従つて効率も変化する。斯くして使用水量 $Q_*=Q_0$ をパラメーターとし，H に対してプロットされた新しい効率曲線が画かれ得る筈である。而して若し実測が行われて H に対する効率曲線が画かれた場合には，$(\partial\eta/\partial H)_0$ は $H=H_0$ に対応する効率曲線上の点に於て，同曲線に引いた切線の勾配を表わすものである。

この様にして $(\partial\eta/\partial Q_*)_0$ 及び $(\partial\eta/\partial H)_0$ の値が判れば，之等の値を（5.3）に代入する事によつて補正係数の値が判明し，Thoma の条件に幾何の補正を施せば良いかゞ判明する筈である。以上の様な理由から，之迄関心が払われて居らなかつた H に関してプロットされた効率曲線の必要性が認識せられる様になる事を筆者は希うものであり，又その必要性を此処に提唱し度いものなのである。

§7. Thoma の條件について

本報第１節に於て述べた様に，Thoma は効率を理論出力 $H\cdot Q_*$ の函数，即ち

$$\eta=\eta(HQ_*)$$

と考えて居る。従つて同一の量の出力変動を産むならば，それが H の変動に起因するか Q_* の変動に起因するかを問う事がない。従つて

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0\cdot H_0=\left(\frac{\partial\eta}{Q_*}\right)_0\cdot Q_0 \qquad\cdots\cdots(7.1)$$

と考えて居る訳である。この（7.1）を補正係数（5.3）に代入すれば補正係数は１となり，本報の安定条件（5.1）は Thoma の条件（5.3）と一致する。

§8. 補正係数の近似算出式

第６節に於て記述した様に，Thoma の条件の補正係数を求めるには，図-1 の如き効率曲線の他に，更に H に関してプロットされた効率曲線が必要となる。然し後者は之迄殆ど実測されていない。そこでこの新しい画き方の効率曲線無しに補正係数を求める近似的方法を以下に記載する：

先づ，一定流量に保持せられて居る時には，

$$Q_*=Q_0=S\cdot c\sqrt{2gH} \qquad\cdots\cdots(8.1)$$

但し c は常数と考える。この関係式から直ちに此の場合の微分間の関係：

$$\sqrt{H_0}\,ds+\frac{S_0}{2\sqrt{H_0}}dH=0,\qquad\therefore\; dH=-\frac{2H_0}{S_0}dS \qquad\cdots\cdots(8.2)$$

を得る。従つてこの（8.2）の関係を使用すれば，

$$\frac{\partial\eta}{\partial H}=-\frac{S_0}{2H_0}\left(\frac{\partial\eta}{\partial S}\right)_{*Q*} \qquad\cdots\cdots(8.3)$$

となる。玆に $(\partial\eta/\partial S)_{*Q*}$ は Q_* を一定に保ちつゝ求めた偏微分係数である事を示すものである。

此処で若し，効率 η は S のみによつて定まるものであると近似的に考えるならば，次の近似的関係が与えられる：

$$(\partial\eta/\partial S)_{*Q*}\fallingdotseq(\partial\eta/\partial S)_{*H} \qquad\cdots\cdots(8.4)$$

但し $(\partial\eta/\partial S)_{*H}$ は H を一定に保ちつゝ求めた偏微分係数である。

そこで（8.4）を（8.3）の右辺に代入すれば，

$$\frac{\partial\eta}{\partial H}=-\frac{S_0}{2H_0}\left(\frac{\partial\eta}{\partial S}\right)_{*H},\qquad\therefore\;\frac{\partial\eta}{\partial H}=-\frac{Q_0}{2H_0}\frac{\partial\eta}{\partial Q_*} \qquad\cdots\cdots(8.5)$$

を得る。この（8.5）を（5.3）に代入すれば，補正係数として近似的に次式を得る：

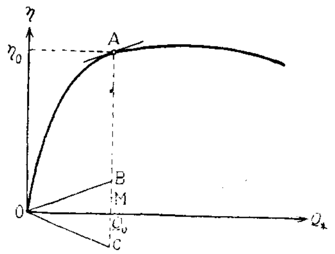
$$\frac{\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0\cdot H_0+\eta_0}{\left(\frac{\partial\eta}{\partial Q_*}\right)_0\cdot Q_*+\eta_0}\fallingdotseq\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial Q_*}\right)_0\cdot Q+\eta_0}{\left(\frac{\partial\eta}{\partial Q_*}\right)_0\cdot Q_0+\eta_0} \qquad\cdots\cdots(8.6)$$

この式に拠れば，補正係数を **図-1** の如き通常の効率曲線のみを使用する事により計算する事が出来る事となる。

§ 9. 補正係数の大さ

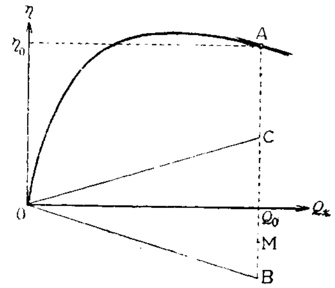
近似式（8.6）によつて補正係数の大さを算出して見よう。**図-2** の如く最大効率点に対応する流量よりも小なる流量 Q_0 に於て作働する場合を考える。Q_0 に対応する曲線上の点Aに於て引いた切線に平行に原点Oより線分 OB を引き，又横軸に対する OB の鏡像 OC を画く。而る時は直ちに判明する様に，補正係数の分母に現われる $((\partial\eta/\partial Q_*)_0\cdot Q_0$ の大さは $\overline{\mathrm{BQ_0}}$ で表され，従つて補正係数の分母 $(\partial\eta/\partial Q_*)_0\cdot Q_0+\eta_0$ は $\overline{\mathrm{Q_0B}}+\overline{\mathrm{AQ_0}}=\overline{\mathrm{AC}}$ で表される。又 $\overline{\mathrm{BQ_0}}$ の中点をMとすれば前と同様にして，補正係数の分子 $-(\partial\eta/\partial Q_*)\cdot Q_0/2+\eta_0$ は $-\overline{\mathrm{MQ_0}}+\overline{\mathrm{AQ_0}}=\overline{\mathrm{AM}}$ で表わされる。従つて補正係数（8.6）の大さは，此の場合 $\overline{\mathrm{AM}}/\overline{\mathrm{AC}}$ で表わされ，1よりも小さい値となる事が判明する。

図—2



次に **図-3** の如く最大効率点に対応する流量よりも大なる流量 Q_0 に於て作働する場合を考える。此の場合にも前と同様にして補正係数（8.6）の分母及び分子の大さを考えれば夫等は夫々 $\overline{\mathrm{AC}}$ 及び $\overline{\mathrm{AM}}$ で表わされる事が容易に判明する。従つてこの場合の補正係数は $\overline{\mathrm{AM}}/\overline{\mathrm{AC}}>1$ となり，この場合には Thoma の条件は拡大せられねばならぬ事が要求される。特に水車が，最大効率点に於て作働する場合には，補正係数は丁度1に等しくなる。

図—3



§ 19. 結 び

第**1**報及び本報を通じて之迄提出した Thoma の安定条件に関する各種の補正式を考察する為には，次の如き方式の区分に従つて行うのが便であろう：

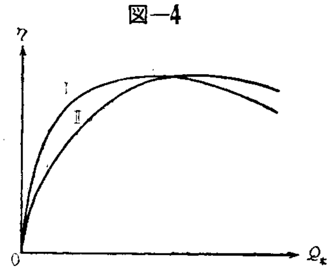
（**a**）調圧水槽を持つた水車発電機が，外部負荷を必ず他の発電機との並列運転網に入つた上で分担し，単独で外部負荷をとる事が決して無い様な方式

（**b**）調圧水槽を持つた水車発電機が，単独で外部負荷をとる場合が生じ得る様な方式

（**a**）の場合には，並列運転の発電機箇数が適当に大であれば，安定条件は主として第**1**報に於ける考察によつて定められ，一般に，調圧水槽の安定性上必要な最小断面積，即ち Thoma の条件によつて与えられる調圧水槽断面積を縮小し得るものと考えられる。

（**b**）の場合には，第**2**報の考察によつて安定条件を定めねばならない。この場合には，Thoma の条件によつて与えられる調圧水槽断面積を更に拡大せねば安定性が満足せられ得ない場合も生じ得る。そして之は効率曲線の形に依る事柄であつて，効率曲線が最大効率点を超してから右下りに頭を下げる程度の著しい程，Thoma の条件は拡大されねばならぬ方向に移行する。従つて例えば **図-4** に於て，2つの効率曲線Ⅰ及びⅡについて言えば，調圧水槽の安定性の上から申しても，Ⅰの場合はⅡの場合より望ましいものではないのである。尤も之等の場合にも，若し水車が必ず最大効率点流量以下に於てのみ運転せられる様な方式になつて居る場合には，最大効率点を超した部分での効率曲線の頭の右下りの具合も最早や系の安定性とは関係のないものとなり，Thoma の条件を拡大する必要は如何なる意味に於ても起り得なくなる。

図—4



要するに，調圧水槽の安定条件の採用に関しては種々の場合を分類して，個々の特殊事情を良く考慮した上で最も適すると思われる安定条件を採用すべきものであると結論したい。そして Thoma の条件は夫々の場合に応じて夫々適当に修正される事が望ましいものであると考える。

終りに，水車調速器に関する種々の智識を東大一工精機教室　友人　野本明君から授かり，筆者の遭遇した此の方面での智識の不足に基く危機を打開するのに力を附与せせらた事を記して，特に謝意を表するものである。